

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПІР МАТЕРІАЛІВ.

Побудова епюр внутрішніх зусиль

Методичні рекомендації

до виконання розрахунково-графічної роботи №2

*Для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія»
ОП «Міське будівництво і господарство»*

Київ 2023

УДК 339.374

0 - 32

Укладачі Д.В. Левківський, канд. техн. наук., доцент

М.В. Лазарева, канд. техн. наук., доцент

М.О. Янсонс

В.О. Кошева канд. техн. наук., доцент

Рецензент: Л.О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук., доцент

Відповідальний за випуск: Д.В. Левківський, канд. техн. наук

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 3 від
3 листопада 2023 року*

Опір матеріалів. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи №2. Уклад.: Д.В. Левківський, М.В. Лазарева, М.О. Янсонс, В.О. Кошева . – Київ.: КНУБА, 2023. – 32 с.

Містять теоретичні відомості, приклади та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи №2 з опору матеріалів для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Міське будівництво і господарство» та приклади оформлення звітів.

КНУБА, 2023

Зміст

Загальні вказівки.....	4
1. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	5
Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного перерізу.....	8
Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик несиметричного складного перерізу.....	10
2. Розтягування (стискування) стержнів.....	15
Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони.....	17
Задача 2.2. Розрахунок статично-визначеної стержневої системи.....	19
Список рекомендованої літератури.....	45
Додатки.....	46

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням розрахунково-графічних робіт необхідно опрацювати теоретичні відомості і методи розв'язання задач, стисло наведені в тексті методичних рекомендацій. Відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів більш широко викладено в підручниках, вказаних в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови задач наведені в тексті методичних вказівок і в додатках.

При оформленні розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок. Розрахунки на кожному окремому етапі оформлюються в такій послідовності: розрахункова формула, підстановка в неї конкретних даних, остаточний результат і одиниця розмірності величини. Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ. Кожен окремий етап розрахунку повинен мати заголовок. Розв'язання задач оформлюється на стандартних аркушах паперу формату А4, текст і розрахунки повинні бути написані акуратно і без помарок. Графічні ілюстрації виконуються з дотриманням масштабу і нанесенням всіх необхідних розмірів. До кожної РГР додається титульний лист, зразок якого приведений у дод. 1. При здачі РГР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. Наступна робота приймається після здачі попередньої.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні. До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

1. Теоретичні відомості. Побудова епюр внутрішніх зусиль

1.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль для балки при плоскому згині.

Якщо зовнішнє навантаження лежить в площині, що проходить через одну з головних осей поперечного перерізу та вісь стержня, та перпендикулярне до вісі балки, балка знаходиться в стані *плоского згину*. При цьому в поперечних перерізах виникають поперечна сила Q та згинальний момент M .

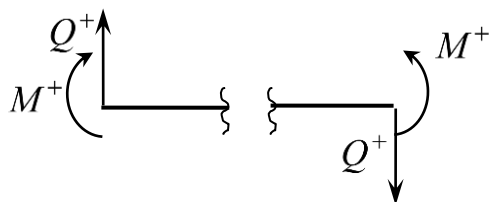


Рис. 1.1

Поперечна сила Q визначається як алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на перпендикуляр до вісі балки з одного боку від перерізу. Поперечна сила додатна, якщо вона намагається повернути відрізану частину балки за

годинниковою стрілкою.

Згинальний момент M визначається як алгебраїчна сума моментів всіх сил з одного боку від перерізу відносно точки перерізу. Згинальний момент додатний, якщо він стискає верхні волокна балки (зовнішні волокна рами). Додатні напрямки для сил та моментів з одного боку від перерізу ілюструються рис.1.1 (правило знаків).

Побудова епюр починається з визначення *реакцій в'язей*. В розрахункових схемах плоских конструкцій зустрічаються три типи опор:

- шарнірно–рухома опора (рис. 1.2.а), яку можна замінити однією реакцією R_a , що діє в напрямку обмеження руху балки;
- шарнірно–нерухома опора (рис. 1.2.б), характеризується двома складовими опорної реакції: горизонтальною H_a та вертикальною V_a ;
- жорстке защемлення – опора (рис. 1.2.в) замінюється трьома складовими реакції: горизонтальною силою H_a , вертикальною V_a та реактивним моментом M_a .

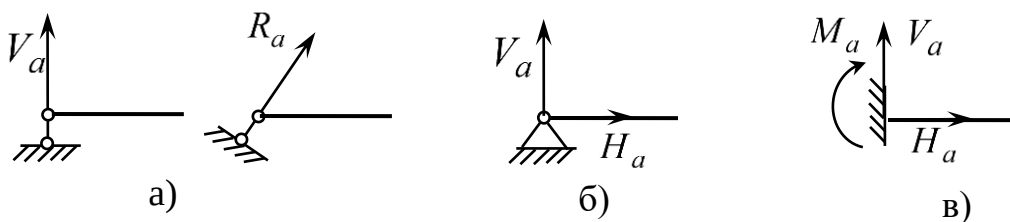


Рис. 1.2

Реакції в'язей визначаються з **рівнянь рівноваги**. Для плоскої системи сил маємо три лінійно-незалежних рівняння рівноваги. Надалі для визначення реакцій шарнірно-закріпленої балки зручно користуватися наступною системою:

$\sum F_x = 0$ – сума проекцій всіх сил на вісь балки дорівнює нулю;

$\sum M_a = 0$ – сума моментів всіх сил відносно закріплення A дорівнює нулю;

$\sum M_b = 0$ – сума моментів всіх сил відносно закріплення B дорівнює нулю.

Для перевірки правильності знайдених реакцій використовуємо рівняння $\sum F_z = 0$ – сума проекцій всіх сил на перпендикуляр до вісі балки дорівнює нулю.

Наявність проміжного шарніру додає ще одне рівняння рівноваги: $\sum M_C^n = 0$ або $\sum M_C^n = 0$ – сума моментів всіх сил, що діють зліва (справа) від шарніру C відносно точки C , дорівнює нулю.

Якщо кількість невідомих реакцій співпадає з кількістю рівнянь рівноваги, то конструкція є **статично визначеною**.

Якщо невідомих реакцій більше, ніж рівнянь рівноваги, то конструкція є **статично невизначеною**.

Епюри внутрішніх зусиль будуються шляхом застосування методу перерізів на окремих ділянках балки (див. приклад до задачі 2.1) або в характерних точках (див. приклад до задачі 2.2, рекомендується для додатків 4-8). Характерними називаються точки прикладання зосереджених сил (включаючи реакції в'язей) або моментів та початку і кінця розподіленого навантаження. Розбиття балки на ділянки також проводиться по характерних точках.

Епюри внутрішніх зусиль будуються на осьовій лінії заданої балки. Додатні значення Q відкладаються вгору від осьової лінії, від'ємні – вниз. Додатні значення згинального моменту M відкладаються вниз від осьової лінії, від'ємні – вгору (епюра M будується на розтягнутих волокнах).

Для згинального моменту M та поперечної сили Q виконуються диференціальні залежності, що впливають з рівняння рівноваги елемента довжиною dx :

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + q = 0. \quad (1.1)$$

З диференціальних залежностей (1.1) та вищенаведених правил визначення внутрішніх зусиль впливають наступні **правила побудови епюр** згинального моменту M та поперечної сили Q :

1. В точці прикладання зосередженої сили на епюрі Q буде розрив на величину цієї сили, на епюрі M спостерігається злом.

2. В точці прикладання зосередженого моменту на епюрі M буде розрив на величину цього моменту, епюра Q неперервна.
3. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, епюра Q буде горизонтальною, епюра M – похилою прямою.
4. На ділянках прикладання рівномірно розподіленого навантаження епюра Q – похила пряма, епюра M – парабола.
5. При $Q > 0$ M зростає, при $Q < 0$ M спадає, при $Q = 0$ на епюрі M виникає екстремум (вершина параболи).

1.2. Побудова епюр для плоских рам під дією плоскої системи сил.

Рамами називають системи, що складаються з прямолінійних стержнів, жорстко з'єднаних між собою. Вісь рами являє собою ламану лінію, але кожну ділянку можна розглядати як балку. При цьому в поперечних перерізах виникають поздовжня сила N , поперечна сила Q та згинальний момент M . Поздовжня сила N визначається як алгебраїчна сума проєкцій

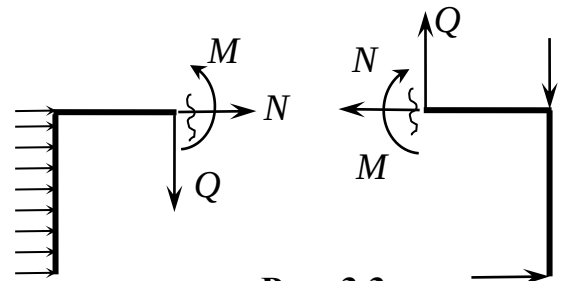


Рис. 3.3

всіх сил (включаючи опорні реакції) на вісь балки з одного боку від перерізу (рис. 3.3). Якщо поздовжня сила викликає розтяг ділянки, то вона додатна, і навпаки. Поперечна сила Q – алгебраїчна сума проєкцій всіх прикладених до відрізаного частини рами сил на перпендикуляр до вісі, знак “+” в випадку, якщо сила повертає відрізану частину за годинниковою стрілкою. Згинальний момент M шукаємо як алгебраїчну суму моментів всіх сил, що діють з одного боку від перерізу, відносно точки перерізу; знак “+” маємо, коли стискаються зовнішні волокна рами. Для побудови епюр знаходимо значення N, Q, M в характерних перерізах, а потім з’єднують знайдені точки згідно до правил побудови епюр. Додатні значення N, Q відкладаються з зовнішнього боку рами, від’ємні – з внутрішнього. Епюра M будується на розтягнутих волокнах.

1.3. Побудова епюр для плоских криволінійних стержнів.

В поперечних перерізах плоского криволінійного бруса діють, як і в рамах, зусилля N, Q, M . Найчастіше розглядаються стержні малої кривизни, вісь яких є

дугою кола ($h/R < 1/5$, h – висота поперечного перерізу, R – радіус кола). В такому випадку зручно вводити полярну систему координат, і внутрішні зусилля будуть функціями від кута φ : $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$.

