

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПІР МАТЕРІАЛІВ.

Геометричні характеристики поперечних перерізів.

Розтяг та стиск стержнів.

Методичні рекомендації

до виконання розрахунково-графічної роботи №1

*Для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія»
ОП «Міське будівництво і господарство»*

Київ 2023

Укладачі: Д.В. Левківський, канд. техн. наук., доцент

М.В. Лазарева, канд. техн. наук., доцент

М.О. Янсонс

В.О. Кошева канд. техн. наук., доцент

Рецензент: Л.О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук., доцент

Відповідальний за випуск: Д.В. Левківський, канд. техн. наук

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 3 від
23 листопада 2022 року*

Опір матеріалів. Розтяг та стиск стержнів. Геометричні характеристики поперечних перерізів. Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи №1. Уклад.: Д.В. Левківський, М.В. Лазарева, М.О. Янсонс, В.О. Кошева . – Київ.: КНУБА, 2023. – 25 с.

Містять зміст, теоретичні відомості, приклади та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи №1 з опору матеріалів Для студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Міське будівництво і господарство» та приклади оформлення звітів.

Зміст

Загальні вказівки.....	4
1. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	5
Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного перерізу.....	8
Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик несиметричного складного перерізу.....	10
2. Розтягування (стискування) стержнів.....	15
Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони.....	17
Задача 2.2. Розрахунок статично-визначеної стержневої системи.....	19
Список рекомендованої літератури.....	45
Додатки.....	46

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням розрахунково-графічних робіт необхідно опрацювати теоретичні відомості і методи розв'язання задач, стисло наведені в тексті методичних рекомендацій. Відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів більш широко викладено в підручниках, вказаних в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови задач наведені в тексті методичних вказівок і в додатках.

При оформленні розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок. Розрахунки на кожному окремому етапі оформлюються в такій послідовності: розрахункова формула, підстановка в неї конкретних даних, остаточний результат і одиниця розмірності величини. Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ. Кожен окремий етап розрахунку повинен мати заголовок. Розв'язання задач оформлюється на стандартних аркушах паперу формату А4, текст і розрахунки повинні бути написані акуратно і без помарок. Графічні ілюстрації виконуються з дотриманням масштабу і нанесенням всіх необхідних розмірів. До кожної РГР додається титульний лист, зразок якого приведений у дод. 1. При здачі РГР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. Наступна робота приймається після здачі попередньої.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні. До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

1. Геометричні характеристики плоских перерізів.

Теоретичні відомості.

Основними геометричними характеристиками плоского перерізу, віднесеного до правосторонньої системи координат yOz , є:

– площа $A = \iint da$;

- статичні моменти $S_y = \iint z dA$, $S_z = \iint y dA$;
- осьові моменти інерції $I_y = \iint z^2 dA$, $I_z = \iint y^2 dA$;
- відцентровий момент інерції $I_{yz} = \iint yz dA$.

В полярній системі координат r, φ вводиться полярний момент інерції $I_p = \iint r^2 dA$.

Центр ваги перерізу знаходиться в точці C з координатами

$$c_y = S_z / A, \quad c_z = S_y / A. \quad (1.1)$$

Координатні вісі y_c, z_c , що проходять через центр ваги перерізу, називаються *центральною вісями*. Статичні моменти відносно центральних вісей $S_y = S_z = 0$.

При паралельному переносі системи координат

$$y = y_c + c_y, \quad z = z_c + c_z \quad (1.2)$$

моменти інерції плоскої фігури в новій системі координат визначаються за формулами

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + c_z^2 A, & I_z &= I_{z_c} + c_y^2 A, \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + c_y c_z A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При повороті системи координат на кут α проти годинникової стрілки

$$\bar{y} = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad \bar{z} = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (1.4)$$

моменти інерції перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{z}} &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система координат u, v , з початком в центрі ваги перерізу, в якій відцентровий момент інерції $I_{uv} = 0$, називається *головною центральною системою координат*. Її положення відносно вихідної центральної системи координат $y_c z_c$ визначається кутом α_0

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (1.6)$$

Якщо $I_y = I_z$, то або всі вісі головні (при $I_{yz} = 0$) або $\alpha_0 = \pi/4$ (при $I_{yz} \neq 0$). Після визначення кута α_0 головні осьові моменти інерції I_u , I_v знаходяться за першими двома формулами (1.5). Третє рівняння (1.5) можна використовувати для перевірки.

Осьові моменти інерції в головній системі координат набувають екстремальних значень (найбільше і найменше з усіх можливих). Ці величини визначаються з квадратного рівняння і дорівнюють

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (1.7)$$

Головні радіуси інерції i_u та i_v визначаються за формулами

$$i_u = \sqrt{I_u / A}, \quad i_v = \sqrt{I_v / A}. \quad (1.8)$$

За їх допомогою будується еліпс інерції

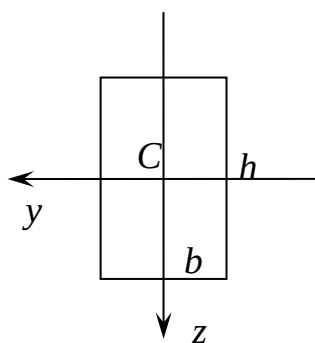
$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (1.9)$$

Головні моменти опору визначаються за формулами

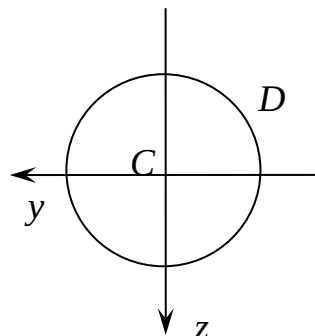
$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}, \quad (1.10)$$

де $u_{\max}$, $v_{\max}$ – відповідно відстані до найвіддаленіших точок від осей v та u .

