Виберіть форму подання навчального матеріалу

√ **Докладне подання** Скорочене подання

3. Теорія переміщень

Зміст глави

Під впливом зовнішніх дій і навантажень споруди деформуються. При цьому координати, що характеризують положення кожного перерізу, змінюються, тобто перерізи переміщуються. Визначення цих переміщень – завдання теорії переміщень.

Обчислення переміщень необхідно:

– для розрахунку споруд на жорсткість, коли визначаються найбільші переміщення перерізів споруди $f_{\max}$ і порівнюються з переміщеннями, які припускаються, тобто перевіряється умова $f_{\max} \le [f]$;

– для розрахунку статично невизначуваних систем при складанні рівнянь сумісності деформацій елементів споруди.

3.1. Робота зовнішніх і внутрішніх сил

Якщо до споруди прикладено певну силу, яка в процесі навантаження зростає від нуля до кінцевої величини з порівняно невеликою швидкістю (таке навантаження називається **статичним**), споруда деформується, точки, в яких прикладено навантаження, переміщуються і сили здійснюють роботу.

Розглянемо статичне завантаження стержня (рис.3.1,а), який внаслідок дії розтягуючої сили *P* дістає подовження Δl. Якщо матеріал стержня є фізично-нелінійним, графік залежності між навантаженням і переміщенням кінця стержня буде криволінійним (рис.3.1,б).

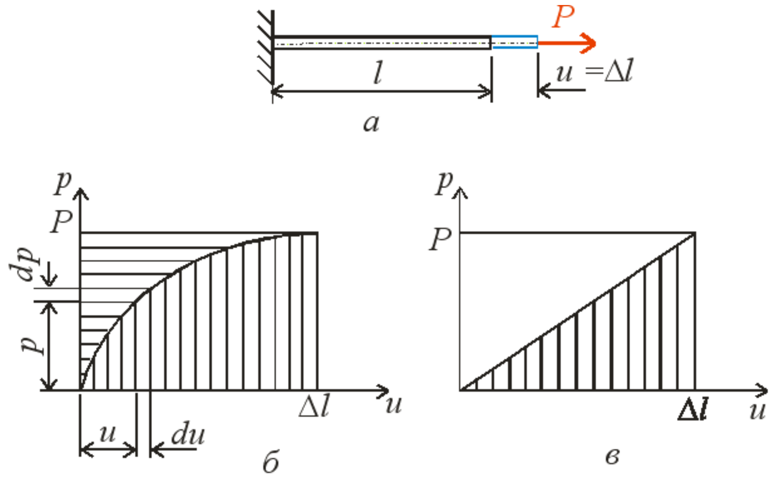

Рис.3.1

Для обчислення роботи, яку виконала сила *P*, візьмемо переміщення *u* в довільний момент часу і надамо йому приріст *du*. Тоді робота сили виражається інтегралом

$$A_p = \int_0^{\Delta l} p\,du \tag{3.1}$$

і являє собою площу між кривою і віссю *u*, яка на графіку (рис.3.1,б) заштрихована вертикальною штриховкою. Таку роботу називають **дійсною**.

Якщо ж надати приріст не переміщенню, а навантаженню, то робота виражатиметься інтегралом

$$A_u = \int_o^P u dp. \qquad (3.2)$$

Таку роботу називають **додатковою**. На графіку (рис.3.1,б) площа, що відповідає додатковій роботі, позначена горизонтальною штриховкою.

Сума дійсної і додаткової роботи називається **повною роботою** зовнішніх сил:

$$A_{\text{п}} = A_p + A_u. \qquad (3.3)$$

Очевидно, що повній роботі відповідає площа прямокутника.

Для лінійно деформованих систем між навантаженням і переміщенням, що їм зумовлене, існує лінійна залежність (рис.3.1,в). При цьому дійсна робота зображується площею заштрихованого трикутника. Очевидно, що додаткова робота в такому разі дорівнює дійсній роботі:

$$A_p = A_u = A \qquad (3.4)$$

і може бути обчислена як площа трикутника

$$A = \frac{P\Delta}{2}. \qquad (3.5)$$

Означена рівність називається **теоремою Клапейрона: в лінійно-деформованих системах дійсна робота статично прикладеної сили дорівнює половині добутку кінцевої величини сили на відповідне кінцеве переміщення, зумовлене цією силою**.

Отже, робота сили на зумовлених цією силою переміщеннях називається **дійсною**. Якщо ж сила P, залишаючись незмінною, здійснює роботу на переміщеннях Δl, зумовлених іншими діями, то таку роботу називають **можливою**. Можлива робота дорівнює добутку величини сили на відповідне переміщення, яке зумовлене іншими силами:

$$A = P \cdot \Delta l. \qquad (3.6)$$

Для обчислення роботи внутрішніх сил відокремимо нескінченно малий елемент довжиною dx. На рис.3.2,а зображено внутрішні зусилля, які діють у перерізах елемента. Сили N, M, Q здійснюватимуть роботу відповідно на поздовжніх деформаціях, взаємних кутах повороту і взаємних кутах зсуву перерізів. Ці деформації зображено на рис.3.2,б–3.2,г. Поздовжня деформація становить εdx, де ε – відносна поздовжня деформація ($\varepsilon = \Delta l / l$); взаємний кут повороту $d\varphi = \kappa dx$ (κ – кривизна осі деформованого стержня); поперечна деформація – γdx, де γ – кут зсуву.

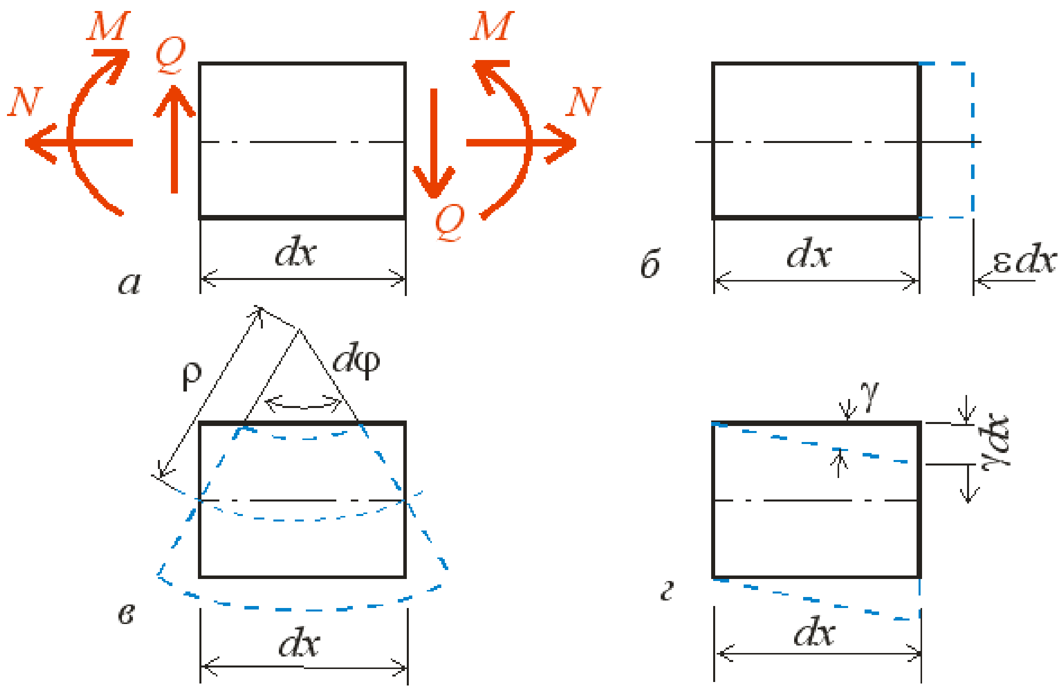

Рис.3.2

Дійсна робота внутрішніх сил становитиме

$$U = -\frac{1}{2}\sum\int_l (N\varepsilon dx + M\kappa dx + Q\gamma dx). \tag{3.7}$$

Аналогічно можна записати можливу роботу внутрішніх сил одного стану i на переміщеннях іншого стану p:

$$U_{ip} = -\sum\int_l (N_i\varepsilon_p dx + M_i\kappa_p dx + Q_i\gamma_p dx). \tag{3.8}$$

У цих формулах підсумовування поширюється на всі стержні системи. Знак “мінус” поставлено тому, що внутрішні сили стержневої системи N, M, Q для нескінченно малого елемента, який вилучено із стержневої системи, є зовнішніми. Внутрішні ж сили в елементі будуть матимуть таку саму величину, але спрямовуються у зворотному напрямку.