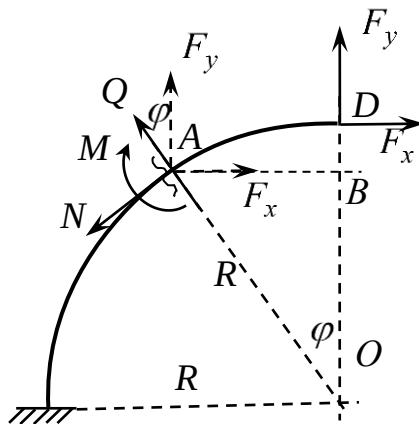


Рис. 1.4

Зусилля в перерізі φ (рис. 1.4)

знаходяться з рівнянь рівноваги для відрізаної частини: сума проекцій всіх сил на нормаль до перерізу (дотичну до кола)

$$N(\varphi) - F_y \sin \varphi - F_x \cos \varphi = 0,$$

сума проекцій всіх сил на перпендикуляр до вісі (на радіус кола)

$$Q(\varphi) + F_y \cos \varphi - F_x \sin \varphi = 0,$$

сума моментів всіх сил відносно точки перерізу (точки A)

$$-M(\varphi) + F_y \cdot AB - F_x \cdot BD = -M(\varphi) + F_y \cdot R \sin \varphi - F_x \cdot (R - R \cos \varphi) = 0.$$

Таким чином, для стержня, навантаженого силами F_x, F_y (рис.1.4) внутрішні зусилля визначатимуться за формулами

$$N(\varphi) = F_y \sin \varphi + F_x \cos \varphi,$$

$$Q(\varphi) = -F_y \cos \varphi + F_x \sin \varphi,$$

$$M(\varphi) = F_y \cdot R \sin \varphi - F_x R \cdot (1 - \cos \varphi). \quad (1.2)$$

Якщо ділянка стержня навантажена рівномірно розподіленням по дузі кривої навантаженням q , то рівнодійна від нього дорівнює добутку навантаження q на довжину хорди, що стягує цю дугу, і прикладена посередині цієї хорди перпендикулярно до неї (рис. 1.5)

Внутрішні зусилля в криволінійному стержні задовольняють диференціальним залежностям, що випливають з рівнянь рівноваги для елементарної ділянки:

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q; \quad \frac{dQ}{d\varphi} = N + qR;$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = -QR. \quad (1.3)$$

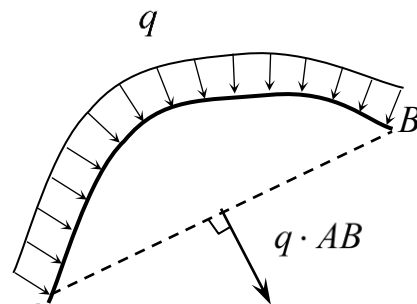


Рис. 1.5

Для побудови епюр обчислюємо значення внутрішніх зусиль в перерізах з певним кроком по φ (наприклад, з кроком $\pi/6$). Знайдені значення внутрішніх зусиль відкладаються на епюрах по нормалі до дуги кола. Додатні значення сил відкладаємо на зовнішніх волокнах стержня, епюра моментів будується на розтягнутих волокнах. В точках

прикладання зосереджених сил повинен бути скачок на епюрах сил, в точці прикладання зосередженого моменту – скачок на епюрі моментів. На ділянках, де $Q = 0$, M стала; в точці, де $Q = 0$, на епюрі M маємо екстремум.

1.4. Побудова епюр для плоскої рами під дією вертикального навантаження.

При такому навантаженні в перерізах рами виникають поперечна сила Q , згинальний момент M та крутний момент M_k . Вони знаходяться як алгебраїчна сума сил та моментів зовнішніх сил, що діють з одного боку від перерізу. Будемо вважати, що згинальний момент M додатній, якщо він стискує верхні волокна балки; крутильний момент додатній, якщо він закручує відрізану частину проти годинникової стрілки (рис 1.6). При повороті вісі рами на 90° крутильний момент стає згинальним, а згинальний стає крутильним. Поперечна сила та згинальний момент на кожній з ділянок задовольняють рівнянням рівноваги (1.1) та правилам побудови епюр.

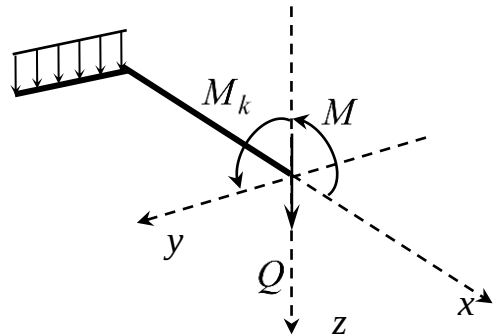


Рис. 1.6

1.5. Внутрішні зусилля при просторовому навантаженні.

При просторовому навантаженні внутрішні зусилля в поперечних перерізах стержнів зводяться до головного вектору $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}$. Введемо систему координат: вісь x направлена вздовж вісі стержня, осі y, z є головними центральними вісями поперечного перерізу.

Проектуючи головний вектор $\vec{F}$ і головний момент $\vec{M}$ на вісі x, y, z , отримуємо шість складових внутрішніх зусиль: поздовжня сила N , поперечні (перерізуючі) сили Q_y, Q_z , згинальні моменти M_y, M_z та крутильний момент $M_k = M_x$ (рис. 1.7). Поздовжня сила N додатня, якщо вона викликає розтягування; поперечні сили Q_y, Q_z додатні, якщо вони повертають відрізану частину стержня за годинниковою стрілкою при

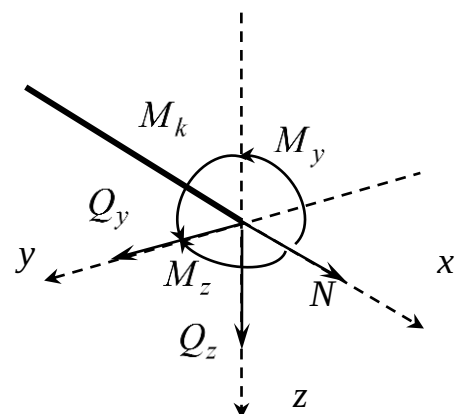


Рис. 1.7

спостереженні з боку вісей z, y відповідно; моменти M_x, M_y, M_z будемо вважати додатніми, якщо вони діють проти годинникової стрілки при спостереженні з боку осей x, y, z відповідно. Внутрішні зусилля визначаються з рівнянь рівноваги відрізаної частини балки або як алгебраїчна сума проекцій сил на відповідну вісь чи моментів відносно відповідної вісі.

2. Приклади задач до виконання

Задача 1. Для консольної балки (рис. 2.1) визначити внутрішні зусилля методом перерізів на ділянках та побудувати їх епюри.

Розв'язання. Для консольної балки визначати реакції в'язей не обов'язково, тому будемо будувати епюри починаючи з незакріпленого кінця. Вводимо вісь x зправа наліво та розбиваємо стержень на ділянки характерними точками. На кожній з ділянок робимо умовний переріз та прикладаємо поперечну силу $Q(x)$ та згинальний момент $M(x)$ (рис. 2.1.2) згідно до правила знаків (рис. 1.1). Інших внутрішніх сил не буде, оскільки балка знаходиться в стані плоского згину. Записуємо систему рівнянь рівноваги для відрізаної частини, що складається з суми проекцій всіх сил на вертикальну вісь та суми моментів всіх сил відносно точки перерізу, та знаходимо $Q(x)$ та $M(x)$ на кожній з ділянок. В отримані вирази підставляємо координати початку та кінця ділянки.

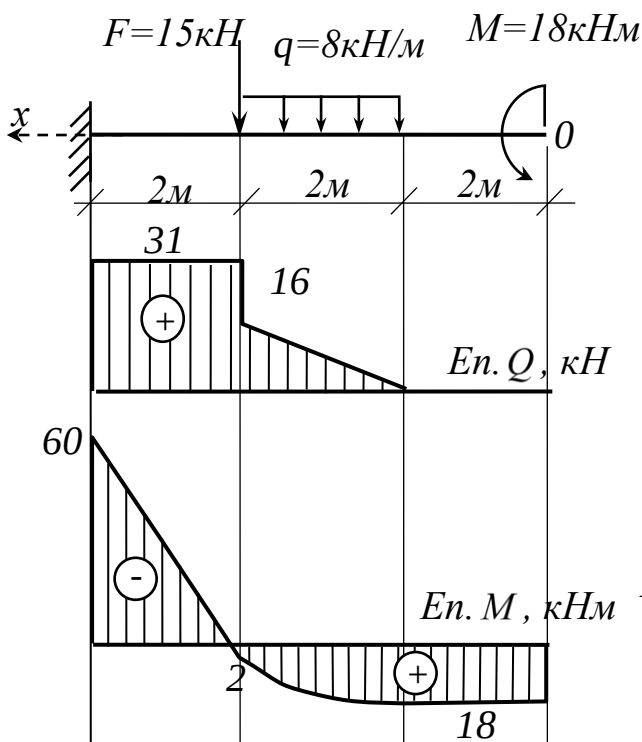


Рис. 2.1.1

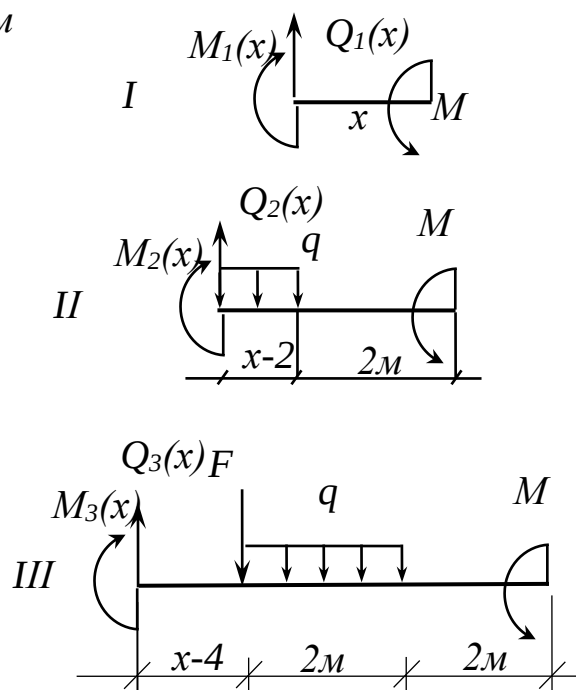


Рис. 2.1.2

I ділянка $0 \leq x < 2$: Рівняння рівноваги

$$\sum F_z = Q_1(x) = 0, \quad \sum M_n = -M_1(x) + M = 0.$$

Маємо

$$Q_1(x) = 0, \quad M_1(x) = M = 18 \text{ кНм}.$$

II ділянка $2 < x < 4$. Рівняння рівноваги

$$\sum F_z = -Q_2(x) + q(x-2) = 0; \quad \sum M_n = -M_2(x) - q \frac{(x-2)^2}{2} + M = 0.$$

Визначаємо внутрішні зусилля як функції через x : $Q_2(x) = q(x-2) = 8(x-2)$;

$$M_2(x) = -q \frac{(x-2)^2}{2} + M = -8 \frac{(x-2)^2}{2} + 18 = -4(x-2)^2 + 18.$$

Обчислюємо значення поперечної сили та моменту на початку та в кінці ділянки:

$$Q_2(2) = 0, \quad Q_2(4) = 8(4-2) = 16 \text{ кН};$$

$$M_2(2) = 18 \text{ кНм}; \quad M_2(4) = -4(4-2)^2 + 18 = 2 \text{ кНм}.$$

III ділянка $4 < x < 6$. Рівняння рівноваги $\sum F_z = -Q_3(x) + q \cdot 2 + F = 0$,

$$\sum M_n = -M_3(x) - F(x-4) - q \cdot 2(x-3) + M = 0.$$

Внутрішні зусилля $Q_3(x) = 2q + F = 2 \cdot 8 + 15 = 31 \text{ кНм}$,

$$M_3(x) = -F(x-4) - q \cdot 2(x-3) + M = -15(x-4) - 8 \cdot 2(x-3) + 18 = -31x + 126,$$

$$M_3(4) = -31 \cdot 4 + 126 = 2 \text{ кНм}; \quad M_3(6) = -31 \cdot 6 + 126 = -60 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри для поперечної сили $Q(x)$ та згинального моменту $M(x)$ по отриманих значеннях (рис. 2.1.1).