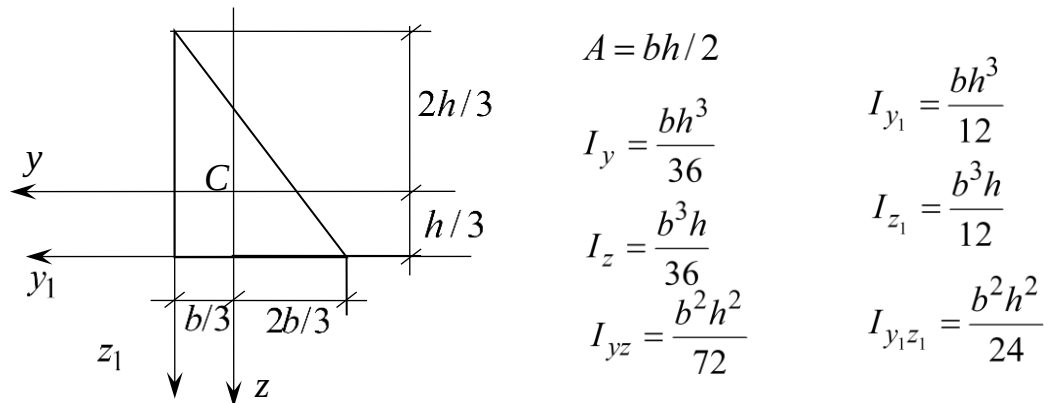
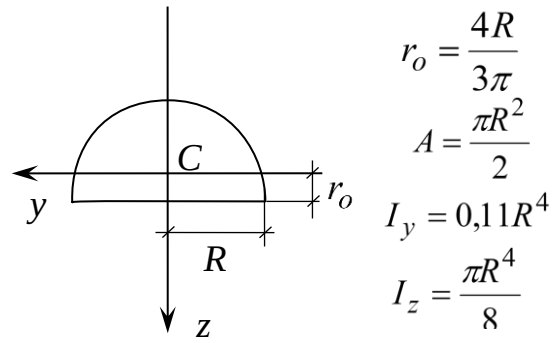
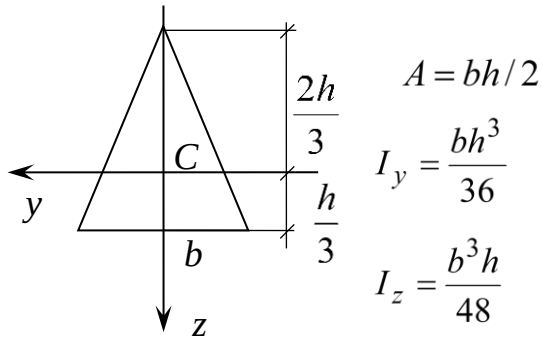
Геометричні характеристики простих фігур. Для багатьох фігур головні центральні координати, площа і моменти інерції визначені шляхом інтегрування по площі і приведені в навчальній та довідниковій літературі. Для найпростіших фігур маємо наступні характеристики:



$$\begin{aligned} A &= bh \\ I_y &= \frac{bh^3}{12} \\ I_z &= \frac{b^3h}{12} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi D^2}{4} \\ I_y &= I_z = \frac{\pi D^4}{64} \\ I_p &= \frac{\pi D^4}{32} \end{aligned}$$



Для прокатних балок (двотавр, швелер, кутик) геометричні характеристики беруться з таблиць сортаменту.

Для складних перерізів координати центру ваги $C(C_{0y}, C_{0z})$ в довільній початковій системі координат y_0, z_0 знаходяться за формулами

$$C_{0y} = \frac{\sum y_{0i} A_i}{A}, \quad C_{0z} = \frac{\sum z_{0i} A_i}{A}, \quad A = \sum A_i, \quad (1.11)$$

де y_{0i}, z_{0i} – координати центру ваги i -тої фігури, A – загальна площа перерізу.

Вводимо центральну систему координат yCz , паралельну до y_0, z_0 , та знаходимо координати центрів ваги складових фігур за формулами паралельного переносу:

$$c_{yi} = y_{0i} - C_{0y}, \quad c_{zi} = z_{0i} - C_{0z}. \quad (1.12)$$

Моменти інерції для складного перерізу обчислюються за формулами

$$I_y = \sum (I_{yi} + c_{zi}^2 A_i), \quad I_z = \sum (I_{zi} + c_{yi}^2 A_i),$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_1z_1} + c_{yi} c_{zi} A_i). \quad (1.13)$$

В формулах (1.11), (1.13) площа та моменти інерції для “вирізаних” складових перерізу беруться зі знаком “мінус”.

Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного поперечного перерізу

Для заданого поперечного перерізу визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції та моменти опору. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 4.

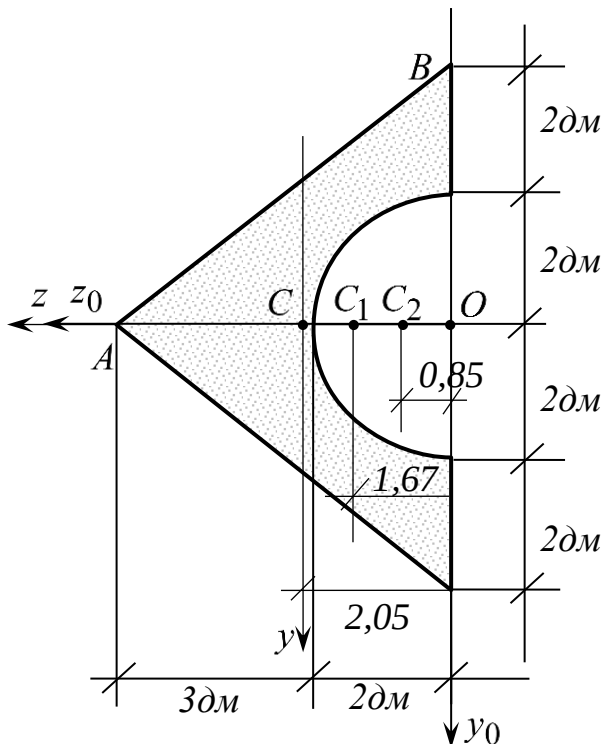


Рис. 1.1

П р и к л а д. Для заданого на рис. 1.1 поперечного перерізу знайти моменти опору.

Р о з в ' я з о к. Бачимо, що переріз має одну вісь симетрії, що лежить горизонтально. Розбиваємо переріз на прості фігури так, щоб вісь симетрії була віссю симетрії для складових, і визначаємо їх геометричні характеристики:

1) для рівнобедреного трикутника з основою $b = 8 \text{ dm}$ та висотою $h = 5 \text{ dm}$ центр ваги C_1 лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані $y_{10} = h/3 = 1,67 \text{ dm}$ від основи,

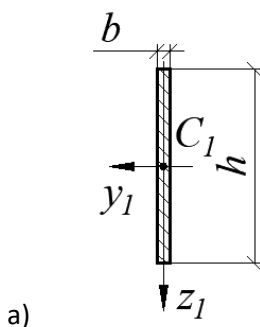
$$A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{b^3 h}{48} = \frac{8^3 \cdot 5}{48} = 53,3 \text{ dm}^4,$$

$$I_{z_1} = \frac{h^3 b}{36} = \frac{5^3 \cdot 8}{36} = 27,8 \text{ dm}^4.$$

Задача 1.2. Для заданого на рисунку до задачі перерізу визначити положення центру ваги, осьові та відцентровий моменти інерції в центральній системі координат, положення головної системи координат, головні моменти інерції, головні моменти опору, побудувати еліпс інерції.