3.2. Узагальнені сили і узагальнені переміщення

З точки зору проблем, що вивчаються будівельною механікою, всі переміщення (лінійні переміщення точок споруди, кути повороту перерізів в елементах, взаємні поступальні і кутові переміщення перерізів тощо) мають одні й ті самі властивості. Тому зазвичай будь-яке переміщення, незалежно від його характеру або від причин, що його зумовлюють, називають **узагальненим переміщенням**, тобто переміщенням у загальному розумінні цього слова.

Кожному переміщенню ставлять у відповідність певну силову дію, яка здійснює роботу на цьому переміщенні. Така силова дія називається **узагальненою силою**, тобто силовою дією в загальному сенсі слова. Різним узагальненим переміщенням відповідають різні за характером та напрямком узагальнені сили.

Розглянемо кілька прикладів узагальнених переміщень і відповідних цим силам узагальнених сил.

1. Внаслідок деформації споруди точка *C* переміститься в положення C_1 (рис.3.3,а). Робота сили *P*, яка може бути прикладена в цій точці, виразиться співвідношенням $A = P\Delta$, де Δ – відрізок CC_2, який є проекцією повного переміщення CC_1 на напрям дії сили. Отже, **зосередженій силі, яка прикладена в точці, відповідає поступальне переміщення цієї точки в напрямі сили.**

2. В результаті деформацій споруди точки *C* і *D* перемістяться в положення C_1 і D_1 відповідно (рис.3.3,б). Робота двох сил *P*, які можуть бути прикладені в цих точках і спрямовані назустріч одна одній, буде виражена співвідношенням

$$A = P\Delta_1 + P\Delta_2 = P(\Delta_1 + \Delta_2).$$

Отже, **двом однаковим за величиною силам, що спрямовані вздовж однієї прямої назустріч одна одній, відповідає узагальнене переміщення, що характеризує зміну відстані між точками, в яких вони прикладені**.

3. В результаті деформації споруди переріз *C* стержня повернеться на кут φ (рис.3.3,в). При цьому зосереджений момент *M*, який може бути прикладений в цьому перерізі, здійснить роботу $A = M\varphi$.

Таким чином, **зосередженому моменту відповідає кут повороту перерізу стержня в точці прикладення моменту**.

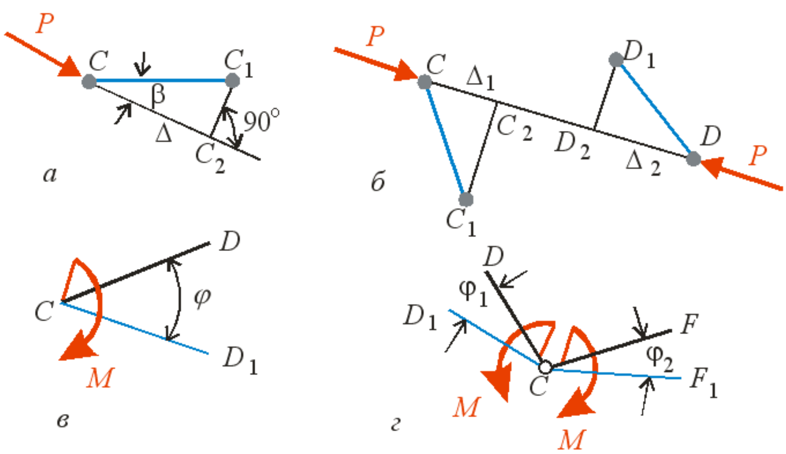

Рис.3.3

4. У шарнірі *C* поєднуються два стержні. В процесі деформації один із стержнів повернеться на кут φ_1, а другий – на кут φ_2 (рис.3.3,г). Два однакових за величиною і протилежно спрямованих зосереджених моменти *M*, які можуть бути прикладені до кожного із стержнів, при цьому здійснюють роботу

$$A = M\varphi_1 + M\varphi_2 = M(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Отже, **двом однаковим за величиною і протилежним за напрямом зосередженим моментам відповідає зміна кута поміж перерізами, в яких ці моменти прикладені**.

3.3. Універсальні позначення переміщень

Будь-яке узагальнене переміщення позначається літерою Δ, якщо воно зумовлене зовнішньою дією довільної величини, або літерою δ, якщо величина дії дорівнює одиниці. В позначення вводяться два індекси, наприклад

$$\Delta_{3P}, \ \delta_{ik}.$$

Індекси позначають місцезнаходження і характер переміщення, а також дію, що його зумовлює. Перший індекс пов'язаний з характером та напрямом переміщення. Він вказує на узагальнену силу, яка відповідає цим характеристикам. Другий індекс пов'язаний із дією, яка викликає це переміщення.

На рис.3.4,а-в зображено три деформованих стани балки, що перебуває під дією різних навантажень.

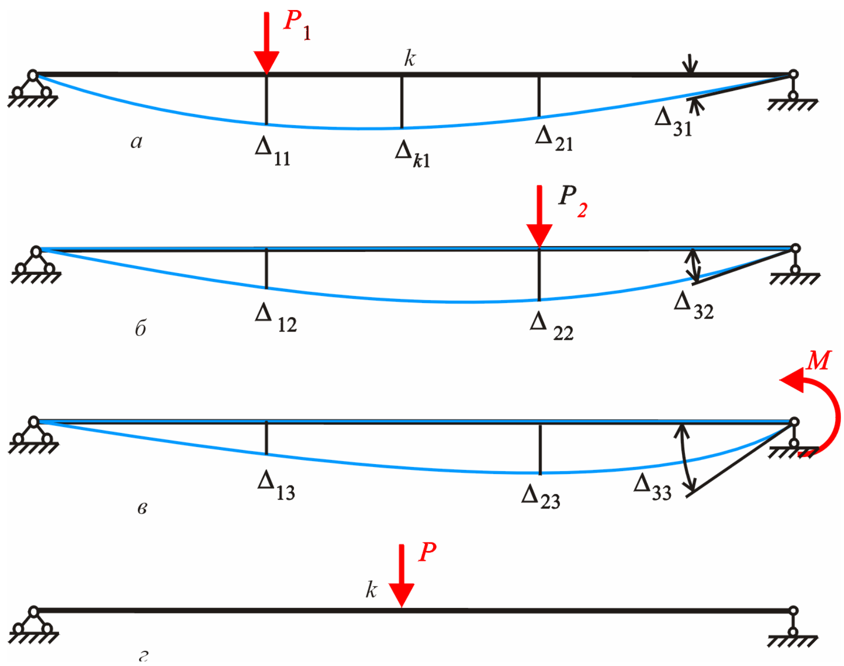

Рис.3.4

Так, Δ_{12} являє собою переміщення в напрямі сили P_1 першого стану, тобто прогин балки, від дії сили P_2 другого стану; Δ_{31} – переміщення в напрямі сили P_3 третього стану, тобто кут повороту, від дії сили P_1 першого стану тощо. І взагалі можна сказати, що Δ_{ij} – це переміщення в напрямі узагальненої сили стану *i* від дії узагальненої сили стану *j*.

