Тема 1. Ряди

§1. Означення числового ряду, його збіжності. Геометрична прогресія та гармонічний ряд

Нехай задана нескінченна послідовність чисел

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

Нескінченна сума чисел виду $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ - **називається числовим рядом**, а числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - **членами ряду.**

Ряд позначають так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Вираз для n- го члена ряду при довільному натуральному $n>0$, називається **загальним членом ряду** і позначається u_n.

Загальний член ряду можна задати формулою $u_n=f(n)$, наприклад $u_n = \frac{3n}{n^2+4n+3}$.

Суму n перших його членів позначають через S_n:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n.$$

і прийнято називати n-ою частковою сумою ряду.

Ряд називається **збіжним**, якщо збігається послідовність його часткових сум S_n, тобто якщо існує скінчена границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Число S при цьому називають **сумою ряду** і записують

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

При цьому вважають також, що ряд збігається до числа S.

Якщо послідовність часткових сум ряду розбігається, то **ряд** називається **розбіжним.** У цьому випадку ряд не має суми.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1+1+1+\ldots$

$$S_1 = 1; \qquad S_2 = 2; \qquad S_3 = 3; \qquad S_n = n$$

– ряд розбігається, бо послідовність часткових сум $S_n = n$ необмежено зростає.

Ряд, що складений з елементів геометричної прогресії називається **геометричним рядом**:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots + = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Число q — знаменник геометричної прогресії.

Позначимо S_n сума n перших членів прогресії та знайдемо її значення:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

$$S_n q = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n.$$

Звідси отримуємо формулу частинної суми ряду

$$S_n - S_n q = a - aq^n$$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

Якщо $|q|<1$, то суму ряду знаходимо за формулою

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

а геометричний ряд збігається.

Якщо $|q|>1$, то сума ряду прямує до нескінченості при великих n

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a-aq^n}{1-q} \to \infty.$$

Якщо $q=1$, то сума теж розбіжна (прямує до нескінченості)

$$S_n = a+a+a+a+\ldots+a = an \to \infty (n \to \infty).$$

Якщо $q=-1$, то маємо формулу суми, що залежить від номера

$$S_n = a - a + a - \ldots + a = \begin{cases} a, n = 2k-1; \\ 0, n = 2k. \quad (k = 1,2,3\ldots) \end{cases}$$

Оскільки $a \neq 0$, послідовність $\{S_n\}$ коливається і границі не має, то ряд розбіжний.

Отже, ряд $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ збіжний при $|q| < 1$ та розбіжний при $|q| \geq 1$

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ називається **гармонічним рядом.** Він розбіжний.

Числовий ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$ називається **узагальненим гармонічним рядом.**

Доведено, що при *p<=1* узагальнений гармонічний ряд розбігається, а при *p>1* -ряд збігається.

Якщо ряд збігається, то різниця між сумою S і частинною сумою його S_n

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

називається n -им **залишком ряду.**

Залишок R_n ряду - це похибка, яка одержується, якщо замість наближеного значення суми ряду S взяти суму перших n членів цього ряду. Але оскільки S є границя суми S_n, то для збіжного ряду виконується умова, що границя залишку прямує до нуля при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0$$

Таким чином, взявши достатньо велике число членів збіжного ряду, можна суму цього ряду обчислити з любою точністю. Звідси випливає, що основною задачею теорії рядів є дослідження збіжності ряду.

Основні властивості збіжних рядів

1. Відкидання чи зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність).

2. Якщо члени ряду помножити на деяку константу C, то його збіжність не порушиться, сума множиться на C.

3. Два збіжних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з сумами S_1 та S_2 можна почленно додавати або віднімати. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$.

4. Якщо ряд збіжний, то його члени можна групувати за порядком їх послідовності. Отриманий ряд збігається і його сума дорівнює сумі вихідного ряду.

§2. Числові ряди з додатніми членами. Достатні ознаки збіжності

Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Ця ознака є *необхідною,* але не є *достатньою*.

Приклад. Використовуючи необхідну умову, встановити розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{3n^2-1}.$

$$u_n = \frac{n^2+4n}{3n^2-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{3n^2-1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Необхідна умова збіжності не виконується, отже ряд розбіжний.

Ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ називається додатним, якщо всі його члени невід'ємні $u_n \geq 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

1. Ознака порівняння

Нехай маємо два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ -- 1-й ряд,} \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ -- 2-й ряд,} \qquad (2)$$

причому $a_n \leq b_n$. Тоді зі збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а з розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Приклад. Дослідити за ознакою порівняння збіжність ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

$$a_n = \frac{1}{\ln n}.$$

Порівняємо ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $b_n = \frac{1}{n}$; $a_n \geq b_n$.

Гармонічний ряд розбіжний, отже і ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ – розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2-1}$.

$$a_n=\frac{|\cos n|}{n^2-1}\le\frac{1}{n^2-1}=b_n,\ \sum_{n=2}^{\infty}b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

– ряд збіжний, отже і наш ряд збіжний за ознакою порівняння.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Члени даного ряду порівнюємо з відповідними членами гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Для довільного $n>1$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$. Так як гармонічний ряд розбіжний, то відповідно до ознаки порівняння заданий ряд також розбіжний.

2. Ознака Д'Аламбера

Якщо u_n – загальний член ряду і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \text{ то}$$

а) при $l<1$ ряд збіжний;

б) при $l>1$ ряд розбіжний;

в) при $l=1$ ознака не чинна: існують ряди збіжні, для яких $l=1$ і розбіжні, для яких теж $l=1$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{3n^2-1}$.

$$u_n = \frac{n^2+4n}{3n^2-1}; \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+4(n+1)}{3(n+1)^2-1};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)^2+4(n+1)(3n^2-1))}{(3(n+1)^2-1)(n^2+4n))} = 1.$$

$l = 1$ – ознака не чинна. Але не виконується необхідна умова збіжності, тому ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{(n+1)^2-1}=1.$$

l = 1 – ознака не чинна.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}.$$

$l=\frac{1}{3}<1.$ Отже, ряд збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{2^n n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!\cdot n!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+2)\cdot n!}{(n+1)!n!(n+1)} = \frac{1}{2};$$

$l = \frac{1}{2} < 1$. Отже, ряд збіжний.

3. Ознака Коші

Якщо u_n – загальний член ряду і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

а) при $l < 1$ ряд збіжний; б) при $l > 1$ ряд розбіжний;

в) при $l = 1$ ознака не чинна: існують ряди збіжні, для яких $l=1$ і розбіжні, для яких теж $l = 1$.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n^2+2}{n^2+3} \right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{5^n \left(\frac{n^2+1}{n^2+3} \right)^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+3} = 5.$$

Отже $l = 5 > 1$ ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+4} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3}.$$

Отже $l = \frac{2}{3} < 1$ – ряд збіжний.

4. *Інтегральна ознака Коші-Маклорена*

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ утворюють незростаючу послідовність $u_n \leq u_{n+1}$ й існує незростаюча неперервна невід'ємна функція *f(x)* така, що $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n, \ldots,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігаються та розбігаються одночасно.

Приклад. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність *узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p\in R.$

Маємо $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Функція $f(x)$ задовольняє умові ознаки.

Розглянемо інтеграл $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$:

1) $p=1$. $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{\beta\to\infty}\ln|x|\Big|_1^{\beta}=\infty$ – інтеграл і ряд (гармонічний) розбіжні.

2) $p\neq 1$. $I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{\beta\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{\beta^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right).$

Якщо $p > 1$, то $I = \dfrac{1}{1-p}$, якщо $p < 1$, то $I = \infty$.

Остаточно одержуємо:

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{збіжний при } p > 1; \\ \text{розбіжний при } p \le 1. \end{cases}$$

Приклад. Дослідити на збіжність $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)}$.

Маємо $f(x)=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

Розглянемо інтеграл

$$I=\int_3^{\infty}\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx=\lim_{\beta\to\infty}\int_3^{\beta}\frac{d(\ln x)}{\ln x\ln(\ln x)}=\lim_{\beta\to\infty}\int_3^{\beta}\frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\ln(\ln(\ln x))\Big|_3^{\beta}=\lim_{\beta\to\infty}(\ln\ln\ln\beta)-\ln\ln\ln 3=\infty.$$

Отже інтеграл і ряд розбіжні.