Розв'язання. Геометричні характеристики елементів перерізу:

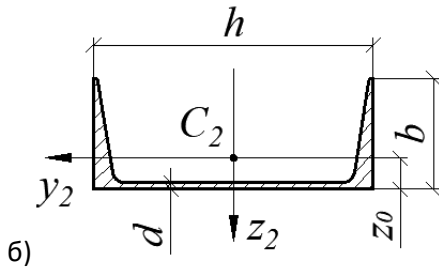


а) Прямокутник 18X280

$$A_1 = bh = 1,8 \cdot 28 = 50,4 \text{ cm}^2;$$

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,8 \cdot 28^3}{12} = 3292,8 \text{ cm}^4;$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{1,8^3 \cdot 28}{12} = 13,6 \text{ cm}^4.$$



б)

б) Швелер №30

$$h = 30 \text{ см}, b = 10 \text{ см}, z_0 = 2,52 \text{ см};$$

$$A_2 = 40,5 \text{ см}^2;$$

$$I_{y2} = 327 \text{ см}^4;$$

$$I_{z2} = 5810 \text{ см}^4.$$

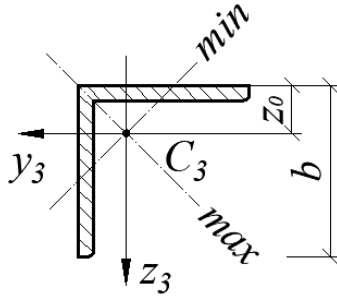
в) Куттик 140×10

$$b = 14 \text{ см}, z_0 = 3,82 \text{ см}, A_3 = 27,33 \text{ см}^2;$$

$$I_{y3} = I_{z3} = 512,3 \text{ см}^4;$$

$$I_{\max} = 813,6 \text{ см}^4, I_{\min} = 211 \text{ см}^4;$$

$$I_{y3z3} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = + \frac{813,6 - 211}{2} = 301,3 \text{ см}^4.$$



в)

Рис. 1.1

Центр ваги визначаємо відносно осей першого елемента y_1 та z_1 (рис. 1.1 а).

Загальна площа перерізу $A = \sum A_i = 50,4 + 40,5 + 27,33 = 118,23 \text{ см}^2$.

Координата центра ваги вздовж осі y_1 :

$$y_{1C} = \frac{\sum S_{z_{1i}}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_{1i} A_i}{A} = \frac{0 \cdot 50,4 + 15,9 \cdot 40,5 + (-4,72) \cdot 27,33}{118,23} = 4,36 \text{ см}.$$

Відкладаємо центральну вісь z_c (рис. 1.2). Перевірка:

$$S_{z_c} = \sum y_{Ci} A_i = (-4,36) \cdot 50,4 + 11,54 \cdot 40,5 + (-9,08) \cdot 27,33 = 467,37 - 467,9 =$$

$$= -0,53 \text{ см}^3 \approx 0. \quad \text{Похибка: } \varepsilon = \frac{0,53}{467,9} \cdot 100\% = 0,11\% < 0,5\%.$$

Координата центра ваги вздовж осі z_1 :

$$z_{1C} = \frac{\sum S_{y_{1i}}}{\sum A_i} = \frac{\sum z_{1i} A_i}{A} = \frac{0 \cdot 50,4 + 11,48 \cdot 40,5 + (-10,18) \cdot 27,33}{118,23} = 1,58 \text{ см}.$$

Відкладаємо центральну вісь y_c (рис. 1.2). Перевірка:

$$S_{y_c} = \sum z_{Ci} A_i = (-1,58) \cdot 50,4 + 9,9 \cdot 40,5 + (-11,76) \cdot 27,33 = 400,95 - 401,03 = -0,08 \text{ см}^3 \approx 0.$$

$$\varepsilon = \frac{0,08}{401,03} \cdot 100\% = 0,02\% < 0,5\%.$$

Похибка:

Центральні моменти інерції:

$$I_{y_c} = \sum (I_{y_i} + z_{ci}^2 A_i) = 3292,8 + (-1,58)^2 \cdot 50,4 + 327 + 9,9^2 \cdot 40,5 + 512,3 + (-11,76)^2 \cdot 27,33 = 12007 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c} = \sum (I_{z_i} + y_{ci}^2 A_i) = 13,6 + (-4,36)^2 \cdot 50,4 + 5810 + 11,54^2 \cdot 40,5 + 512,3 + (-9,08)^2 \cdot 27,33 = 14940,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C z_C} = \sum (I_{y_i z_i} + y_{ci} z_{ci} A_i) = 0 + (-1,58) \cdot (-4,36) \cdot 50,4 + 0 + 9,9 \cdot 11,54 \cdot 40,5 + 301,3 + (-11,76) \cdot (-9,08) \cdot 27,33 = 8193,8 \text{ см}^4.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_C z_C}}{I_{z_C} - I_{y_C}} = \frac{2 \cdot 8193,8}{14940,7 - 12007} = 5,58598;$$

Положення головних осей:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(5,58598) = 39,93^\circ.$$

Головні моменти інерції визначаємо за допомогою трьох типів формул:

$$a) I_U = I_{y_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{z_C} \sin^2 \alpha_0 - I_{y_C z_C} \sin 2\alpha_0 = 12007 \cos^2 39,93^\circ + 14940,7 \sin^2 39,93^\circ - 8193,8 \sin(2 \cdot 39,93^\circ) = 5149,8 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{y_C} \sin^2 \alpha_0 + I_{z_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_C z_C} \sin 2\alpha_0 = 12007 \sin^2 39,93^\circ + 14940,7 \cos^2 39,93^\circ + 8193,8 \sin(2 \cdot 39,93^\circ) = 21797,9 \text{ см}^4.$$

$$б) I_U = I_{y_C} - I_{y_C z_C} \operatorname{tg} \alpha_0 = 12007 - 8193,8 \cdot \operatorname{tg} 39,93^\circ = 5149,8 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{z_C} + I_{y_C z_C} \operatorname{tg} \alpha_0 = 14940,7 + 8193,8 \cdot \operatorname{tg} 39,93^\circ = 21797,9 \text{ см}^4;$$

$$в) I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_{y_C} + I_{z_C}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_C} - I_{z_C}}{2}\right)^2 + I_{y_C z_C}^2} =$$

$$= \frac{12007 + 14940,7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12007 - 14940,7}{2}\right)^2 + 8193,8^2} = 13473,85 \pm 8324,05.$$

Оскільки $I_{y_C} < I_{z_C}$, то $I_U < I_V$

$$I_U = I_{\min} = 13473,85 - 8324,05 = 5149,8 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{\max} = 13473,85 + 8324,05 = 21797,9 \text{ см}^4.$$

Головні радіуси інерції:

$$i_U = \sqrt{\frac{I_U}{A}} = \sqrt{\frac{5149,8}{118,23}} = 6,6 \text{ см}; \quad i_V = \sqrt{\frac{I_V}{A}} = \sqrt{\frac{21797,9}{118,23}} = 13,58 \text{ см}.$$

Будуємо еліпс інерції (рис. 1.2).