Отже, **для того щоб позначити будь-яке переміщення, необхідно створити допоміжний стан конструкції, приклавши узагальнену силу, яка відповідає переміщенню**. Так, для того, щоб позначити в попередньому прикладі вертикальне переміщення точки *k* від дії сил стану 1, створимо допоміжний стан *k*, приклавши в перерізі *k* балки вертикальну зосереджену силу (рис.3.4,г). Тоді дане переміщення позначатиметься Δ_{k1}.

3.4. Матриця податливості і матриця жорсткості

Розглянемо яку-небудь стержневу систему, наприклад балку, під дією кількох узагальнених сил $P_1,\ P_2,\ \dots,P_n$ (рис.3.5).

На підставі принципу незалежності дії сил (принцип суперпозиції) будь-який прогин можна подати як суму прогинів від кожної сили окремо:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \cdots + \Delta_{in}\ . \qquad (3.9)$$

Зручно виразити дійсний прогин через прогини, зумовлені дією одиничних сил

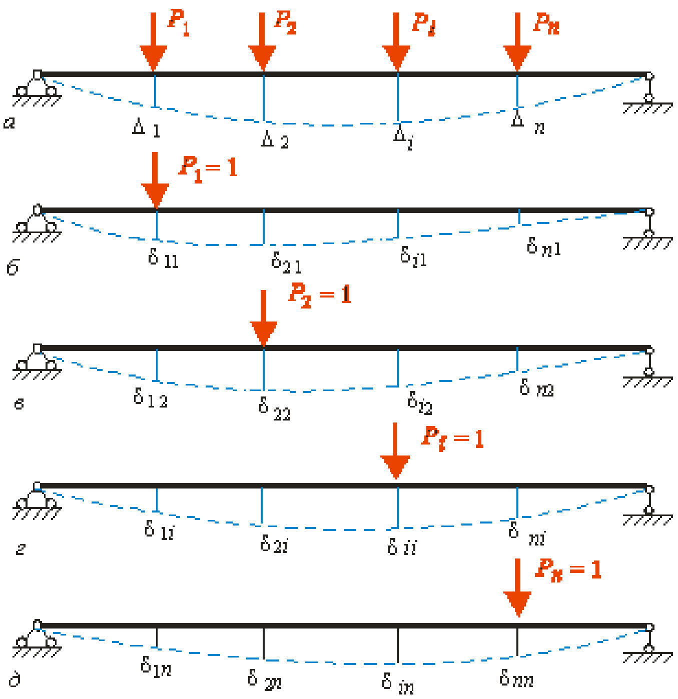

Рис.3.5

$$\Delta_i = \delta_{i1} P_1 + \delta_{i2} P_2 + \ldots + \delta_{in} P_n, \tag{3.10}$$

де δ_{ik} – переміщення від дії сили $P_k = 1$, де $k = 1, 2, \ldots, n$. Отже, можна записати

$$\begin{array}{lllllllll} \Delta_1 & = & \delta_{11} P_1 & + & \delta_{12} P_2 & + & \ldots & + & \delta_{1n} P_n, \\ \Delta_2 & = & \delta_{21} P_1 & + & \delta_{22} P_2 & + & \ldots & + & \delta_{2n} P_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_n & = & \delta_{n1} P_1 & + & \delta_{n2} P_2 & + & \ldots & + & \delta_{nn} P_n. \end{array} \tag{3.11}$$

або в матричній формі

$$\vec{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{B}\,\vec{\mathbf{P}}, \tag{3.12}$$

Тут позначено: $\vec{\mathbf{\Delta}}^{\mathbf{T}} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \ldots \quad \Delta_n\}$ – вектор узагальнених переміщень, $\vec{\mathbf{P}}^T = \{P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_n\}$ – вектор зовнішніх дій, $\mathbf{B}$ – квадратна матриця одиничних переміщень, тобто переміщень, які зумовлені одиничними узагальненими силами. Зазначена матриця називається **матрицею податливості**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Будь-який коефіцієнт матриці податливості δ_{ij} характеризує величину переміщення в напрямі *i* від дії в напрямі *j* одиничної узагальненої сили.

Із матричної рівності (3.12) можна мати величини сил, які відповідають одиничним узагальненим переміщенням:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{K}\vec{\mathbf{\Delta}} \tag{3.14}$$

У цьому виразі $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}$ – квадратна матриця, яку називають **матрицею жорсткості**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

У координатній формі рівність (3.14) має вигляд

$$\begin{array}{lllllll} P_1 & = & k_{11}\Delta_1 & + & k_{12}\Delta_2 & + \ \ldots \ + & k_{1n}\Delta_n, \\ P_2 & = & k_{21}\Delta_1 & + & k_{22}\Delta_2 & + \ \ldots \ + & k_{2n}\Delta_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \ \ldots & \ldots \\ P_n & = & k_{n1}\Delta_1 & + & k_{n2}\Delta_2 & + \ \ldots \ + & k_{nn}\Delta_n. \end{array} \qquad (3.16)$$

Для визначення фізичного змісту коефіцієнтів матриці жорсткості покладемо в співвідношеннях (3.16) всі переміщення, окрім одного, такими, що дорівнюють нулю. Наприклад, нехай $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_4 = \ldots = \Delta_n = 0$, а $\Delta_2 = 1$. Тоді з першого рівняння $P_1 = k_{12}$, тобто коефіцієнт матриці жорсткості при зазначених умовах дорівнює першій узагальненій силі в напрямі другого узагальненого переміщення. І взагалі можна сказати, що **довільний коефіцієнт k_{ij} дорівнює силі P_i від дії примусового переміщення $\Delta_j = 1$ за умови, що всі інші переміщення дорівнюють нулю**.

Таким чином, елементи матриці жорсткості можна трактувати як опорні реакції в'язей, що накладені на систему в напрямі можливих переміщень (рис.3.6). Тому матрицю жорсткості інколи називають матрицею реакцій.

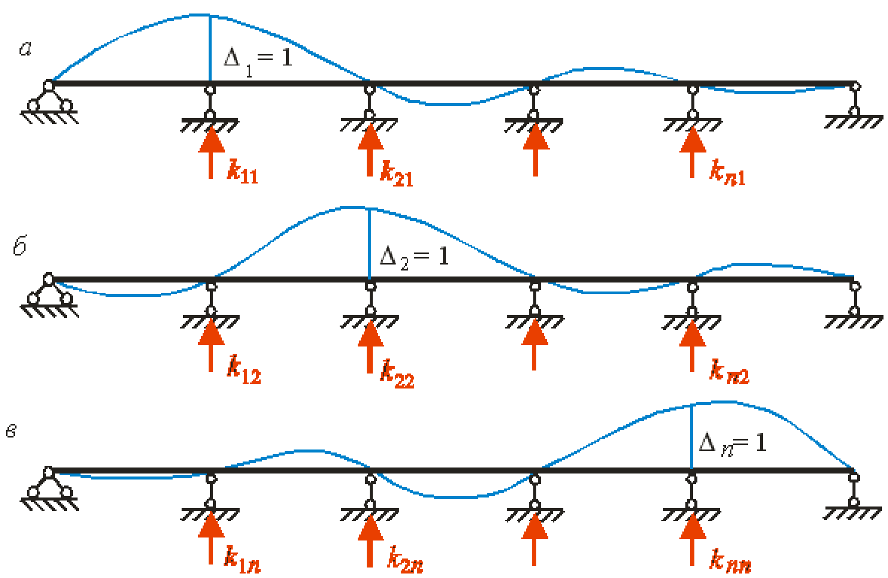

Рис.3.6

3.5. Інтеграл Мора

Найзагальнішим методом обчислення переміщень у стержневих системах є метод Мора. Він випливає з принципу можливих переміщень і дозволяє визначати переміщення точок системи через зусилля в її елементах.