Задача 2. Для консольного стержня (рис. 2.1) визначити внутрішні зусилля методом перерізів на ділянках та побудувати їх епюри.

Розв'язання. Проектуємо сили на систему координат xOz (рис. 6.9):

$$P_{1x} = P_1 \cos 45^\circ = 7,07 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P_2 \sin 45^\circ = 7,78 \text{ кН},$$

$$P_{1z} = P_1 \sin 45^\circ = 7,07 \text{ кН},$$

$$P_{2z} = P_2 \cos 45^\circ = 7,78 \text{ кН}.$$

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum F_x = 0, \quad H_b = 14,85 \text{ кН},$$

$$H_b + 7,07 + 7,78 = 0;$$

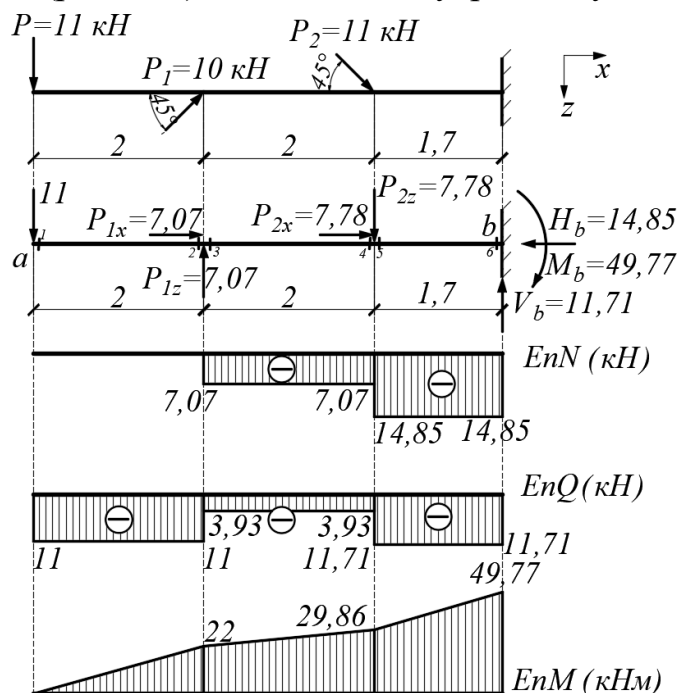


Рис. 2.2

$$\sum F_z = 0, 11 - 7,07 + 7,78 - V_b = 0, V_b = 11,71 \text{ кН};$$

$$\sum M_b = 0, 11 \cdot 5,7 - 7,07 \cdot 3,7 + 7,78 \cdot 1,7 - M_b = 0, M_b = 49,77 \text{ кНм}.$$

Перевірка: $\sum M_a = 0, 7,07 \cdot 2 - 7,78 \cdot 4 + 11,71 \cdot 5,7 - 49,77 = 0.$

Побудова епюр внутрішніх зусиль.

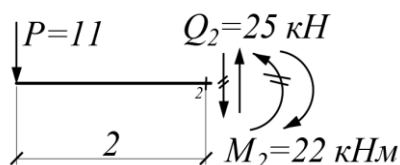


Рис.2.2.1 Переріз 2

$$N_2 = 0,$$

$$Q_2 = -P = -11,$$

$$M_2 = -P \cdot 2 = -22$$

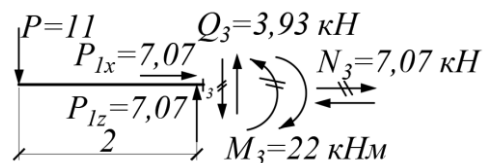


Рис.2.2.2 Переріз 3

$$N_3 = -P_{1x} = -7,07,$$

$$Q_3 = -P + P_{1z} = -3,93,$$

$$M_3 = -P \cdot 2 = -22$$

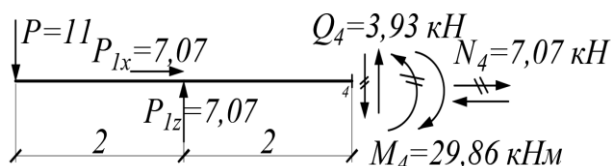


Рис.2.2.3 Переріз 4

$$N_4 = -P_{1x} = -7,07,$$

$$Q_4 = -P + P_{1z} = -3,93,$$

$$M_4 = -P \cdot 4 + P_{1z} \cdot 2 = -29,86$$

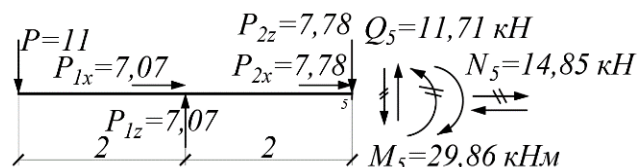


Рис.2.2.4 Переріз 5

$$N_5 = -P_{1x} - P_{2x} = -14,85,$$

$$Q_5 = -P + P_{1z} - P_{2z} = -11,71,$$

$$M_5 = -P \cdot 4 + P_{1z} \cdot 2 = -29,86$$

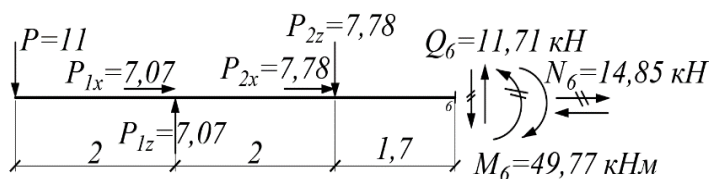


Рис.2.2.5 Переріз 6

$$N_6 = -P_{1x} - P_{2x} = -14,85, Q_6 = -P + P_{1z} - P_{2z} = -11,71,$$

$$M_6 = -P \cdot 5,7 + P_{1z} \cdot 3,7 - P_{2z} \cdot 1,7 = -49,77$$

Задача 3. Для шарнірно закріпленої балки (рис. 2.3) визначити внутрішні зусилля методом перерізів на ділянках та побудувати їх епюри.

Розв'язання. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum F_x = 0, H_a = 0;$$

$$\sum M_a = 0, V_b = 18,625 \text{ кН}$$

$$11 \cdot 1 - 15 + 8 \cdot 3 \cdot 6,5 - V_b \cdot 8 = 0;$$

$$\sum F_z = 0, V_a = 13,375 \text{ кН},$$

$$8 + 8 \cdot 3 - V_a - 18,625 = 0;$$

Перевірка: $\sum M_b = 0,$

$$8 \cdot 3 \cdot 1,5 + 15 + 8 \cdot 7 - 13,375 \cdot 8 = 0.$$

Побудова епюр внутрішніх зусиль:

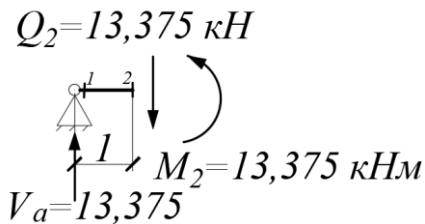


Рис.2.3.1

$$Q_2 = 13,375,$$

$$M_2 = V_a \cdot 1 = 13,375$$

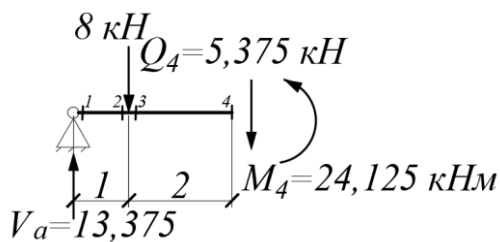


Рис. 2.3.3

$$Q_4 = 5,375,$$

$$M_4 = V_a \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 24,125$$

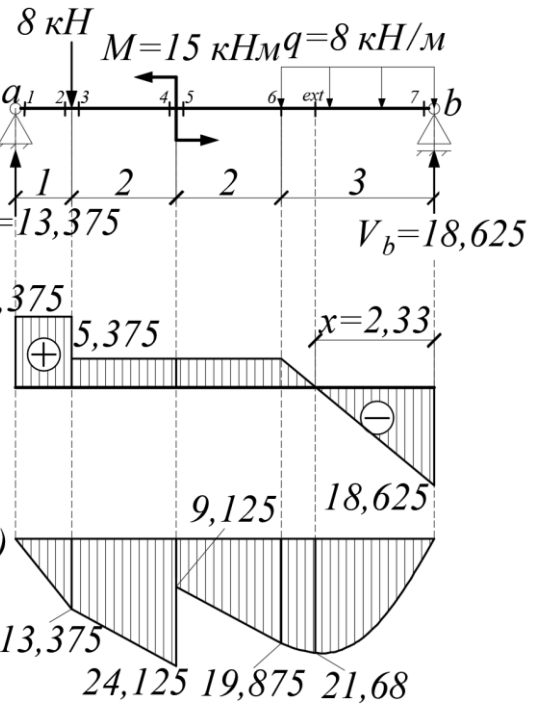


Рис. 2.3

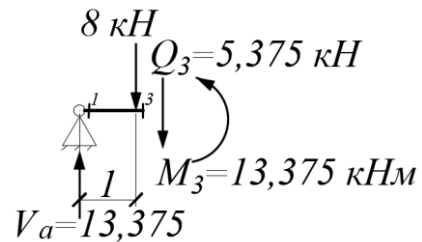


Рис. 2.3.2

$$Q_3 = 5,375,$$

$$M_3 = V_a \cdot 1 = 13,375$$

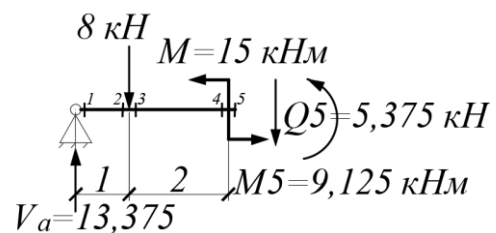


Рис. 2.3.4

$$Q_5 = 5,375,$$

$$M_5 = V_a \cdot 3 - 8 \cdot 2 - M = 9,125$$

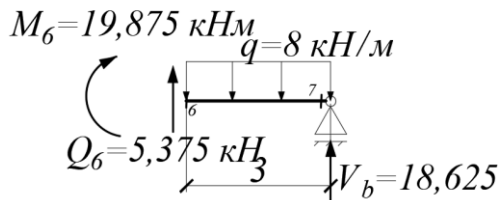


Рис. 2.3.5

$$Q_6 = -18,625 + 8 \cdot 3 = 5,375,$$

$$M_6 = V_b \cdot 3 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 19,875$$

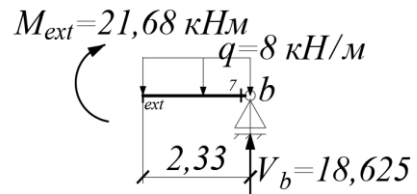


Рис. 2.3.6

$$Q_{ext} = -18,625 + 8 \cdot 2,33 = 0,$$

$$M_{ext} = V_b \cdot 2,33 - 8 \cdot 2,33 \cdot 2,33 / 2 = 21,68$$

Задача 4. Для шарнірно закріпленої балки з проміжним шарніром (рис. 2.4) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