На рис. 1.2 найбільш віддаленою точкою від осі U є точка $A(26,54; 2,42)$, а від осі V – точка $B(26,54, 12,42)$, тоді:

$$U_{\max} = y_B \cos \alpha_0 + z_B \sin \alpha_0 = 26,54 \cos 39,93^\circ + 12,42 \sin 39,93^\circ = 28,3 \text{ см};$$

$$V_{\max} = -y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0 = -26,54 \sin 39,93^\circ + 2,42 \cos 39,93^\circ = -15,2 \text{ см};$$

$$W_U = \frac{I_U}{|V_{\max}|} = \frac{5149,8}{|-15,2|} = 338,8 \text{ см}^3; \quad W_V = \frac{I_V}{|U_{\max}|} = \frac{21797,9}{|28,3|} = 770,2 \text{ см}^3.$$

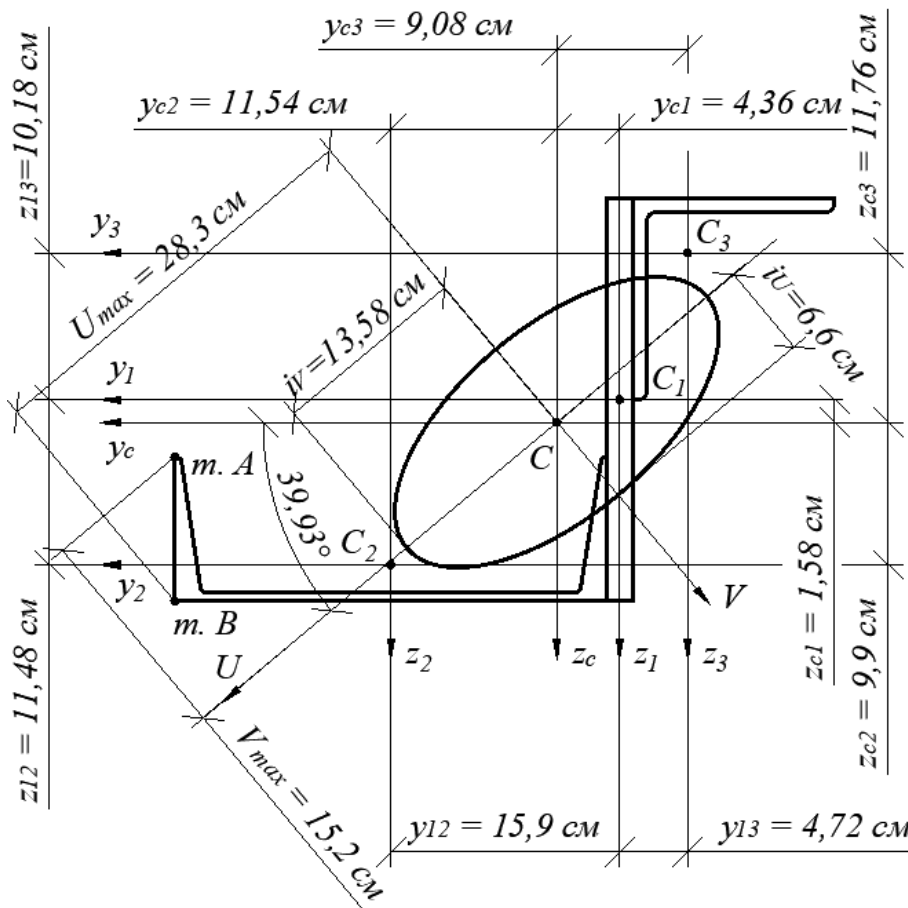


Рис. 1.2

1.87. Визначити головні моменти опору для перерізу, який представляє

2) для півкола з радіусом $R = 2 \text{ дм}$ центр ваги C_2 лежить на горизонтальній вісі

симетрії на відстані $y_{20} = \frac{4R}{3\pi} = 0,85 \text{ дм}$ від основи, $A_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ см}^2$

$$I_{y_2} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{8} = 6,28 \text{ дм}^4, \quad I_{z_2} = 0,11 R^4 = 0,11 \cdot 2^4 = 1,76 \text{ дм}^4.$$

Вводимо початкову систему координат y_0, z_0 та визначаємо координату y_{C0} центра ваги складного перерізу ($z_{C0} = 0$ в силу симетрії):

$$y_{C0} = \frac{y_{10} A_1 - y_{20} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{1,67 \cdot 20 - 0,85 \cdot 6,28}{20 - 6,28} = \frac{33,4 - 5,34}{13,72} = 2,05 \text{ дм}$$

Позначаємо на рис. 1.1 центр ваги C та вводимо головну центральну систему координат y_{Cz} . Координати точок C_1, C_2 в головній системі координат дорівнюють

$$C_{y1} = y_{10} - y_{C0} = 1,67 - 2,05 = -0,38 \text{ дм}; \quad C_{z1} = 0;$$

$$C_{y2} = y_{20} - y_{C0} = 0,85 - 2,05 = -1,2 \text{ дм}; \quad C_{z2} = 0.$$

За допомогою формул паралельного переносу знаходимо головні моменти інерції перерізу:

$$I_y = I_{y1} + C_{z1}^2 \cdot A_1 - I_{y2} - C_{z2}^2 \cdot A_2 = 53,3 - 6,28 = 47 \text{ дм}^4;$$

$$I_z = I_{z1} + C_{y1}^2 \cdot A_1 - I_{z2} - C_{y2}^2 \cdot A_2 = 27,8 + (-0,38)^2 \cdot 20 - 1,76 - (-1,2)^2 \cdot 6,28 = \\ = 27,8 + 2,89 - 1,76 - 9,04 = 19,89 \approx 20 \text{ дм}^4.$$

Знаходимо координати найбільш віддалених від осей точок перерізу та підставляємо їх в формули для моментів опору:

$$y_{\max} = y_A = 5 - 2,05 = 2,95 \text{ дм}; \quad z_{\max} = z_B = 4 \text{ дм};$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{47}{4} = 11,75 \text{ дм}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{20}{2,95} = 6,8 \text{ дм}^3.$$

2. Розтягування (стискування) стержнів. Розрахунок стержневих систем.

Теоретичні відомості. При одноосному навантаженні стержня рівнодійна внутрішніх сил в заданому перерізі називається *поздовжньою силою* N . Для визначення сили N використовується метод перерізів: стержень розрізається на дві частини, одна з яких відкидається; вплив відкинутої частини на ту, що залишилась, замінюють зусиллям N . Значення зусилля N визначається з рівняння рівноваги для частини стержня, що залишилась, і залежить від зовнішніх сил, в тому числі власної ваги.

При навантаженні стержня зосередженими поздовжніми силами без врахування власної ваги поздовжня сила N залишається постійною в довільному перерізі ділянки стержня між точками прикладання сил. Зусилля N дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на

відрізану частину стержня. N додатне, якщо ділянка розтягнута (діє від перерізу), і від'ємне, якщо ділянка стиснута (діє до перерізу).

Графік, що показує зміну N по довжині стержня, називається епюрою поздовжніх сил (епюрою N).

При розрахунках на розтягування (стискування) стержнів вважаємо, що для поперечних перерізів стержня виконується *гіпотеза плоских перерізів*: плоскі поперечні перерізи стержня в процесі деформування рухаються як жорсткі тіла, залишаючись плоскими та перпендикулярними до деформованої вісі стержня.