Принцип можливих переміщень, який сформульовано Лагранжем для систем, складених з тіл, що не деформуються, є фундаментальним принципом механіки. Згідно з цим принципом для будь-якої зрівноваженої системи сума робіт всіх прикладених зовнішніх сил на віртуальних переміщеннях дорівнює нулю. Для пружних систем означений принцип може бути сформульований таким чином: **в будь-якій пружній зрівноваженій системі сума робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил на будь-яких можливих нескінченно малих переміщеннях дорівнює нулю**; тобто

$$A+U=0. \qquad (3.17)$$

У цьому виразі A – робота зовнішніх, а U – внутрішніх сил. Зовнішні сили – це навантаження, що прикладені до конструкції, та опорні реакції, внутрішні – це зусилля, які виникають в елементах споруди при її деформуванні. Можливими вважаються переміщення, які припускаються існуючими в'язями.

Розглянемо два напружено-деформованих стани стержневої системи. Перший стан (рис.3.7,а) зумовлено зовнішніми навантаженнями, які, по суті, можуть бути довільними. Назвемо цей напружено-деформований стан стержневої системи **вантажним,** або станом P.

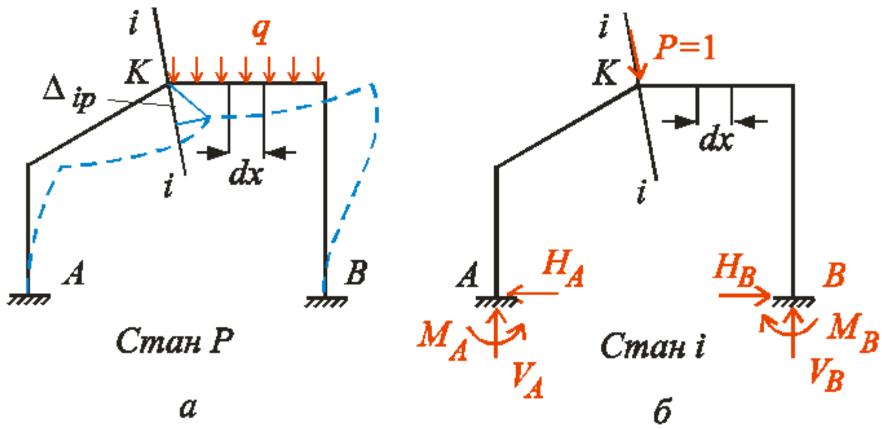

Рис.3.7

У другому стані на стержневу систему вздовж деякої довільної прямої i-i діє одна зосереджена сила, яка дорівнює одиниці. Такий стан (стан i) будемо називати **допоміжним,** або **одиничним**. Внутрішні зусилля допоміжного стану позначатимемо як $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$. Обидва ці стани є можливими і, згідно з принципом Лагранжа, сума робіт одного стану на переміщеннях іншого має дорівнювати нулю. Розглянемо можливу роботу сил стану i на переміщеннях стану P:

$$A_{ip}+U_{ip}=0. \qquad (3.18)$$

Можлива робота зовнішніх сил дорівнює добутку одиничної сили стану *i* на відповідне переміщення стану *P*

$$A_{ip} = 1 \cdot \Delta_{ip}. \tag{3.19}$$

Підставимо роботу зовнішніх сил (3.19) і можливу роботу внутрішніх сил (3.8) у співвідношення (3.18). Маємо

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l (\bar{N}_i \varepsilon_p dx + \bar{M}_i \kappa_p dx + \bar{Q}_i \gamma_p dx). \tag{3.20}$$

Ця формула, посутньо, є наближеною, оскільки переміщення реальних систем мають скінченні значення. Чим меншу величину становлять переміщення, тим формула точніша. Проте оскільки жорсткості елементів реальних споруд достатньо великі, цю формулу можна розглядати як точну. Там, де точність виявляється недостатньою, можуть бути застосовані методи розв'язання геометрично нелінійних задач.

При дії на споруду нерухомого зовнішнього навантаження деформації можуть бути виражені через внутрішні сили. Для фізично-лінійних систем

$$\varepsilon_p = \frac{N_p}{EA}, \quad \kappa_p = \frac{1}{\rho_p} = \frac{M_p}{EI}, \quad \gamma_p = \frac{\eta Q_p}{GA}, \tag{3.21}$$

де η – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від форми перерізу стержня і обчислюється за формулою

$$\eta = A \int_A \left(\frac{S_x^{\text{відс}}}{I_x b_y} \right)^2 dA. \tag{3.22}$$

(Зокрема, для прямокутного перерізу η=1,2).

Із урахуванням (3.21) формула для обчислення переміщень (3.20) набирає вигляду

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_P}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}_i Q_P}{GA} dx. \tag{3.23}$$

Цей вираз називається формулою **Максвелла–Мора**. За допомогою цієї формули можна обчислити будь-яке переміщення в будь-якій стержневій системі через внутрішні зусилля двох її станів. Перший стан – вантажний – зумовлено дією зовнішніх навантажень, другий – допоміжний – дією одиничної узагальненої сили, яка відповідає переміщенню, що розшукується.

Таким чином, для обчислення будь-якого переміщення необхідно:

- Визначити зусилля M_p, N_p, Q_p від зовнішнього навантаження.
- Обрати допоміжний стан *i*, відкинувши зовнішні навантаження і приклавши одиничну узагальнену силу, що відповідає переміщенню.
- Визначити зусилля $\overline{M}_i, \overline{N}_i, \overline{Q}_i$ у допоміжному стані.
- Обчислити переміщення за формулою Максвелла-Мора (3.23).

3.6. Окремі випадки застосування формули Максвелла–Мора

Величини кожного з трьох доданків у формулі Максвелла–Мора характеризують внесок того чи іншого виду внутрішніх зусиль в переміщення, що розшукується. На підставі аналізу цих доданків можна дійти висновку, що для різного виду конструкцій нехтування деякими видами зусиль мало позначається на величині переміщення. Так, для балок і рам, деформування яких відбувається переважно за рахунок згину, можна знехтувати впливом поздовжніх і поперечних сил. У такому разі формула Максвелла–Мора матиме вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx. \tag{3.24}$$

Співвідношення (3.24) називають **інтегралом Мора.**

Для ферм, в стержнях яких існують поздовжні деформації, можна записати

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_P}{EA} dx. \tag{3.25}$$

Для арок

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_P}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_P}{EI} dx. \tag{3.26}$$

3.7. Обчислення інтеграла Мора

Інтеграл Мора може бути обчислений або безпосереднім інтегруванням, або за допомогою прийомів чисельного інтегрування. В практичних задачах, як правило, використовують два прийоми чисельного інтегрування: **правило Верещагіна** і **формулу Сімпсона– Корноухова**. Процедура обчислення інтеграла Мора в такому разі називають **множенням епюр**.