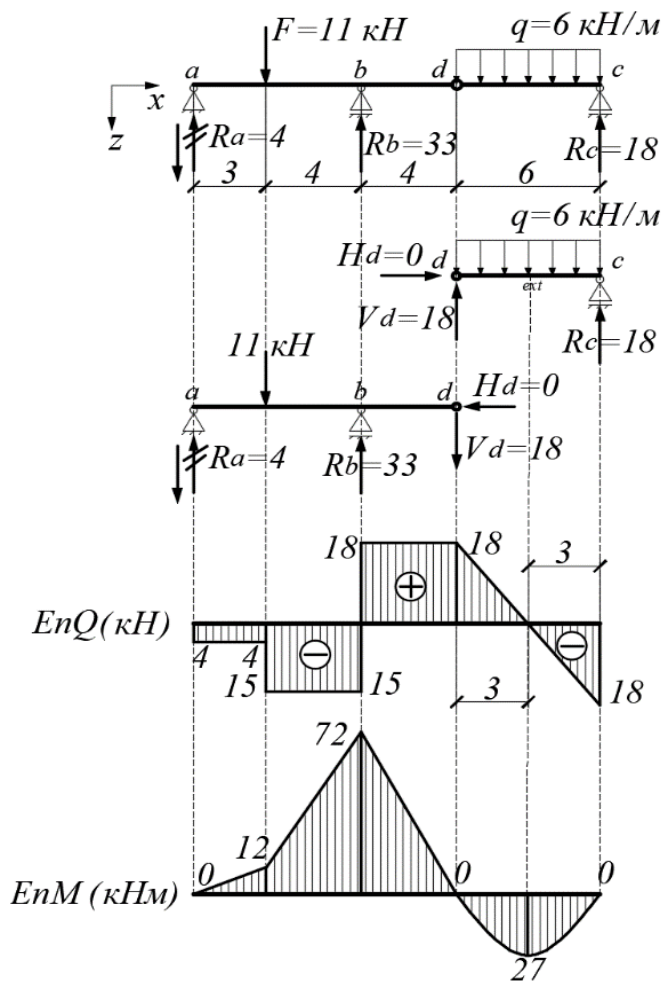


Рис.2.4

Розв'язання. В проміжному шарнірі діє поперечна сила, яку позначимо за V_d . Розрізаємо балку в шарнірі і прикладаємо до кожної з частин V_d . Записуємо рівняння рівноваги та визначаємо опорні реакції для кожної з частин (рис. 2.4).

Ділянка cd:

$$\sum M_d = 0, 6 \cdot 6 \cdot 3 - R_c \cdot 6 = 0,$$

$$R_c = 18;$$

$$\sum F_z = 0, 6 \cdot 6 - 18 - R_d = 0,$$

$$R_d = 18;$$

Ділянка ad (рис.6.17):

$$\sum M_a = 0, 11 \cdot 3 + 18 \cdot 11 - 7R_b = 0,$$

$$R_b = 33;$$

$$\sum F_z = 0, 11 + 18 - 33 - R_a = 0,$$

$$R_a = -4.$$

Перевірка: розглянемо загальну

схему (ділянку ac). $\sum M_b = 0, 6 \cdot 6 \cdot 7 - 11 \cdot 4 - 4 \cdot 7 - 18 \cdot 10 = 0.$

Побудова епюр внутрішніх зусиль:

Поперечна сила $Q(kH)$:

$$Q(0) = -4, Q(3-0) = -4, Q(3+0) = -4 - 11, Q(7-0) = -15, Q(7+0) = -15 + 33,$$

$$Q(17-0) = 18 - 6 \cdot 6, Q(17+0) = 0.$$

Згинальний момент $M(kHm)$:

$$M(0) = 0, \quad M(3) = -4 \cdot 3, \quad M(7) = -4 \cdot 7 - 11 \cdot 4, \quad M(11) = -4 \cdot 11 - 11 \cdot 8 + 33 \cdot 4, \\ M(14) = 18 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5, \quad M(17) = 0.$$

Задача 5. Для балки з защемленими кінцями та двома проміжними шарнірами (рис. 2.5) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Розв'язання. Визначаємо опорні реакції (рис.2.5):

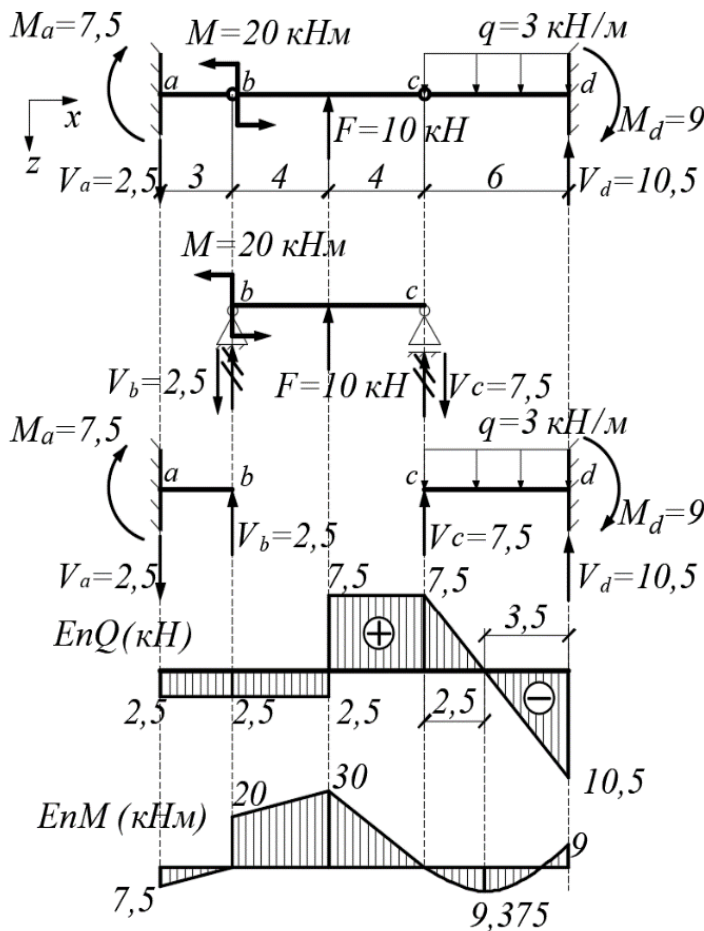


Рис. 2.5

Ділянка bc (рис.2.5):

$$\sum M_b = 0, \quad 20 + 10 \cdot 4 + V_c \cdot 8 = 0, \\ V_c = -7,5; \\ \sum F_z = 0, \quad -10 + 7,5 - V_c = 0, \\ V_b = -2,5$$

Ділянка ab : значення реакцій в шарнірі т.б переносимо з ділянки bc , направлені в протилежну сторону.

$$\sum M_a = 0, \quad M_a - 2,5 \cdot 3 = 0, \\ M_a = 7,5; \\ \sum F_z = 0, \quad -2,5 + V_a = 0, \quad V_a = 2,5.$$

Ділянка cd : значення реакцій в шарнірі т.с переносимо з ділянки bc , направлені в протилежну сторону. $\sum M_d = 0, \quad M_d = 9, \\ -M_d + 3 \cdot 6 \cdot 3 - 7,5 \cdot 6 = 0, \\ \sum F_z = 0, \quad -7,5 - V_d + 3 \cdot 6 = 0, \\ V_d = 10,5.$

Перевірка: розглянемо загальну схему (ділянку ad):

$$\sum M_a = 0, \quad -7,5 + 20 + 10 \cdot 7 - 3 \cdot 6 \cdot 14 - 9 + 10,5 \cdot 17 = 0.$$

Побудова епюр внутрішніх зусиль (рис.2.5). Поперечна сила $Q(kH)$:

$$Q(0) = -2,5, \quad Q(3) = -2,5, \\ Q(7-0) = -2,5, \quad Q(7+0) = -2,5 + 10, \quad Q(11) = 7,5, \quad Q(17) = 7,5 - 3 \cdot 6.$$

Згинальний момент $M(kHm)$:

$$M(0)_{(ab)} = 7,5, \quad M(3)_{(ab)} = 7,5 - 2,5 \cdot 3, \quad M(7)_{(bc)} = -2,5 \cdot 4 - 20,$$

$$M(11)_{(bc)} = -2,5 \cdot 8 - 20 + 10 \cdot 4, \quad M(13,5)_{(cd)} = 7,5 \cdot 2,5 - 3 \cdot 2,5 \cdot 1,25,$$

$$M(17)_{(cd)} = 7,5 \cdot 6 - 3 \cdot 6 \cdot 3.$$

Задача 6. Для шарнірно закріпленої балки з похилими опорами (рис. 2.6) побудувати епюри внутрішніх зусиль

Розв'язання. Визначаємо опорні реакції (рис.2.6): $\sum M_K = 0$, $R_b = 12,702$
 $-40 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 4,5 - R_b \cdot \sin(60) \cdot 3 - R_b \cdot \cos(60) \cdot 6 \cdot \operatorname{tg}(30) = 0;$ $\sum F_x = 0$,
 $-6,35 + R_c \cdot \cos(30) = 0$, $R_c = 7,33;$ $\sum F_z = 0$, $R_a = -24,67$
 $R_a - 40 + 10 \cdot 3 - 11 - 3,67 = 0;$

Перевірка: $\sum M_b = 0$, $24,67 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - 40 \cdot 1 + 3,67 \cdot 3 = 0$.

Побудова епюр внутрішніх зусиль (рис.6.23). Поздовжня сила $N(kH)$:

$$N(0) = N(3-0) = 0, \quad N(3+0) = 6,35, \quad N(6) = 6,35.$$

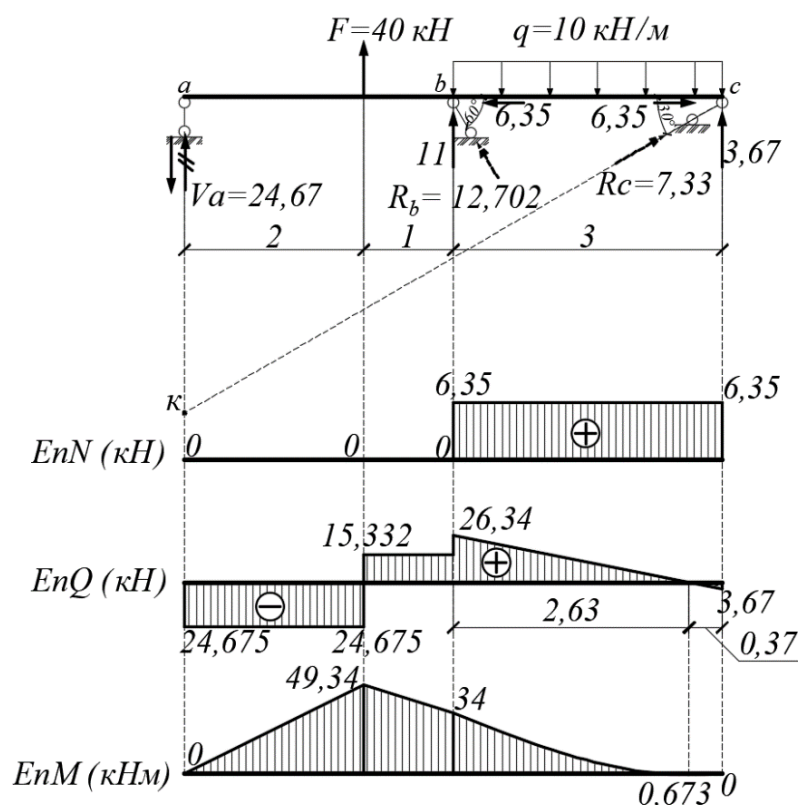


Рис.2.6

Поперечна сила $Q(kH)$:

$$Q(0) = -24,67,$$

$$Q(2-0) = -24,67,$$

$$Q(2+0) = -24,67 + 40,$$

$$Q(3-0) = -24,67 + 40,$$

$$Q(3+0) = -24,67 + 40 + 11,$$

$$Q(6) = 40 - 24,67 + 11 - 10 \cdot 3.$$

Згинальний момент

$$M(kHm): M(0) = 0,$$

$$M(2) = -24,67 \cdot 2,$$

$$M(3) = -24,67 \cdot 3 + 40 \cdot 1,$$

$$M(5,63) = -24,67 \cdot 5,63 + 40 \cdot 3,63 + 11 \cdot 2,63 - 10 \cdot 2,63 \cdot 2,63 / 2$$