Нормальне напруження в конкретному перерізі стержня з врахуванням гіпотези плоских перерізів визначається за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де A – площа поперечного перерізу. Графік, що показує зміну нормальних напружень по довжині стержня, називається епюрою нормальних напружень (епюрою σ).

Переріз, в якому нормальне напруження має найбільше абсолютне значення ($\sigma = \sigma_{\max}$), називається небезпечним.

В межах пружності $\sigma \leq \sigma_e$ виконується закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

де E – модуль Юнга (модуль пружності першого роду), $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ – відносна поздовжня деформація.

Видовження $u_l = \Delta$ ділянки стержня довжиною l зі сталою жорсткістю на розтяг EA під дією сталої сили N знаходиться за формулою

$$\Delta = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.3)$$

Умова міцності при осьовому розтягуванні або стискуванні має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (2.4)$$

де σ_{adm} – допустимі нормальні напруження для конкретного матеріалу.

Для крихких матеріалів (камінь, бетон, цегла) допустимі значення нормальних напружень на розтягування та стискування суттєво відрізняються, тому оцінка міцності для розтягнутих і стиснутих ділянок проводиться окремо:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &\leq \sigma_{adm}^+, \\ \sigma_{\max}^- &\leq \sigma_{adm}^-. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При перевірці міцності допускається перенапруження

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% \leq 5\% \quad (2.6)$$

При підборі перерізу необхідна площа поперечного перерізу знаходиться за допомогою виразу

$$A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}}. \quad (2.7)$$

Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони. Перевірити міцність заданої в дод. 5 ступінчатої кам'яної колони та визначити переміщення її характерних перерізів, якщо модуль Юнга $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допустимі напруження $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$, $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$.

Приклад. Двоступінчата кам'яна колона (площа верхнього перерізу $A_1 = 0,3\text{м}^2$, площа нижнього перерізу $A_2 = 0,5\text{м}^2$) навантажена силами $F_1 = 320\text{кН}$, $F_2 = 250\text{кН}$ (рис.2.1).

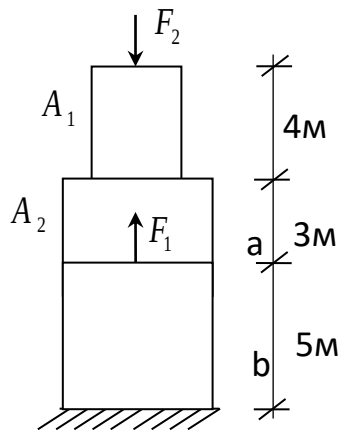


Рис. 2.1

Побудувати епюри поздовжньої сили N , нормальних напружень σ та переміщень поперечних перерізів u (модуль Юнга $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$). Перевірити міцність колони, якщо допустиме напруження на розтягування $\sigma_{adm}^+ = 0,3\text{МПа}$, на стискування $\sigma_{adm}^- = 3\text{МПа}$.

Розв'язок. 1. Розбиваємо стержень на ділянки по точках прикладання сили та зміни площі поперечного перерізу та номеруємо їх, починаючи з вільного кінця (рис.2.3).

З а у в а ж е н н я. Поздовжня сила N завжди діє від перерізу, власна вага Q діє вниз. Тобто якщо стержень закріплений зверху, то відкидається верхня частина стержня, вісь x та сила N спрямовуються вгору.

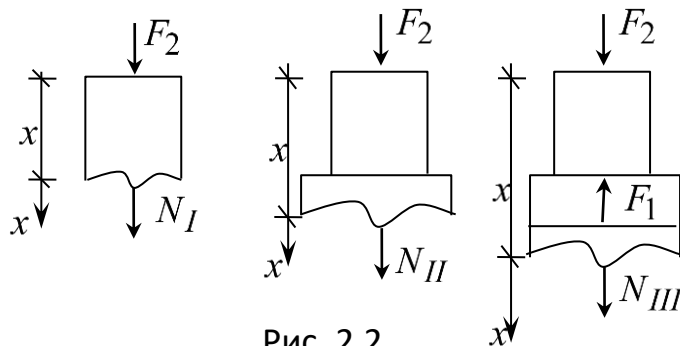


Рис. 2.2

За допомогою методу перерізів знаходимо значення внутрішньої сили N на кожній з ділянок (рис. 2.2):

Рівняння рівноваги для першої та другої ділянок однакові

$$N_I + F_2 = 0, \quad N_{II} + F_2 = 0,$$

$$N_I = N_{II} = -F_2 = -250\text{кН}.$$

Для третьої ділянки маємо $N_{III} + F_2 - F_1 = 0$,
 $N_{III} = F_1 - F_2 = 320 - 250 = 70\text{кН}$.

2. Знаходимо нормальні напруження σ на кожній з ділянок:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.3} = -833,3\text{кПа} = -0.83\text{МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.5} = -500\text{кПа} = -0.5\text{МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{70 \cdot 10^3}{0.5} = 140\text{кПа} = 0.14\text{МПа}.$$

По знайдених значеннях N та σ на рис. 2.3 будуємо епюри:

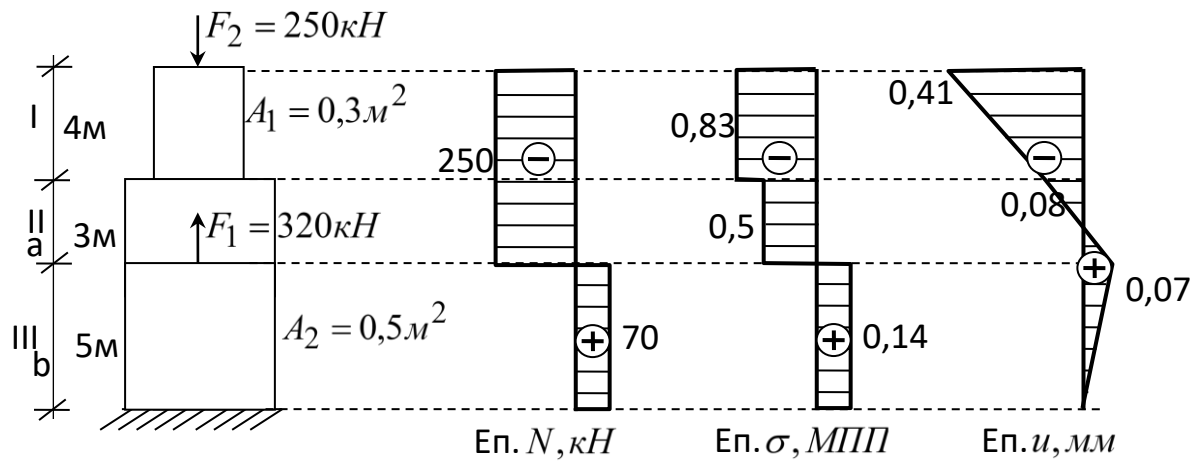


Рис. 2.3

3. Робимо перевірку міцності по максимальних напруженнях на стиснутих і розтягнутих ділянках:

$$\sigma_{\max}^{-} = 0,83 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^{-} = 3 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{\max}^{+} = 0,14 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^{+} = 0,3 \text{ МПа} .$$

Міцність колони забезпечено.