За правилом Верещагіна для обчислення інтеграла $\int_0^l \overline{M}_i M_p dx$ достатньо помножити площу епюри M_P на ординату епюри $\overline{M}_i$, що береться під центром тяжіння епюри M_P (рис.3.8):

$$\int_0^l \overline{M}_i M_p dx = A_p y_i . \tag{3.27}$$

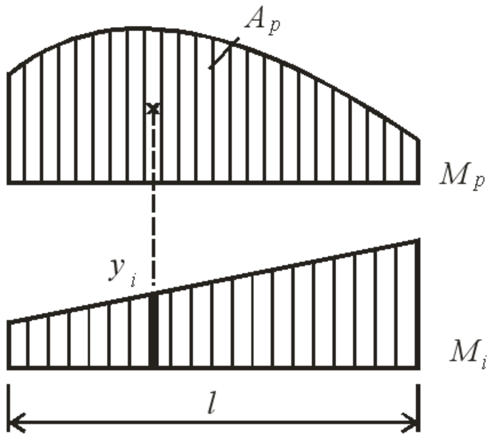

Рис.3.8

Якщо ордината y_i і площа A_p розташовані по один і той самий бік стержня, добуток береться зі знаком “плюс”.

Насправді, розглянемо обчислення інтеграла $\int_0^l \overline{M}_i M_P dx$ на прикладі перемноження двох епюр (рис.3.9), одна з яких M_P має довільний характер, а друга – $\overline{M}_i$ обмежена прямою.

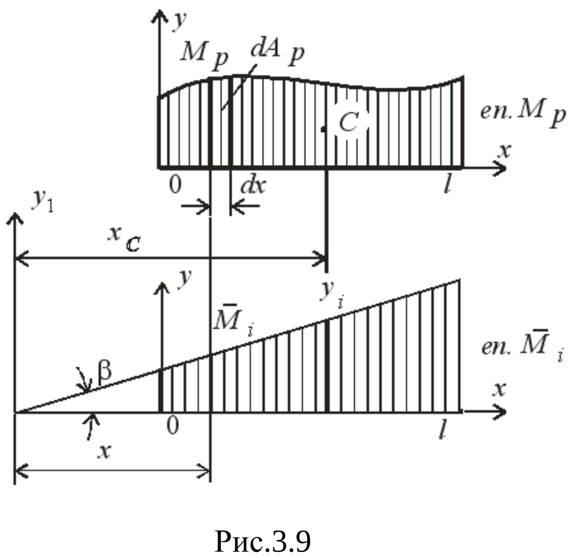

Рис.3.9

Добуток $M_P dx$ є елементарною площею, яка береться на епюрі M_P :

$$dA_P = M_P dx\,.$$

Ординату на прямолінійній епюрі можна представити у вигляді $\bar{M}_i = x\,\mathrm{tg}\,\beta$. Зрештою інтеграл набуває вигляду:

$$\int_0^l \bar{M}_i M_P dx = \int_0^l x\,\mathrm{tg}\,\beta\, dA_P = \mathrm{tg}\,\beta \int_0^l x\, dA_P\,.$$

Інтеграл у правій частині співвідношення – це статичний момент S_P площі епюри M_P стосовно осі y_1, яка проходить через точку перетину епюри $\bar{M}_i$ з прямою, що збігається з віссю стержня. Як відомо, статичний момент площі дорівнює добутку площі на координату центра її тяжіння $S_P = A_P x_C$. На цій підставі маємо

$$\int_0^l \bar{M}_i M_P dx = x_C A_P\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

І нарешті, помітивши, що $x_C tg\beta = y_i$, остаточно одержуємо:

$$\int_0^l \bar{M}_i M_P dx = A_P y_i\,.$$

Необхідно звернути увагу:

- **принаймні одна з епюр, які перемножуються, має бути прямолінійною;**
- **ордината y_i повинна бути взята на прямолінійній епюрі.**

Формула Сімпсона–Корноухова – це окремий випадок відомої з математичного аналізу формули Сімпсона (формули парабол) для обчислення визначених інтегралів, коли інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки (рис.3.10):

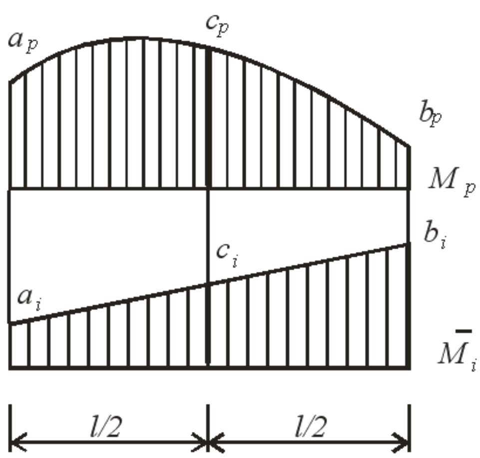

Рис.3.10

$$\int_0^l \bar{M}_i M_P dx = \frac{l}{6}\left(a_i a_p + 4c_i c_P + b_i b_P\right) \tag{3.28}$$

При використанні формули Сімпсона–Корноухова необхідно, щоб **обидві перемножувані епюри не мали зламів, розривів та точок перегину. В противному разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.**

Приклад 3.1. Обчислити кут повороту в перерізі *k* рами (рис.3.11,а).

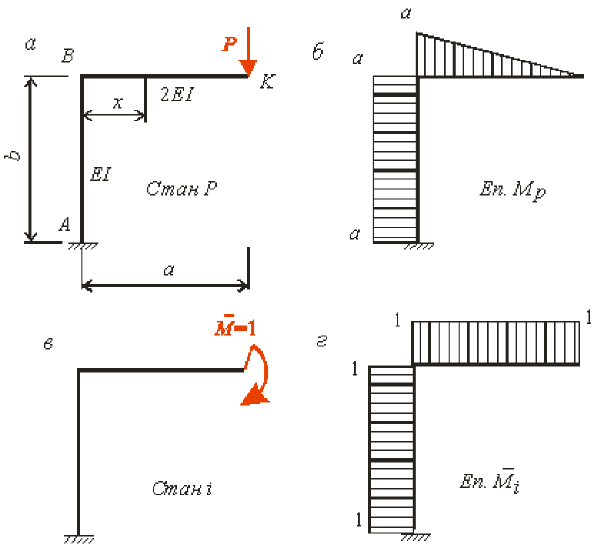

Рис.3.11

Процес розв'язання містить чотири етапи:

1. Визначення зусилля від зовнішнього навантаження. На ригелі: $M_p = P(a-x)$, на стійці $M_p = Pa$. Епюру M_p побудовано на рис.3.11,б.
2. Створення допоміжного стану. Допоміжний стан (стан *i*) зображено на рис.3.11,в.
3. Визначення зусиль в допоміжному стану: на ригелі $\bar{M}_i = 1$, на стояку $\bar{M}_i = 1$. Епюру $\bar{M}_i$ побудовано на рис.3.11,г.
4. Обчислення переміщення за формулою Мора. Це можна зробити в різні способи.