Задача 7. Для шарнірно закріпленої рами (рис. 2.7) побудувати епюри внутрішніх зусиль

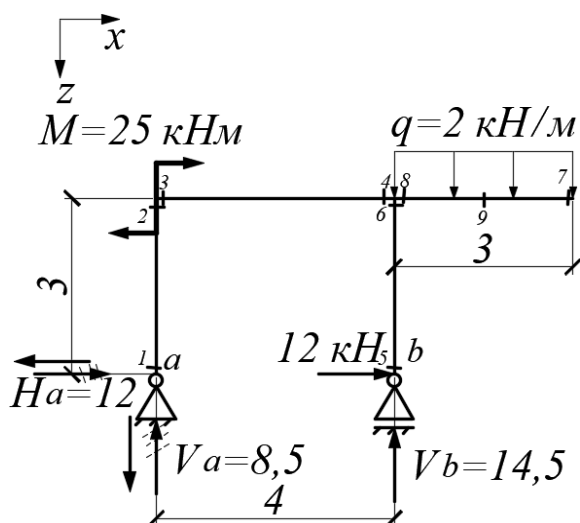


Рис.2.7

Розв'язання. Визначаємо опорні реакції (рис.2.7):

$$\sum M_a = 0, -25 - 2 \cdot 3 \cdot 5,5 + V_b \cdot 4 = 0;$$

$$V_b = 14,5;$$

$$\sum F_x = 0, 12 + H_a = 0, H_a = -12;$$

$$\sum F_z = 0, V_a + 14,5 - 2 \cdot 3 = 0, V_a = -8,5.$$

Перевірка: $\sum M_b = 0,$

$$8,5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 25 = 0.$$

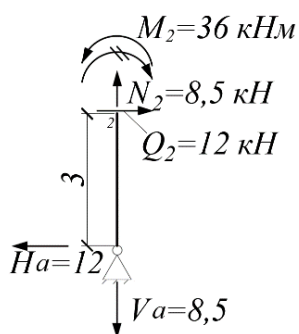


Рис.2.7.1 Переріз 2

$$\sum F_z = 0, 8,5 - N_2 = 0, N_2 = 8,5$$

$$\sum F_x = 0, -12 + Q_2 = 0, Q_2 = 12,$$

$$\sum M_2 = 0, -M_2 - 12 \cdot 3 = 0, M_2 = -36.$$

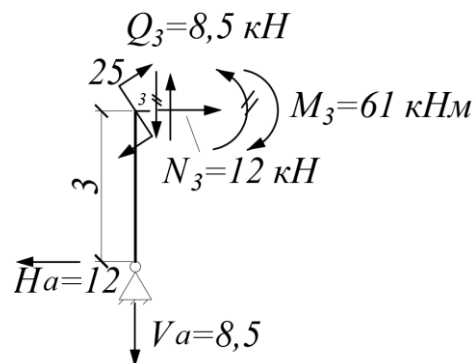


Рис. 2.7.2 Переріз 3

$$\sum F_x = 0, -12 + N_3 = 0, N_3 = 12,$$

$$\sum F_z = 0, 8,5 + Q_3 = 0, Q_3 = -8,5$$

$$\sum M_3 = 0, M_3 - 12 \cdot 3 - 25 = 0,$$

$$M_3 = 12 \cdot 3 + 25 = 61$$

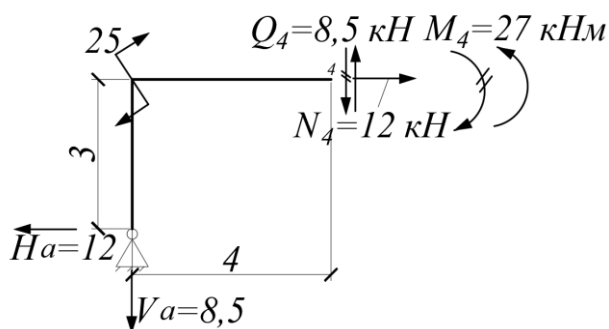


Рис. 2.7.3 Переріз 4

$$\sum F_x = 0, -12 + N_4 = 0, N_4 = 12$$

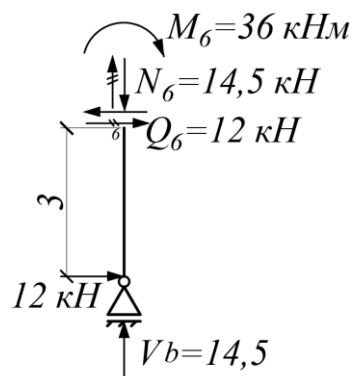


Рис. 2.7.4 Переріз 6

$$\sum F_z = 0, -14,5 - N_6 = 0, N_6 = -14,5$$

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0, 8,5 + Q_4 = 0, Q_4 = -8,5, \\ \sum M_4 &= 0, M_4 + 12 \cdot 3 + 25 - \\ &- 8,5 \cdot 4 = 0, M_4 = -27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, 12 + Q_6 = 0, Q_6 = -14,5 \\ \sum M_6 &= 0, M_6 - 12 \cdot 3 = 0, M_6 = 36\end{aligned}$$

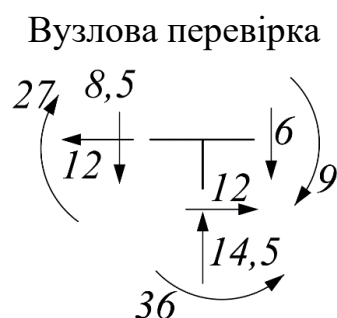
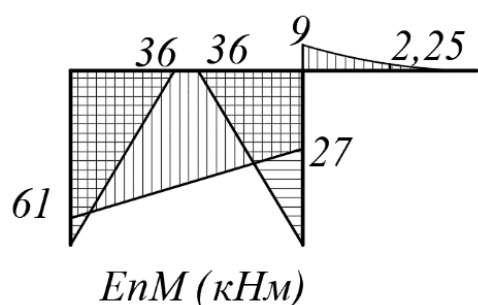
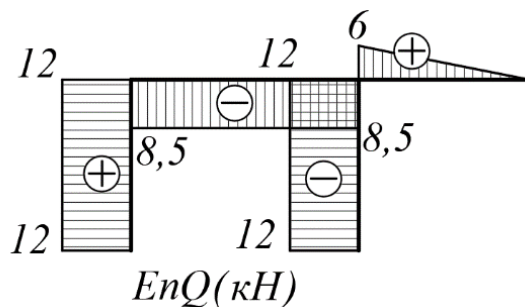
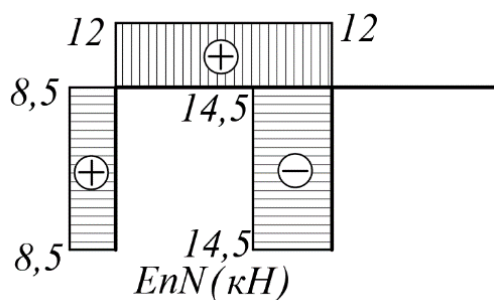


Рис. 2.7.5. Епюри внутрішніх зусиль та вузлова перевірка

Задача 8. Для заданого плоского криволінійного стержня під дією плоскої системи сил (рис. 2.8) побудувати епюри поздовжньої сили N , поперечної сили Q та згинального моменту M .

Розв'язання. Вводимо полярну систему координат з нульовою віссю OB . Робимо умовний переріз та прикладаємо невідомі внутрішні зусилля $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$. Розбиваємо стержень на ділянки та для кожної з них записуємо рівняння рівноваги:

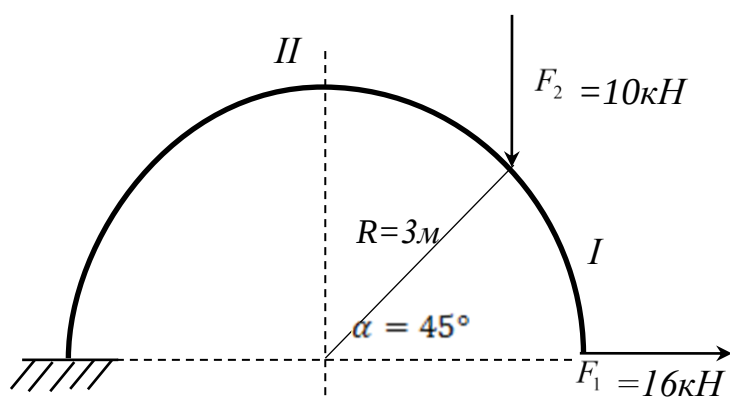


Рис. 2.8

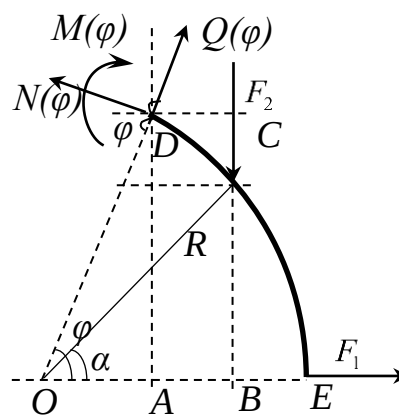


Рис. 2.8.1

$$\text{I) } 0 \leq \varphi < \alpha: \quad -N_I(\varphi) + F_1 \sin \varphi = 0, \quad Q_I(\varphi) + F_1 \cos \varphi = 0, \\ -M_I(\varphi) + F_1 \cdot EA = 0, \quad EA = OE \sin \varphi = R \sin \varphi;$$

$$\text{Маємо } N_I(\varphi) = F_1 \sin \varphi, \quad Q_I(\varphi) = -F_1 \cos \varphi, \quad M_I(\varphi) = F_1 R \sin \varphi.$$

$$\text{II) } \alpha < \varphi < \pi: \quad -N_{II}(\varphi) + F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi = 0, \quad Q_{II}(\varphi) + F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi = 0, \\ -M_{II}(\varphi) + F_1 \cdot EA - F_2 \cdot DC = 0, \quad DC = OB - OA = R \cos \alpha - R \cos \varphi;$$

$$\text{Маємо: } N_{II}(\varphi) = F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi, \quad Q_{II}(\varphi) = -F_1 \cos \varphi + F_2 \sin \varphi,$$

$$M_{II}(\varphi) = F_1 R \sin \varphi - F_2 R (\cos \alpha - \cos \varphi).$$

Обчислюємо значення внутрішніх зусиль з кроком $\pi / 6$, включаючи кут α , та заповнюємо таблицю:

φ	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$N(\varphi)$	$Q(\varphi)$	$M(\varphi)$
$0 \leq \varphi < \alpha$			$16 \sin \varphi$	$-16 \cos \varphi$	$48 \sin \varphi$
0	1	0	0	-16	0
30°	$0,866$	$0,5$	8	$-13,9$	24
45°	$0,707$	$0,707$	$11,3$	$-11,3$	$33,9$
$\alpha < \varphi < \pi$			$16 \sin \varphi +$ $+10 \cos \varphi$	$-16 \cos \varphi +$ $+10 \sin \varphi$	$48 \sin \varphi -$ $-30(\cos 45^\circ - \cos \varphi)$
45°	$0,707$	$0,707$	$18,4$	$-4,2$	$33,9$
60°	$0,5$	$0,866$	$18,9$	$0,7$	$35,4$
90°	0	1	16	10	$26,8$
120°	$-0,5$	$0,866$	$8,9$	$16,7$	$5,4$
150°	$-0,866$	$0,5$	$-0,7$	$18,9$	$-23,2$
180°	-1	0	-10	16	$-51,2$

По знайдених значеннях будемо епюри:

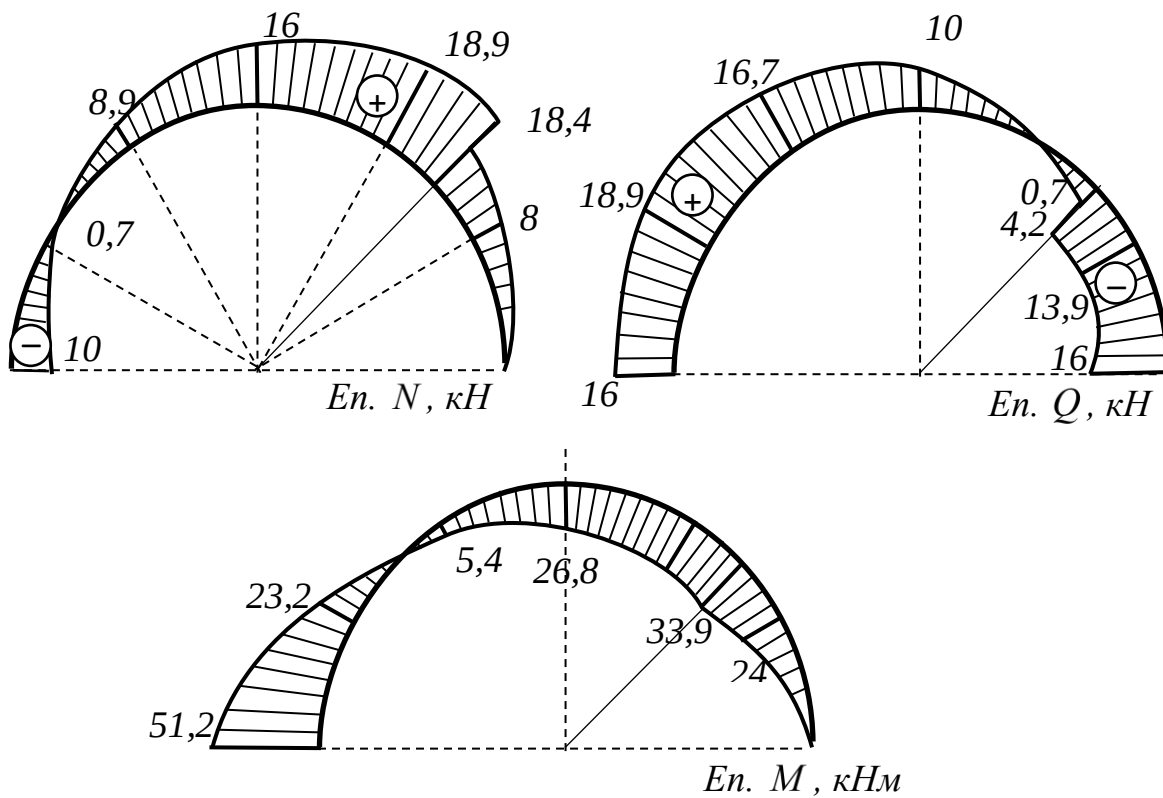


Рис. 2.8.2

Задача 9. Для заданої плоскої рами під дією вертикального навантаження (рис. 2.9) побудувати епюри поперечної сили Q , згинального моменту M та крутного моменту $M_{кр}$.

Розв'язання. Оскільки навантаження прикладене перпендикулярно до площини рами, то горизонтальні реакції в шарнірних закріпленнях нульові. Для знаходження вертикальних реакцій R_A , R_B , R_C записуємо рівняння рівноваги в вигляді суми моментів всіх сил відносно осей, що співпадають з стержнями системи. Для цього вводимо нумерацію точок рами (рис. 3.17).

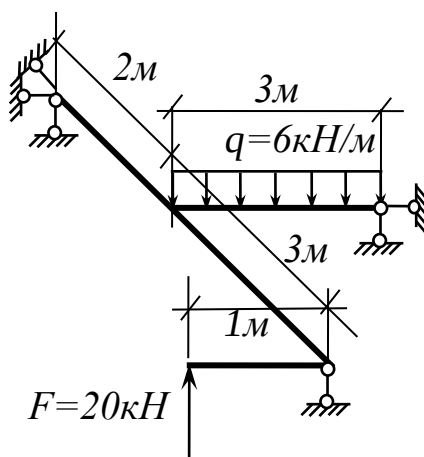


Рис. 2.9

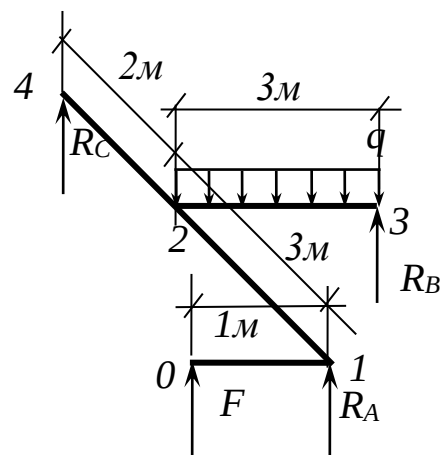


Рис. 2.9.1

Знаходження реакцій в'язей:

$$\sum M_{1-4} = 0: -F \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = 0 \rightarrow R_B = \frac{20 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 15,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_{0-1} = 0: q \cdot 3 \cdot 3 - R_B \cdot 3 - R_C \cdot 5 = 0 \rightarrow R_C = \frac{6 \cdot 3 \cdot 3 - 15,67 \cdot 3}{5} = 1,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_{2-3} = 0: F \cdot 3 + R_A \cdot 3 - R_C \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = \frac{-20 \cdot 3 + 1,4 \cdot 2}{3} = -19,07 \text{ кН}.$$

Перевіряємо рівновагу системи:

$$\sum F_z = 0: R_A + R_B + R_C + F - q \cdot 3 = -19,07 + 15,67 + 1,4 + 20 - 6 \cdot 3 = 0.$$

Для кожного з стержнів системи знаходимо внутрішні зусилля:

Стержень 0-1: $Q_{0-1} = F = 20 \text{ кН}$, $M_0 = 0$, $M_1 = F \cdot 1 = 20 \text{ кНм}$, $M_{кр0-1} = 0$.

Стержень 1-2: $Q_{1-2} = F + R_A = 20 - 19,07 = 0,93 \text{ кН}$,

$M_1 = 0$, $M_2 = (F + R_A) \cdot 3 = 2,8 \text{ кНм}$, $M_{кр1-2} = -F \cdot 1 = -20 \text{ кНм}$.

Стержень 3-2: $Q_3 = -R_B = -15,67 \text{ кН}$, $Q_3 = q \cdot 3 - R_B = 6 \cdot 3 - 15,67 = 2,33 \text{ кН}$,

$a_{ext} = 15,67 / 6 = 2,6 \text{ м}$,

$M_3 = 0$, $M_2 = R_B \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 15,67 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 20 \text{ кНм}$,

$M_{ext} = 15,67 \cdot 2,6 - 6 \cdot 2,6^2 / 2 = 20,46 \text{ кНм}$, $M_{кр3-2} = 0$.

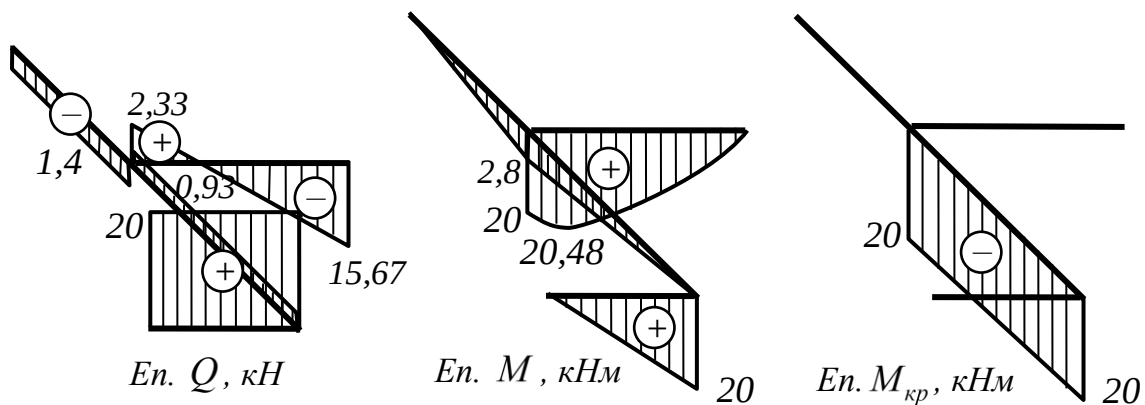


Рис. 3.18

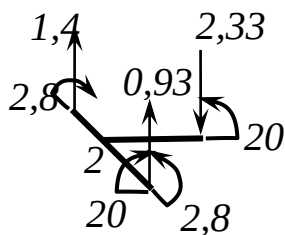


Рис. 3.19

Стержень 4-2: $Q_{4-2} = R_C = 1,4 \text{ кН}$,

$M_4 = 0$, $M_2 = R_C \cdot 2 = 1,4 \cdot 2 = 2,8 \text{ кНм}$,

$M_{кр4-2} = 0$.

Отримані значення наносимо на епюри (рис. 3.18). По епюрах перевіряємо рівновагу вузла 2 (рис. 3.19).

3. Завдання до самостійної роботи

Розрахунково-графічна робота №2.

Побудова епюр внутрішніх зусиль.

Задача 1. Для заданого консольного стержня (додаток 3) побудувати епюри методом перерізів. Підібрати круглий дерев'яний поперечний переріз при $\sigma_{adm}=10\text{МПа}$.

Задача 2. Для заданого шарнірно закріпленого стержня (додаток 4) побудувати епюри методом “по точках”. Підібрати прямокутний дерев'яний поперечний переріз при $\sigma_{adm}=10\text{МПа}$.