4. Визначаємо видовження кожної з ділянок стержня:

$$\Delta_I = \frac{N_I l_I}{EA_1} = \frac{\sigma_I l_I}{E} = \frac{-0,83 \cdot 4}{0,1 \cdot 10^5} = -3,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,33 \text{ мм} ;$$

$$\Delta_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EA_2} = \frac{\sigma_{II} l_{II}}{E} = \frac{-0,5 \cdot 3}{0,1 \cdot 10^5} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,15 \text{ мм} ;$$

$$\Delta_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{EA_2} = \frac{\sigma_{III} l_{III}}{E} = \frac{0,14 \cdot 5}{0,1 \cdot 10^5} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,07 \text{ мм} .$$

Переміщення характерних перерізів стержня визначаємо, починаючи з закріплення стержня:

$$u(12) = 0 ;$$

$$u(8) = u(12) + \Delta_{III} = 0 + 0,07 = 0,07 \text{ м} ,$$

$$u(5) = u(8) + \Delta_{II} = 0,07 - 0,15 = -0,08 \text{ м} ,$$

$$u(0) = u(5) + \Delta_I = -0,08 - 0,33 = -0,41 \text{ м} ,$$

На рис. 2.3 будуємо епюру переміщень.

Задача 2.2. Абсолютно жорсткий брус навантажений силами $P_1 = 2 \text{ т}$ та $P_2 = 1 \text{ т}$. Підібрати діаметр сталевий підвіски AB , якщо $\sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$.

Визначити переміщення точки D , якщо $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Розв'язання.

Рівняння рівноваги (рис. 2.1):

$$\Sigma M_C = 0;$$

$$P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 4 - N_e \cdot 3 = 0;$$

$$N_e = \frac{2P_1 + 4P_2}{3} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{3} = 2,667 \text{ Т} = 26,7 \text{ кН}$$

Розглянемо

ΔABC :

$$l_{AB} = \sqrt{13} = 3,6 \text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3,6} = 0,555;$$

$$N = \frac{N_B}{\sin \alpha} = \frac{2,667}{0,555} = 4,805 \text{ Т} = 48,05 \text{ кН}$$

Необхідна площа поперечного перерізу

$$A_{нб} = \frac{N}{\sigma_{adm}} = \frac{48,05 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} \text{ м}^2 = 2,4 \text{ см}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,4}{3,14}} = 1,75 \text{ см} = 17,5 \text{ мм}$$

шуканий діаметр

Видовження стержня AB

$$\Delta_{AB} = \frac{Nl}{EA} = \frac{48,05 \cdot 10^3 \cdot 3,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}} = 36 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,6 \text{ мм}$$

Застосовуємо метод засічок (рис.2.2). Відкладаємо Δ_{AB} на продовженні стержня і проводимо перпендикуляр. До стержня CD також проводимо перпендикуляр в т. B . Вертикальне переміщення точки B f_B дорівнює гіпотенузі отриманого трикутника

$$f_B = \frac{\Delta_{AB}}{\sin \alpha} = \frac{3,6}{0,555} = 6,5 \text{ мм}$$

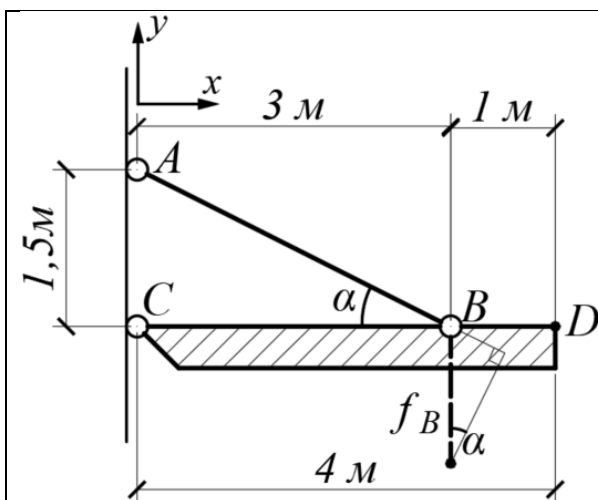


Рис. 2.2

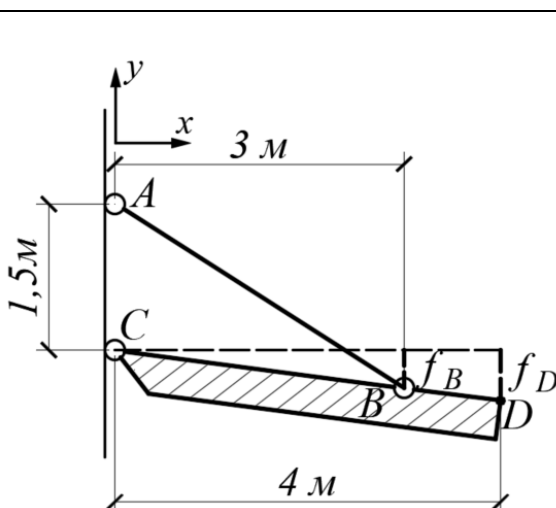


Рис. 2.3

Залежність між f_B та f_D складемо за подібністю трикутників (рис.2.3). Маємо

$$\frac{f_B}{f_D} = \frac{3}{4}.$$

Знаходимо переміщення точки D :

$$f_D = \frac{4}{3} f_B = \frac{4 \cdot 6,5}{3} = 8,7 \text{ мм}.$$

Задача 2.3. Розрахунок статично визначеної стержневої системи.

Стержнева підвіска, що складається з двох шарнірно закріплених стержнів однакового поперечного перерізу (дод. 6), навантажена силою F . Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ та визначити переміщення точки B прикладання сили.

П р и к л а д. До шарнірно з'єднаних стержнів 1, 2 однакового поперечного перерізу підвішено вантаж вагою $F = 120 \text{ кН}$. Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ та визначити переміщення точки B прикладання сили.

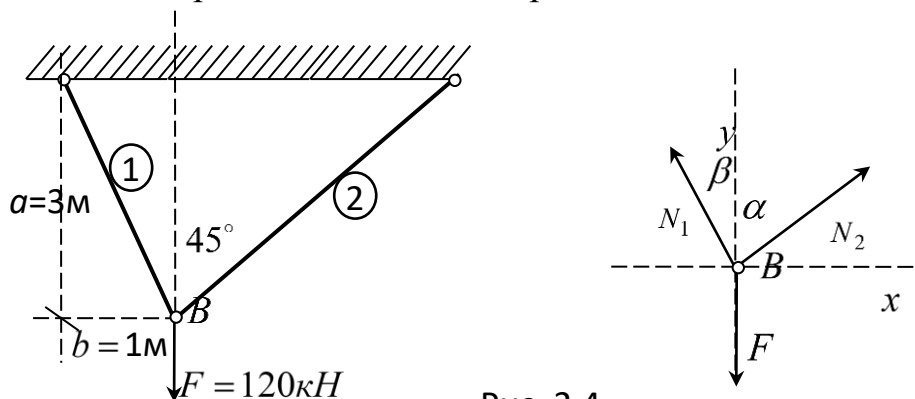


Рис. 2.4

Р о з в' я з а н н я. При такому навантаженні в стержнях 1, 2 виникають внутрішні поздовжні сили N_1 , N_2 , які знаходимо з рівняння рівноваги для точки B (рис. 2.4):

$$\begin{aligned} -N_1 \sin \beta + N_2 \sin \alpha &= 0, \\ N_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha - F &= 0. \end{aligned}$$