- **Безпосереднє інтегрування:**

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx + \int_B^K \frac{\bar{M}_i M_P}{2EI} dx =$$

$$= \int_0^b \frac{1 \cdot Pa}{EI} dx + \int_0^a \frac{P(a-x) \cdot 1}{2EI} dx = \frac{Pab}{EI} + \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} = \frac{Pa}{EI}\left(b + \frac{a}{4}\right).$$

- **За правилом Верещагіна:**

$$\Delta_{ip} = \sum\int_l \frac{M_i M_P}{EI}dx = \int_A^B \frac{M_i M_P}{EI}dx + \int_B^K \frac{M_i M_P}{2EI}dx =$$
$$= \frac{1}{EI}(Pa\cdot b)\cdot 1 + \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}Pa\cdot a\right)\cdot 1 = \frac{Pa}{EI}\left(b+\frac{a}{4}\right).$$

- **За формулою Сімпсона–Корноухова:**

$$\Delta_{ip} = \sum\int_l \frac{M_i M_P}{EI}dx = \int_A^B \frac{M_i M_P}{EI}dx + \int_B^K \frac{M_i M_P}{2EI}dx =$$
$$= \frac{b}{6EI}\left(1\cdot Pa + 4\cdot 1\cdot Pa + 1\cdot Pa\right) +$$
$$+ \frac{a}{6\cdot 2EI}\left(Pa\cdot 1 + 4\cdot\frac{Pa}{2}\cdot 1 + 0\right) = \frac{Pa}{EI}\left(b+\frac{a}{4}\right).$$

3.8. Переміщення від дії температури

Як відомо з фізики, тіла при нагріванні розширюються, а при охолодженні – скорочуються. Тому дія на споруду температури спричиняє деформування конструкцій. При цьому в статично визначуваних системах ані внутрішніх зусиль, ані опорних реакцій не виникає. А відтак формула Мора у вигляді (3.23) непридатна для обчислення температурних переміщень і виникає потреба мати ще один варіант формули, призначений власне для розрахунків на дію температури.

Запишемо інтеграл Мора у вигляді, який є аналогічним (3.20):

$$\Delta_{it} = \sum\int_l (\bar{N}_i \varepsilon_t dx + \bar{M}_i \kappa_t dx + \bar{Q}_i \gamma_t dx). \tag{3.29}$$

Виразимо деформації нескінченно малого елемента (рис.3.12) від дії температури.

Припустимо для означеності, що $t_1 > t_2 > 0$. Тоді видовження верхнього волокна становитиме $\alpha t_1 dx$, а нижнього – $\alpha t_2 dx$, де α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу (для сталі і для бетону $\alpha \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$).

Відносне видовження осі елемента стержня

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha t_1 dx}{hdx}y + \frac{\alpha t_2 dx}{hdx}(h-y) = \frac{\alpha}{h}\left[t_1 y + t_2(h-y)\right],$$

кривизна

$$\kappa_t = \frac{1}{\rho} = \frac{dx}{dx \cdot \rho} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx}{h} = \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{h},$$

кут зсуву γ_t=0.

Таким чином,

$$\Delta_{it} = \sum \int_0^l \bar{N}_i \frac{\alpha}{h} [t_1 y + t_2 (h - y)] dx + \sum \int_0^l \bar{M}_i \frac{\alpha | t_1 - t_2 |}{h} dx . \tag{3.30}$$

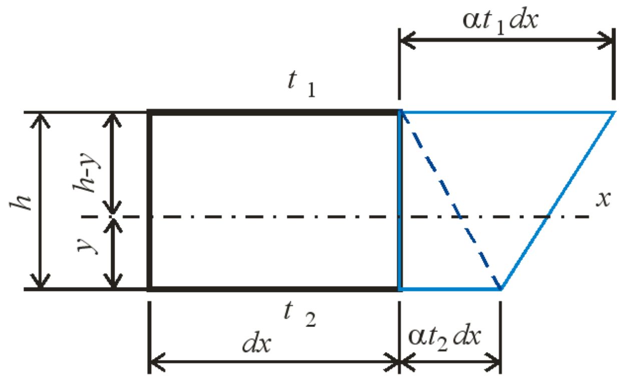

Рис.3.12

Оскільки в рамах згинальні моменти не мають знаків, у другому доданку різниця температур береться за модулем, і добуток береться зі знаком плюс, якщо розтягнені волокна на стержні в допоміжному стані збігаються з розтягненими волокнами від дії температури. Якщо постійні величини винести за знак інтеграла, одержимо:

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha}{h} [t_1 y + t_2 (h - y)] \int_0^l \bar{N}_i dx + \sum \frac{\alpha | t_1 - t_2 |}{2} \int_0^l \bar{M}_i dx . \tag{3.31}$$

Позначимо:

$$A_{Ni} = \int_0^l \bar{N}_i dx, \qquad A_{Mi} = \int_0^l \bar{M}_i dx , \tag{3.32}$$

де A_{Mi}, A_{Ni} – відповідно площі епюри $\bar{M}_i$ і епюри $\bar{N}_i$ на стержні в допоміжному стані.

З урахуванням позначень (3.32) остаточно маємо:

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha}{h} [t_1 y + t_2 (h - y)] A_{Ni} + \sum \frac{\alpha | t_1 - t_2 |}{2} A_{Mi} . \tag{3.33}$$

В окремому випадку, якщо переріз стержня симетричний, тобто y=h/2, вираз (3.33) набирає вигляду:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} A_{Ni} + \sum \alpha \frac{|t_1 - t_2|}{h} A_{Mi} . \tag{3.34}$$

У разі, коли елементи споруди піддаються рівномірному нагріванню або охолодженню, тобто $t_1=t_2=t$, маємо:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha t A_{Ni} . \tag{3.35}$$

Приклад 3.2. Обчислити кут повороту в шарнірі *B* рами, яка перебуває під дією температури (рис.3.13,а). Стержні рами мають прямокутний переріз. Висота перерізу стояків становить 0,2 м, а ригеля – 0,4 м. Матеріал – залізобетон ($\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}$ град$^{-1}$).

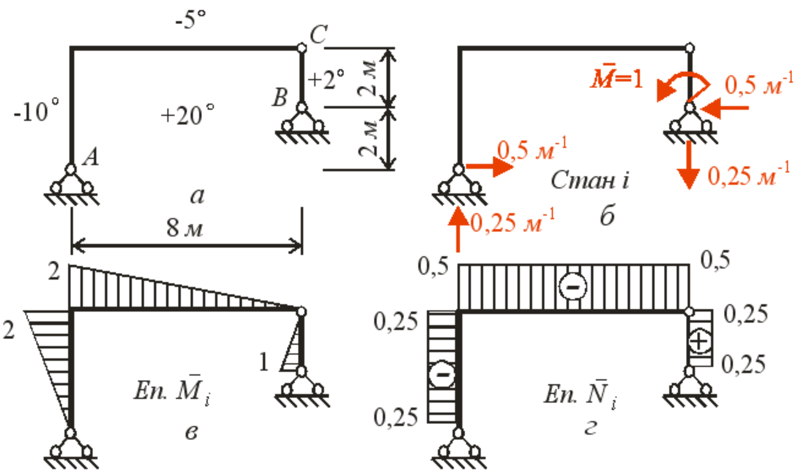

Рис.3.13

Допоміжний стан утворюється шляхом прикладання одиничного зосередженого моменту до опори *B*. Схему завантаження й опорних реакцій у допоміжному стані зображено на рис.3.13,б. Відповідні епюри згинаючих моментів і поздовжніх сил побудовано на рис.3.13,в і рис.3.13,г відповідно. Переміщення обчислюємо за формулою (3.34):

$$\Delta_{it} = 1{,}2\cdot10^{-5}\cdot\left(+\frac{|-10-20|}{0{,}2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot4+\frac{|-5-20|}{0{,}4}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot8-\frac{|20-2|}{0{,}2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\right)+$$

$$+1{,}2\cdot10^{-5}\cdot\left(\frac{-10+20}{2}\cdot0{,}25\cdot4+\frac{-5+20}{2}\cdot0{,}25\cdot8+\frac{20+2}{2}\cdot(-0{,}25)\cdot2\right)=0{,}0123\ \text{рад}^{-1}.$$

3.9. Переміщення від примусового зміщення опор

Якщо опори споруди зміщуються, то споруда змінює своє розташування, а її точки одержують переміщення. При цьому неважко впевнитись у тому, що в статично визначуваних системах опорні реакції, внутрішні зусилля і деформації елементів дорівнюють нулю.