Задача 3. Для балки з похилим навантаженням (додаток 5) побудувати епюри внутрішніх зусиль. Перевірити міцність заданого двотавра при $\sigma_{adm}=160\text{МПа}$

Задача 4. Дано балку з похилими опорами (додаток 6). Побудувати епюри внутрішніх зусиль.

Задача 5. Для балки з проміжним шарніром (додаток 7) побудувати епюри внутрішніх зусиль. Підібрати поперечний переріз з двох швелерів при $\sigma_{adm}=160\text{МПа}$

Задача 6. Побудувати епюри внутрішніх зусиль для плоскої шарнірно закріпленої рами (додаток 8).

Задача 7. Побудувати епюри внутрішніх зусиль для плоского шарнірно закріпленого криволінійного стержня (додаток 9).

Таблиця вхідних даних до задач № 1-7

Цифра шифру	Перша цифра			Друга цифра		Третя цифра		
	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$P, кН$	$M, кНм$	$q, кН/м$	Кут α	Схема
1	3	3,2	2	12	8	10	20°	1
2	3,6	2	3	16	7	3	25°	2
3	2,4	3	2	15	6	4	30°	3
4	2	3,2	3	18	5	5	35°	4
5	3,2	2	4	14	9	6	40°	5
6	2,4	2	4	25	10	7	45°	6
7	1,6	3	2	8	11	8	50°	7
8	3,6	2	2	13	8	9	55°	8
9	2,4	1,6	4	11	7	10	60°	9
0	3	3,2	3	10	6	8	65°	0

Додаток 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

20__ - 20__ навчальний рік

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №

(назва роботи)