Знайдемо довжини стержнів та тригонометричні значення для кутів:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ м},$$

$$l_2 = a / \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \beta = b/l_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = a/l_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги:

$$N_1 = N_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = N_2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}N_2, \quad \sqrt{5}N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

$$N_2 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - F = 2\sqrt{2}N_2 - F = 0,$$

$$N_2 = \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{120}{2\sqrt{2}} = 42,4 \text{ кН}, \quad N_1 = \sqrt{5}N_2 = \sqrt{5} \cdot 42,4 = 94,9 \approx 95 \text{ кН}.$$

Підбираємо площу поперечних перерізів стержнів

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm} \rightarrow A_{\text{нб}} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{95 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 6 \text{ см}^2.$$

Визначаємо напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{95 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 15,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 158 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{42,4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 7,07 \cdot 10^7 \text{ Па} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Видовження стержнів

$$\Delta_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{158 \cdot 10^6 \cdot 3,16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 249,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 2,5 \text{ мм},$$

$$\Delta_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{70,7 \cdot 10^6 \cdot 4,24}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 149,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 1,5 \text{ мм}.$$

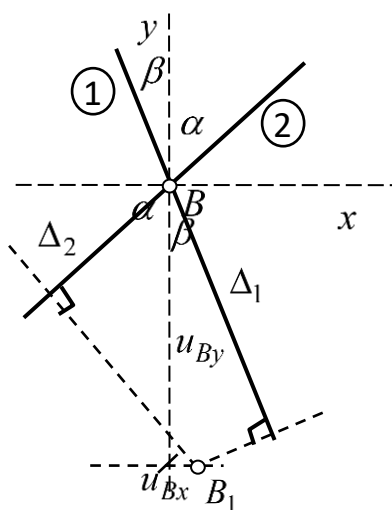


Рис. 2.5

Положення точки B після деформування системи знайдемо за допомогою *методу засічок*: на кожному з стержнів відкладаємо від точки B його видовження (або скорочення) та проводимо перпендикуляри до стержнів в отриманих точках. Точка B переміститься в точку B_1 перетину цих перпендикулярів (див. рис. 2.5). Проекції переміщення точки B u_{Bx}, u_{By} на осі x, y знайдемо за допомогою наступного правила: видовження Δ стержня дорівнює сумі проекцій переміщень u_{Bx}, u_{By} на напрямок цього стержня. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_{By} \cos \beta + u_{Bx} \sin \beta, \\ \Delta_2 = u_{By} \cos \alpha - u_{Bx} \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} 3u_{By} + u_{Bx} = \Delta_1 \sqrt{10}, \\ u_{By} - u_{Bx} = \Delta_2 \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$u_{By} = \frac{\Delta_2 \sqrt{2} + \Delta_1 \sqrt{10}}{4} = \frac{1,5\sqrt{2} + 2,5\sqrt{10}}{4} = 2,5 \text{ мм},$$

$$u_{Bx} = -\Delta_2 \sqrt{2} + u_{By} = -1,5\sqrt{2} + 2,5 = 0,38 \text{ мм}.$$

Повне переміщення точки B

$$u_B = \sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2} = \sqrt{2,5^2 + 0,38^2} = 2,53 \text{ мм}.$$

Рисунок для методу засічок потрібно виконувати в масштабі. В такому випадку значення u_{Bx}, u_{By} можна перевірити шляхом безпосереднього вимірювання на рисунку.

Розрахунково-графічна робота №1.

Геометричні характеристики плоских перерізів та розтяг-стиск

Задача 1. Геометричні характеристики поперечного перерізу.

Для поперечного перерізу складної форми визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 2,3.

Таблиця даних до задачі №1

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру для додатків 2,3				
	третя	перша		друга	
	№ схеми	№ двотавра*	№ швелера*	розміри листа, мм	розміри кутика*, мм
0	0	16	20a	220x10	160x16
1	1	18	20	220x12	160x10
2	2	18a	18a	240x14	150x12
3	3	20	18	240x16	150x10
4	4	20a	16a	280x16	140x10
5	5	22	16	280x20	125x14
6	6	22a	24a	300x16	125x10
7	7	24	24	300x20	120x10
8	8	24a	22a	340x18	120x8
9	9	27	22	340x22	110x8

*Сортамент прокатної сталі наведено в [4-6]

Задача 2. Розтяг (стиск).

Для заданої стержневої конструкції підібрати круглий поперечний переріз стержня та визначити переміщення кінця стержня, якщо модуль пружності сталі $E = 200 ГПа$.

Таблиця даних до задачі №2

Цифра шифру	Перша цифра		Друга цифра		Третя цифра		
	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$P, кН$	$q, кН/м$	$\sigma_{adm}, МПа$	Схема
1	3	4	2	10	6	180	1
2	4	2	3	20	5	160	2
3	5	3	2	15	4	200	3
4	5	6	3	20	8	210	4
5	3	2	4	14	7	220	5
6	5	4	4	25	5	230	6
7	5	3	5	8	6	180	7
8	7	4	2	15	10	170	8
9	4	6	4	30	9	200	9
0	3	3	3	40	7	190	0

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

20__ - 20__ навчальний рік

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №

(назва роботи)