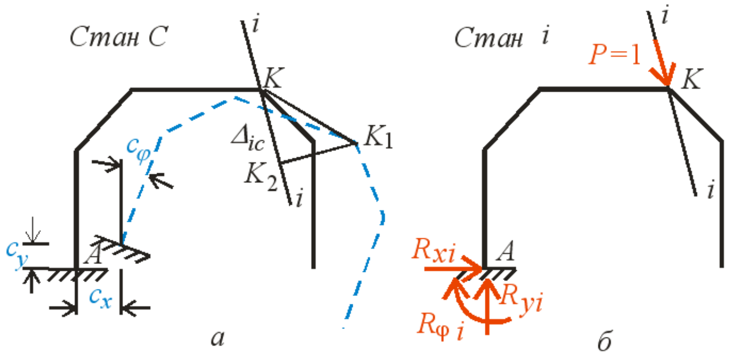

Рис.3.14

Для обчислення якогось переміщення, зумовленого зміщенням опор споруди, скористаємось принципом можливих переміщень. Розглянемо два можливих стани споруди.

Перший стан *C* (див.рис.3.14,а) зумовлено поступальними переміщеннями затиснення c_x і c_y в напрямі координатних осей і поворотом на кут c_φ. Як вже згадувалось, деформації елементів у цьому стані не виникають. У допоміжному стані *i* (див. рис.3.14,б) на раму в напрямі *i-i* діє одинична зосереджена сила, яка спричинює опорні реакції R_{xi}, R_{yi} і $R_{\varphi i}$. Розглянемо роботу сил стану *i* на переміщеннях стану *C*. Згідно з принципом можливих переміщень

$$A_{ic} + U_{ic} = 0 \tag{3.36}$$

Деформації в стані *C* відсутні, тому робота внутрішніх сил U_{ic}=0. Отже, з (3.36) одержуємо, що

$$A_{ic} = 0. \tag{3.37}$$

З іншого боку, робота зовнішніх сил

$$A_{ic} = 1 \cdot \Delta_{ic} + R_{xi} \cdot c_x + R_{yi} \cdot c_y + R_{\varphi i} \cdot c_\varphi . \tag{3.38}$$

На підставі (3.37) і (3.38) можна записати:

$$\Delta_{ic} = -R_{xi} \cdot c_x - R_{yi} \cdot c_y - R_{\varphi i} \cdot c_\varphi , \tag{3.39}$$

або в загальному вигляді:

$$\Delta_{ic} = -\sum R_{ji} c_j . \tag{3.40}$$

У цьому виразі R_{ji} – опорна реакція R_j допоміжного стану *i*, c_j – відповідне вимушене зміщення опори у стані *C*.

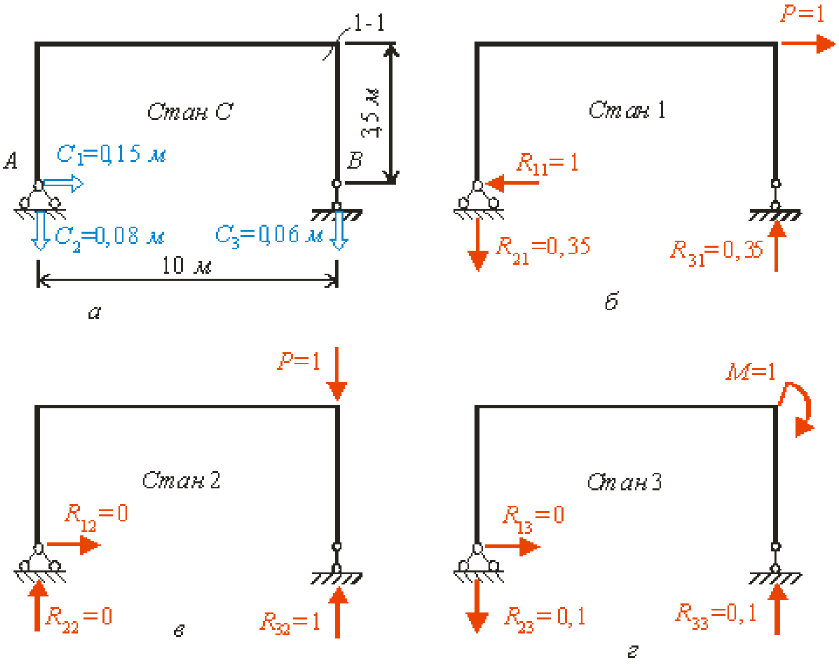

Рис.3.15

Таким чином, **переміщення, яке зумовлене зміщеннями опор, обчислюється як від'ємна сума добутків опорних реакцій допоміжного стану на відповідні вимушені зміщення опор**.

Приклад 3.3. Визначити поступальні переміщення і кут повороту перерізу 1-1 рами (рис.3.15,а), що зумовлюються переміщеннями її опор.

Для обчислення вертикального і горизонтального переміщень, а також для кута повороту перерізу 1–1 створюємо допоміжні стани (рис.3.15,б–г). На цих схемах зображено опорні реакції цих станів. Обчислимо переміщення за формулою (3.40):

- горизонтальне переміщення:

$$\Delta_{1C} = -\sum_{j=1}^{3} R_{j1}C_j = -(-1\cdot 0{,}15 + 0{,}36\cdot 0{,}08 - 0{,}35\cdot 0{,}06) = -0{,}1422\,м;$$

- вертикальне переміщення:

$$\Delta_{2C} = -\sum_{j=1}^{3} R_{j2}C_j = -(-1\cdot 0{,}06) = 0{,}06\,м;$$

- кут повороту:

$$\Delta_{3C} = -\sum_{j=1}^{3} R_{j3}C_j = -(0{,}1\cdot 0{,}08 - 0{,}1\cdot 0{,}06) = -0{,}02\,рад.$$

3.10. Повна формула для обчислення переміщень

У практичних розрахунках можливі випадки, коли стержневі системи перебувають під одночасною дією зовнішніх сил, примусового переміщення опор, а також температурного поля. В цьому разі повне переміщення може бути визначене на підставі принципу суперпозиції як сума переміщень від кожної дії окремо:

$$\Delta_{iS} = \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{ic}.$$

Проте можна скористатися не окремими формулами переміщень від окремих дій, а повною формулою Мора, яка може бути записана як сума переміщень від силових дій (3.23), впливу температури (3.33) і примусового переміщення опор (3.40):

$$\begin{aligned}\Delta_{iS} = \; & \sum\int_l \frac{\bar{N}_i N_P}{EA}dx + \sum\int_l \frac{\bar{M}_i M_P}{EI}dx + \sum\int_l \frac{\eta \bar{Q}_i Q_P}{GA}dx + \\ & + \sum\frac{\alpha}{h}\left[t_1 y + t_2(h-y)\right]A_{Ni} + \sum\frac{\alpha|t_1 - t_2|}{2}A_{Mi} - \sum R_{ji}c_j.\end{aligned} \tag{3.41}$$

3.11. Теореми взаємності

3.11.1.Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті)

Розглянемо лінійно-деформівну систему, наприклад балку, під дією двох статично прикладених узагальнених сил P_1 і P_2 (рис.3.16).