Шифр _____

Факультет _____

Курс _____

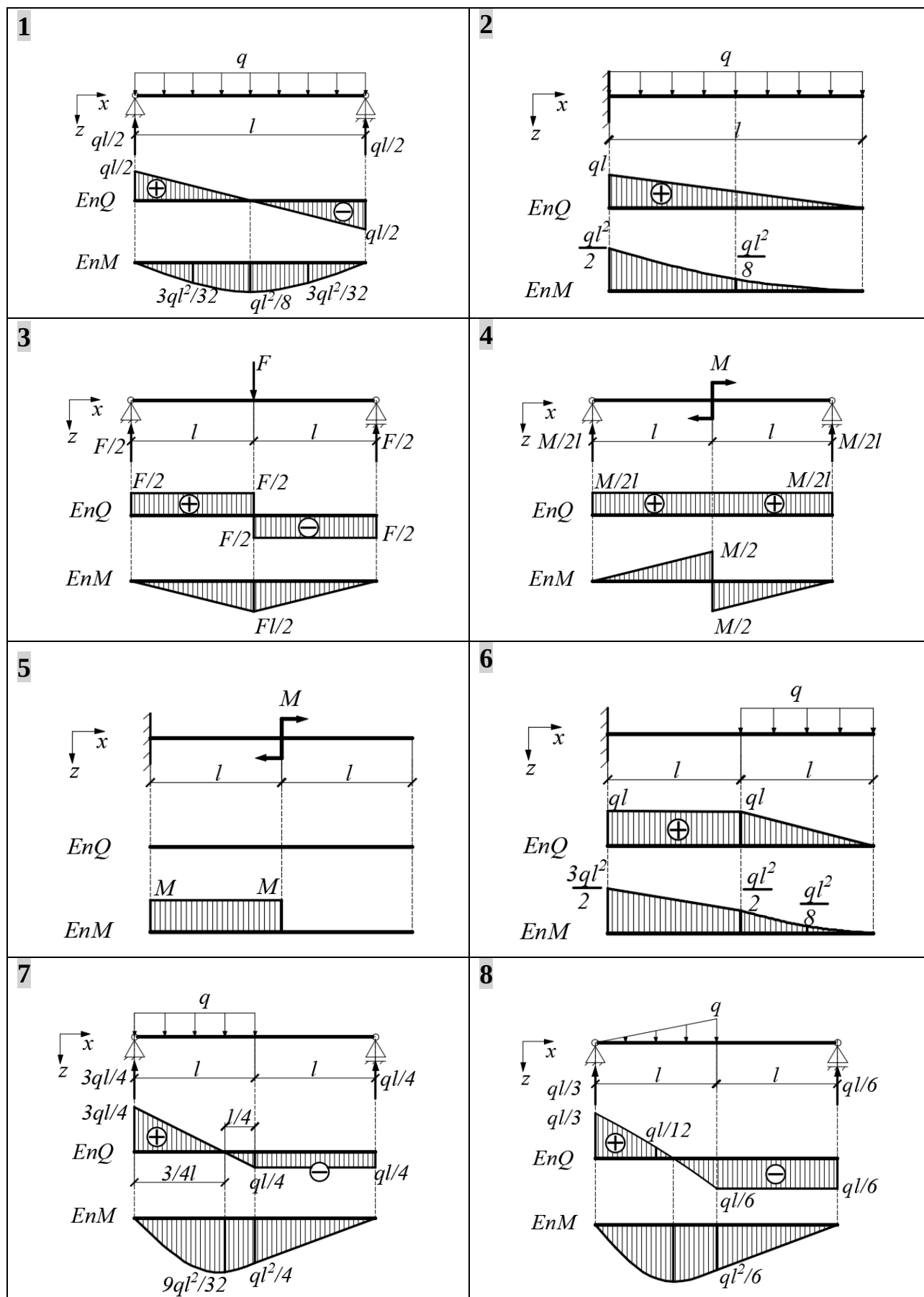
Група _____

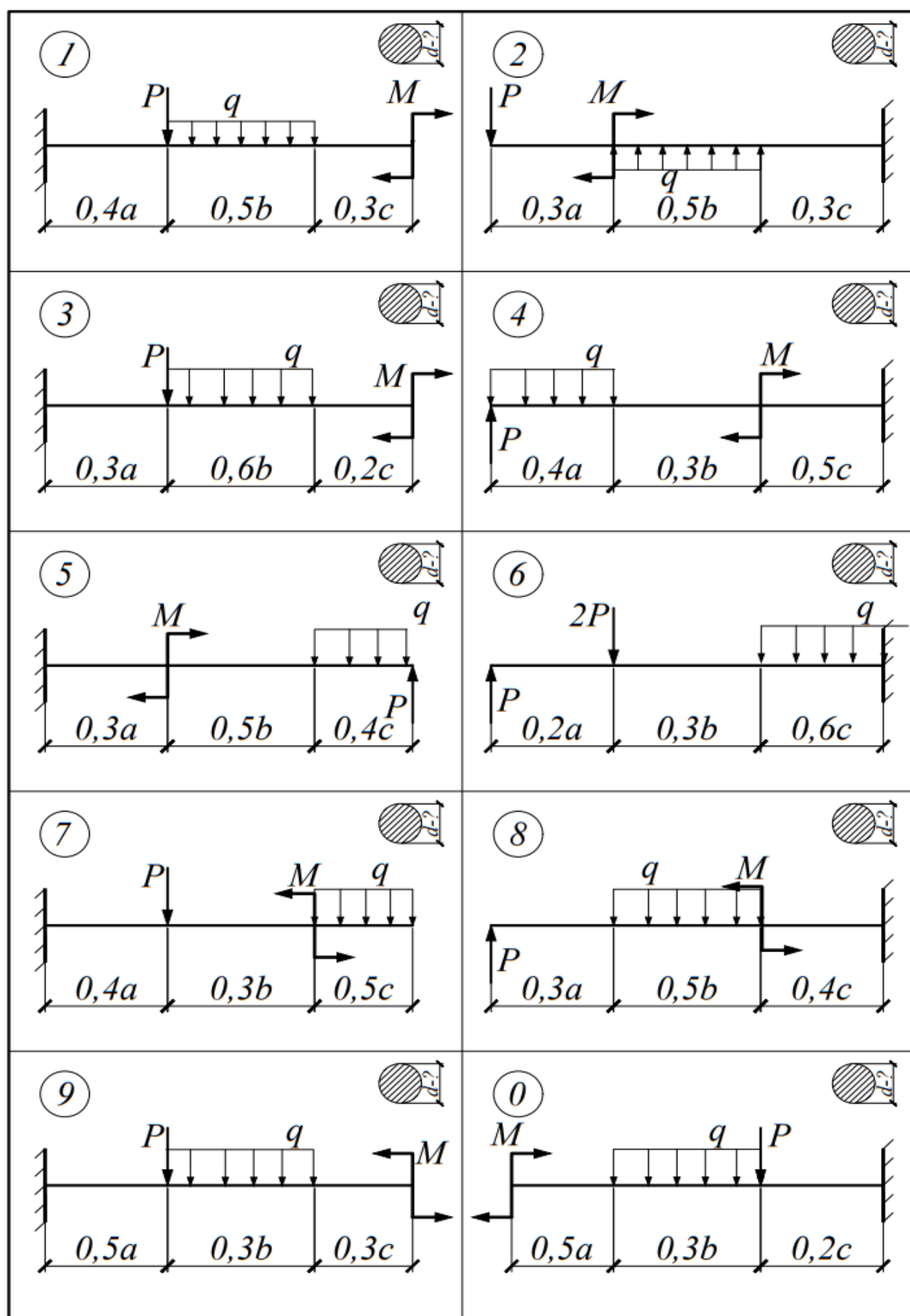
Студент (П.І.Б.) _____

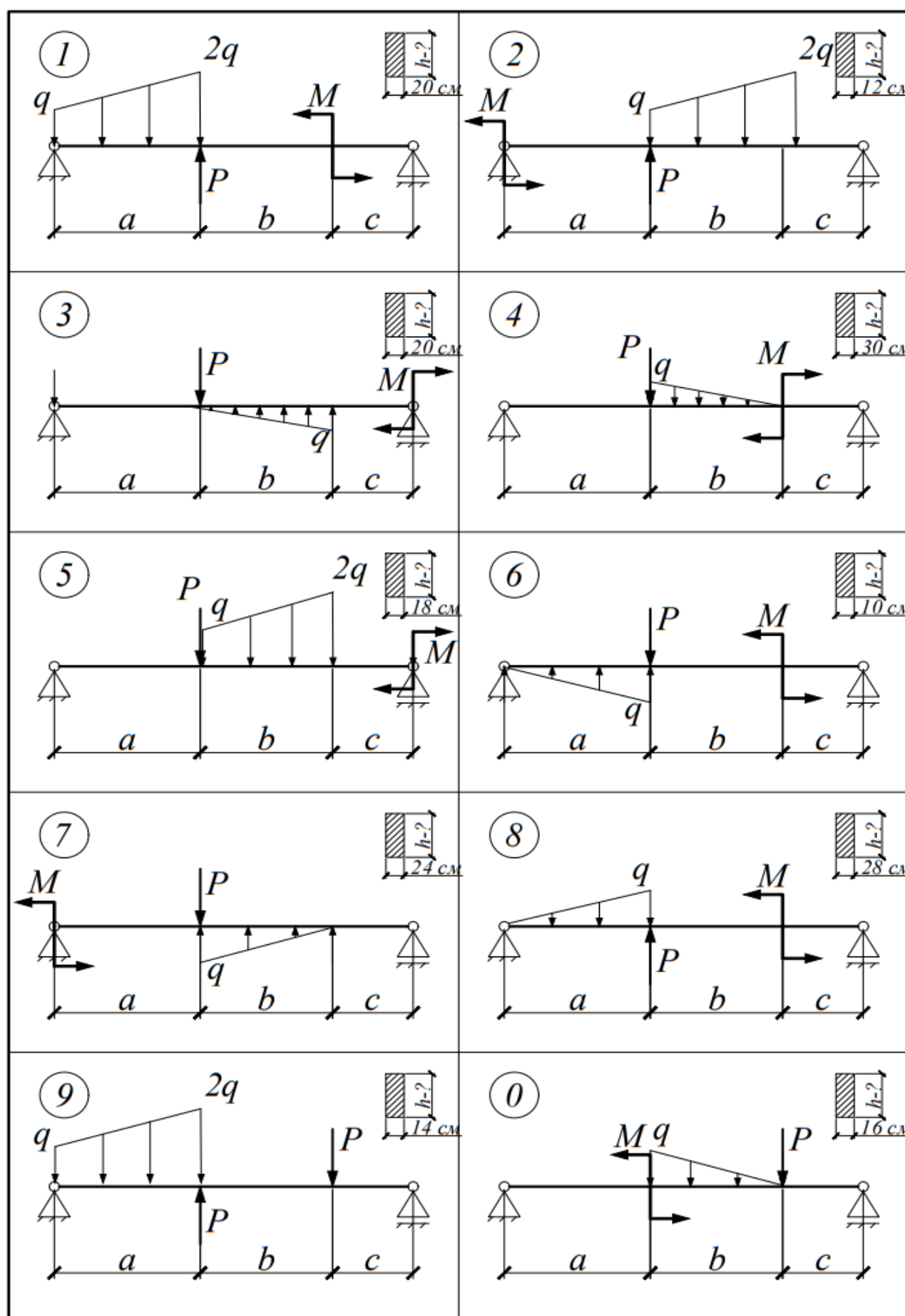
Керівник (П.І.Б.) _____

Дата здачі завдання _____

Оцінка _____



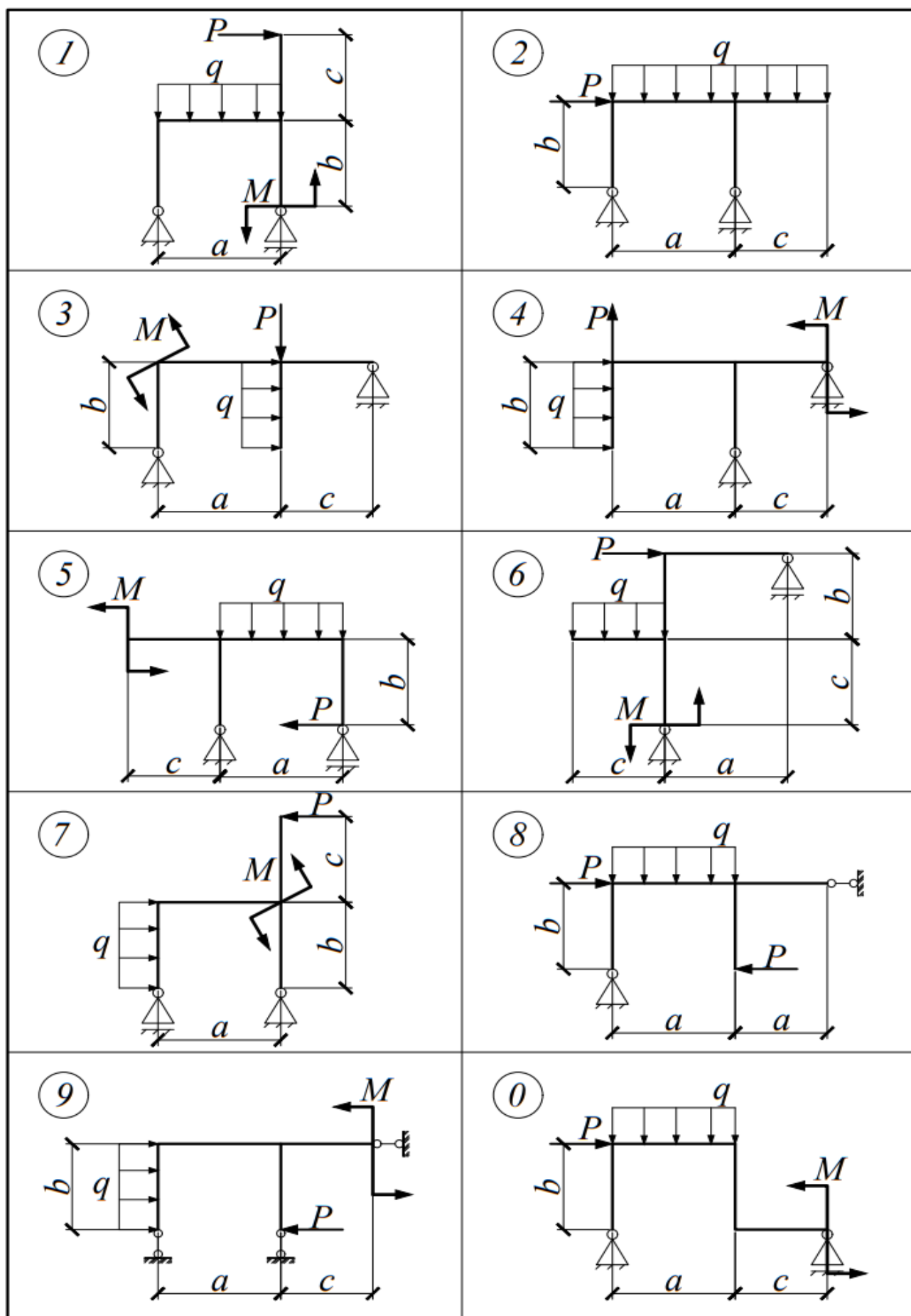


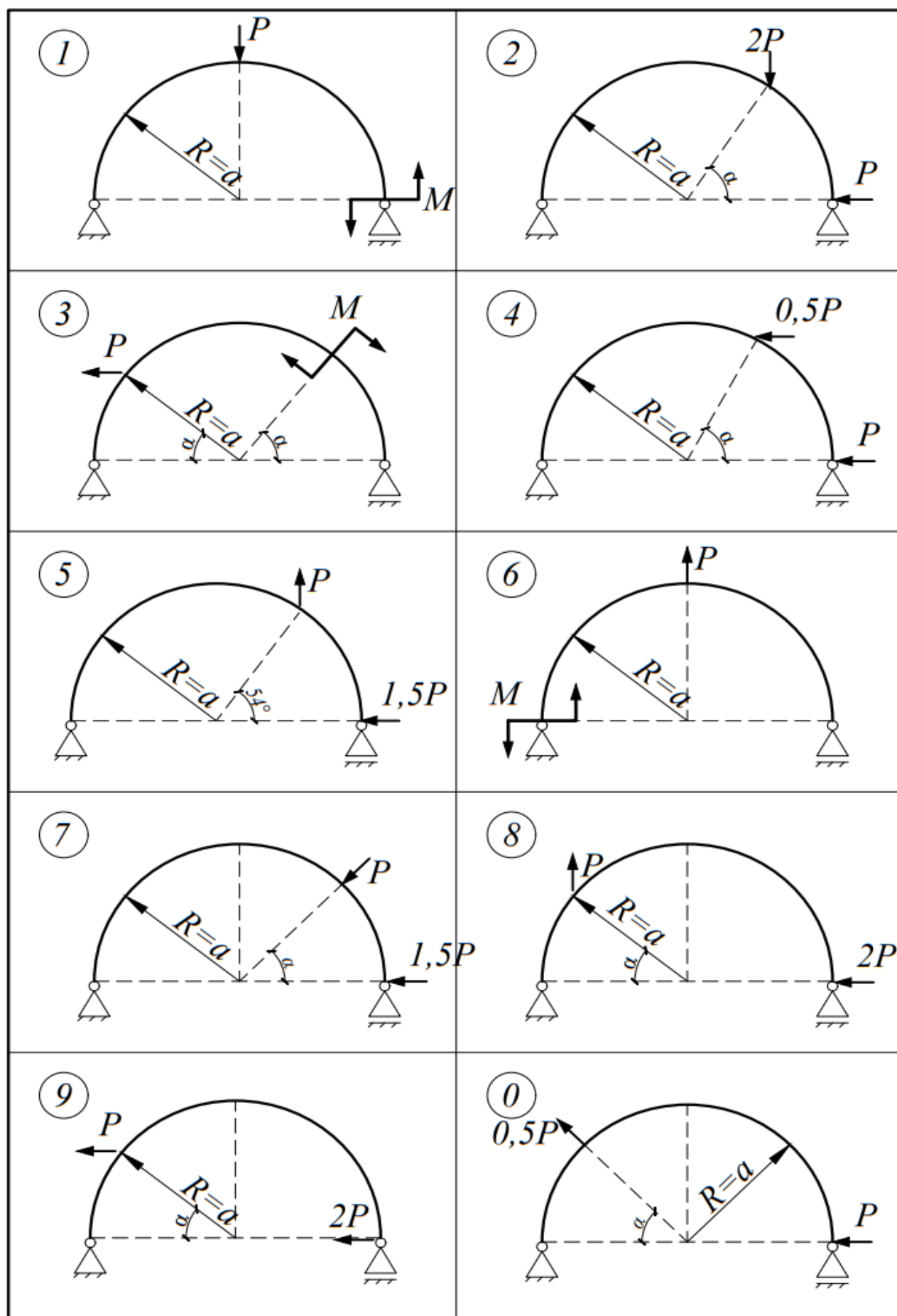


1 $\text{I}_{\text{№}18}$	2 $\text{I}_{\text{№}20}$
3 $\text{I}_{\text{№}22}$	4 $\text{I}_{\text{№}24}$
5 $\text{I}_{\text{№}27}$	6 $\text{I}_{\text{№}30}$
7 $\text{I}_{\text{№}33}$	8 $\text{I}_{\text{№}36}$
9 $\text{I}_{\text{№}16}$	0 $\text{I}_{\text{№}18}$

1	2
3	4
5	6
7	8
9	0

1	2
3	4
5	6
7	8
9	0





Рекомендована література

Підручники:

1. *Писаренко, Г. С.* та ін. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С. Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ: Вища шк., 2004. – 655с.
2. *Шкельов Л.Т.* Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
3. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1995.

Навчальні посібники:

4. *О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський.* Опір матеріалів в Темах і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБА; –Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340с. ISBN 978-617-7626-86-1
5. *Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий.* Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с. ISBN 978-617-520-044-5
6. *Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб.* / П.О. Іваненко, Л.О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. За ред. П.О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с. ISBN 978-617-520-163-3

Додаткові джерела:

7. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; за ред. М. І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. □399 с.
8. Hibbeler, R.C. Mechanics of materials / R.C. Hibbeler. Tenth edition. –NJ: Pearson, 2015. – 900 p.– ISBN 9780134319650
9. Серія відеоуроків та лабораторних робіт з опору матеріалів на Youtube
10. https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB_rA ,
https://youtu.be/tibdfе_Q2s8
11. Освітній сайт КНУБА. Курс для дистанційного навчання «Опір матеріалів. ПЦБ» <https://org2.knuba.edu.ua/course/view.php?id=2036>