Шифр _____

Факультет _____

Курс _____

Група _____

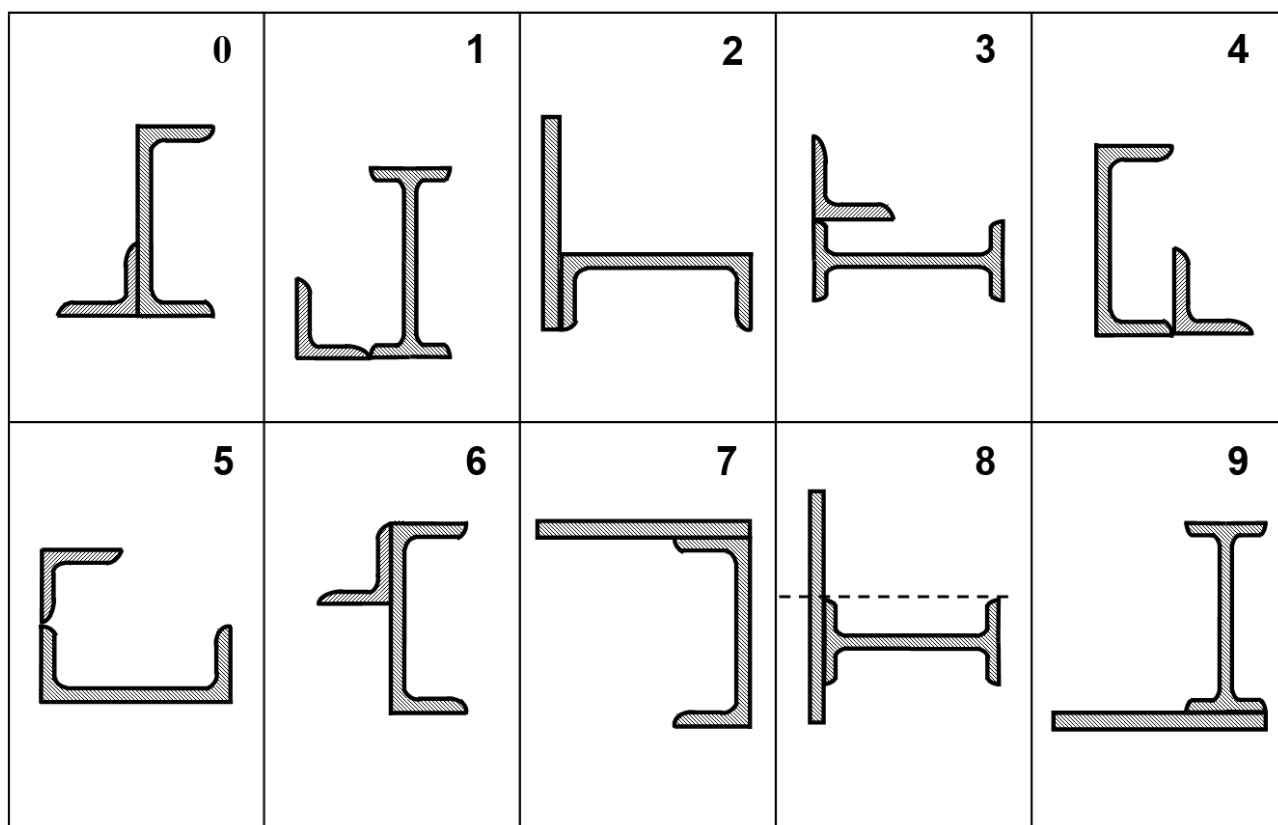
Студент (П.І.Б.) _____

Керівник (П.І.Б.) _____

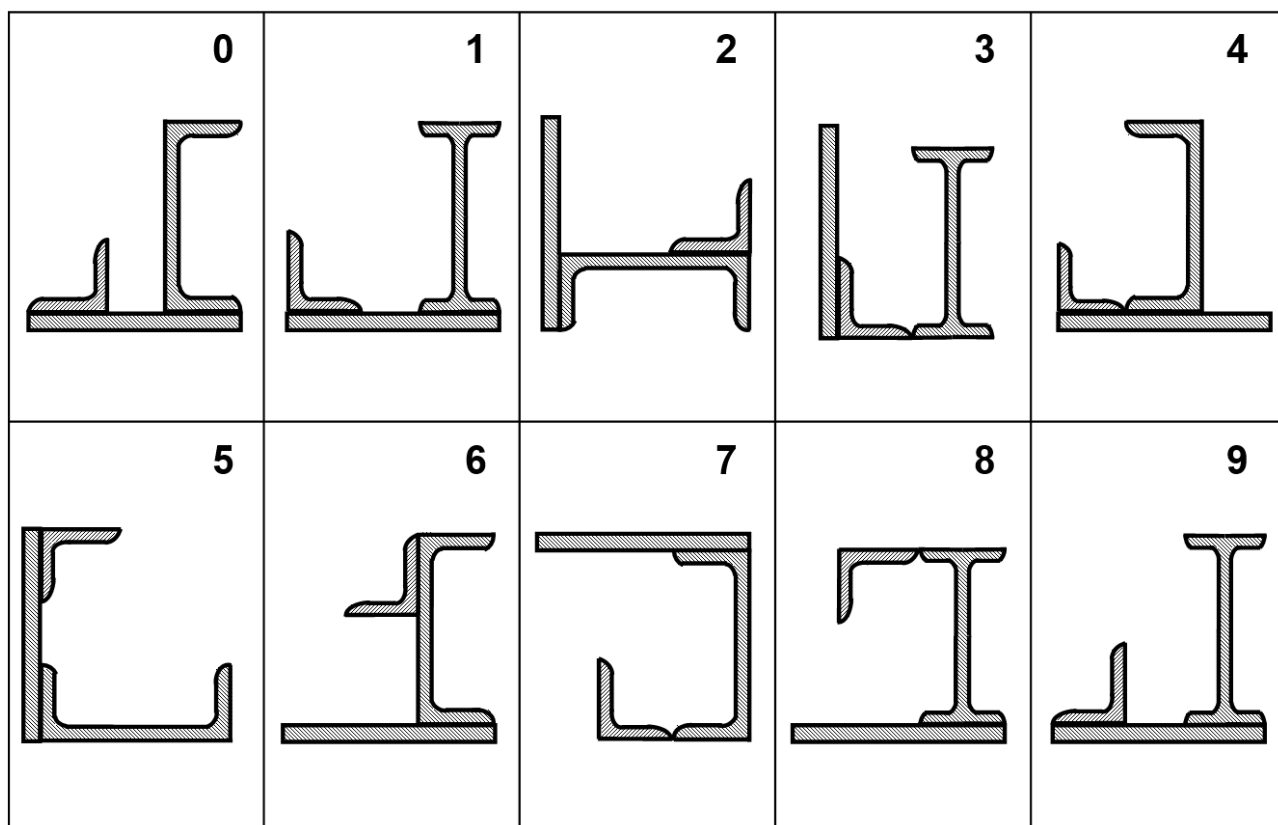
Дата здачі завдання _____

Оцінка _____

Додаток 2



Додаток 3



1	2
3	4
5	6
7	8
9	0

Рекомендована література

Підручники:

1. Писаренко, Г. С. та ін. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С. Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ: Вища шк., 2004. – 655с.
2. Шкельов Л.Т. Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
3. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1995.

Навчальні посібники:

4. О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський. Опір матеріалів в Темах і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБА; –Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340с. ISBN 978-617-7626-86-1
5. Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий. Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с. ISBN 978-617-520-044-5
6. *Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб.* / П.О. Іваненко, Л.О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. За ред. П.О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с. ISBN 978-617-520-163-3

Додаткові джерела:

7. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; за ред. М. І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. □ 399 с.
8. Hibbeler, R.C. Mechanics of materials / R.C. Hibbeler. Tenth edition. –NJ: Pearson, 2015. – 900 p.– ISBN 9780134319650
9. Серія відеоуроків та лабораторних робіт з опору матеріалів на Youtube
10. https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB_rA ,
https://youtu.be/tibdfc_Q2s8
11. Освітній сайт КНУБА. Курс для дистанційного навчання «Опір матеріалів. ПЦБ» <https://org2.knuba.edu.ua/course/view.php?id=2036>