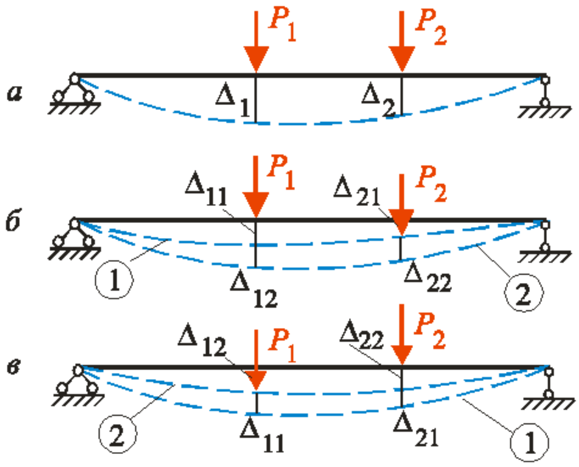

Рис.3.16

Повні прогини балки під силами від одночасної дії обох сил на підставі принципу суперпозиції можна представити як суми прогинів від дії кожної сили окремо:

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12},$$

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22}.$$

Кінцева деформація (рис.3.16,а) не залежить від черговості прикладання сил, отже, розглянемо два способи завантаження:

1. Спочатку до балки статично прикладається сила P_1 (рис.3.16,б), яка викликає прогини 1 і виконує дійсну роботу

$$A_{11} = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11},$$

а потім до деформованої схеми прикладається сила P_2. Зрештою балка одержує додаткові прогини 2, і дійсну роботу при цьому виконує сила P_2:

$$A_{22} = \frac{1}{2} P_2 \cdot \Delta_{22}.$$

На значення цих додаткових прогинів сила P_1 не впливає, оскільки її величина залишається незмінною. Тому робота її є можливою:

$$A_{12} = P_1 \cdot \Delta_{12}.$$

Повна робота, яку здійснюють обидві сили

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \cdot \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12}.$$

2. Спочатку до балки прикладається сила P_2 (рис3.16,в),. Вона викликає прогини 2 і здійснює дійсну роботу A_{22}. Після цього до деформованої схеми статично прикладається сила P_1. Балка одержує додаткові прогини 1. Робота A_{11}, яку виконує ця сила, також буде дійсною. При цьому величина сили P_2 залишається незмінною, а відтак на величини цих додаткових прогинів не впливає. Отже, її робота A_{21} повинна розглядатися як можлива:

$$A_{21} = P_2 \cdot \Delta_{21}.$$

Повна робота в цьому випадку матиме вигляд

$$A = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2} P_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11} + P_2 \cdot \Delta_{21}.$$

Порівнюючи повну роботу в обох випадках доходимо висновку, що

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}. \qquad (3.42)$$

Якщо є два зрівноважених стани пружної системи, то робота сил першого стану на переміщеннях другого дорівнює роботі сил другого стану на переміщеннях першого:

$$A_{12} = A_{21}. \qquad (3.43)$$

Положення, яке щойно було доведене, відоме під назвою **теореми про взаємність робіт,** або **теореми Бетті**.

3.11.2.Теорема про взаємність переміщень (теорема Максвелла)

Якщо в (3.42) покласти, що $P_1 = P_2 = P$, матимемо

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}.$$

Коли, до того ж, узагальнені сили дорівнюють одиниці $P_1 = P_2 = 1$, то

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \qquad (3.44)$$

Рівність (3.44) виражає теорему про взаємність переміщень: **для двох одиничних станів пружної системи переміщення в першому стані в напрямі узагальненої сили другого стану чисельно дорівнює переміщенню в другому стані в напрямі узагальненої сили першого**.

Із теореми про взаємність переміщень, яка також відома як теорема Максвелла, випливає, що матриця податливості (див. п. 3.4.)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

є симетричною стосовно головної діагоналі.

3.11.3.Теорема про взаємність реакцій (теорема Релея)

Розглянемо для прикладу пружну систему у вигляді суцільної багатопрогонової балки (рис.3.17) у двох станах *i* та *j*, зумовлених примусовими переміщеннями опор Δ_i та Δ_j відповідно.

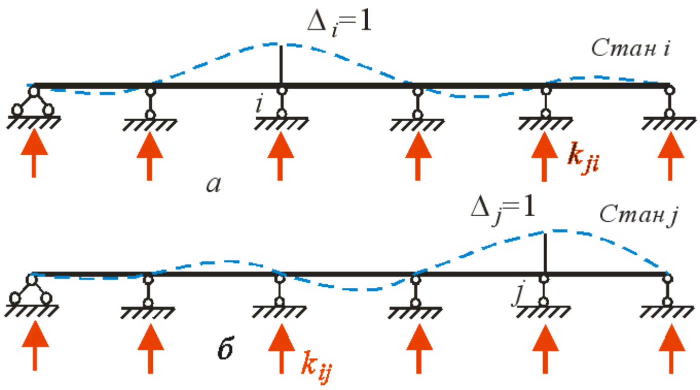

Рис.3.17

В обох станах балка вигинається і на її опорах виникають опорні реакції, які позначимо: k_{ij} – реакція на опорі *i* в стані *j*, k_{ji} – реакція на опорі *j* в стані *i*. Тоді з теореми про взаємність робіт випливає, що

$$k_{ij} \cdot \Delta_i = k_{ji} \cdot \Delta_j .$$

Якщо переміщення опор дорівнюють одиниці ($\Delta_i = 1$, $\Delta_j = 1$), маємо

$$k_{ij} = k_{ji} . \tag{3.45}$$

Отже **реакція в'язі *i*, що зумовлена одиничним переміщенням в'язі *j* пружної системи, дорівнює реакції в'язі *j* від одиничного переміщення в'язі *i*.** Це положення називають теоремою про взаємність реакцій. На підставі теореми (3.45) можна дійти до висновку, що матриця жорсткості пружної системи (див. п. 3.4).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

завжди симетрична відносно головної діагоналі.

3.11.4. Теорема про взаємність реакцій і переміщень

Розглянемо таку саму суцільну багатопрогонову балку в інших одиничних станах (рис.3.18).

У стані *i* до балки прикладена одинична зосереджена сила $P_i = 1$ (рис.3.18,а), а в стані *j* примусово переміщується опора *j* (рис.3.18,б).

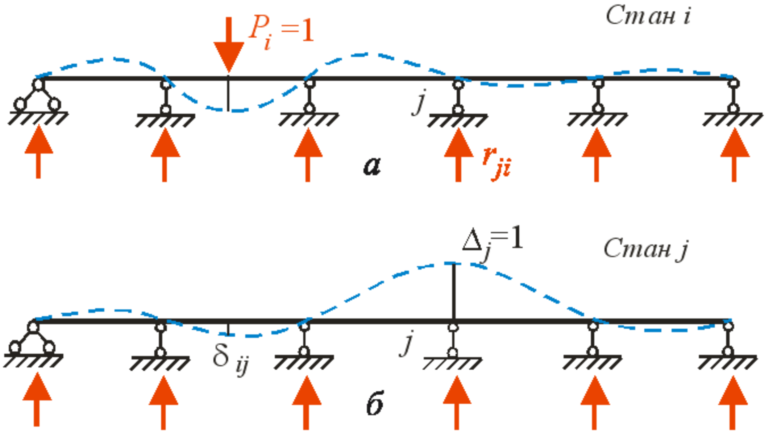

Рис.3.18

На підставі теореми Бетті можна записати:

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

Однак робота A_{ji}=0, оскільки силами у стані *j* є опорні реакції, а опори стану *i* не переміщуються. Отже, робота сил стану *i* на переміщеннях стану *j* також дорівнює нулю:

$$A_{ij} = P_i\delta_{ij} + r_{ji}\Delta_j = 0.$$

Звідси

$$r_{ji} = -\delta_{ij}. \tag{3.46}$$

Реакція в'язі *j*, що зумовлена дією на пружну систему сили $P_i = 1$, дорівнює за величиною і протилежна за знаком переміщенню в напрямі сили $P_i = 1$ від одиничного переміщення в'язі *j*.