Розв'язання задач на розклад Тейлора

Задача

Розкласти за степенями $x - 3$ багаточлен $y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21$.

Розв'язання

Задачу можна розв'язати простим діленням багаточленів:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 - 3x^3 + 4x^2 \quad - 5x - 21\big) \div \big(x - 3\big) = x^3 + 4x + 7 \\
\underline{\;-x^4 + 3x^3\;} \\
\qquad\qquad\quad 4x^2 \quad - 5x \\
\qquad\qquad \underline{-\,4x^2 + 12x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 7x - 21 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\,7x + 21} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Розв'язання

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(\; x^3 & & +4x & +7\big) & \div \big(x-3\big) = x^2+3x+13+\dfrac{46}{x-3} \\
-\,x^3 & +3x^2 & & & \\
\hline
 & 3x^2 & +4x & & \\
 & -\,3x^2 & +9x & & \\
\cline{2-3}
 & & 13x & +7 & \\
 & & -\,13x & +39 & \\
\cline{3-4}
 & & & 46 &
\end{array}
$$

Розв’язання

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad x^2 + 3x + 13 \big) \div \big(x - 3\big) = x + 6 + \dfrac{31}{x-3} \\
\underline{- \, x^2 + 3x \phantom{{}+13}} & \\
6x + 13 & \\
\underline{- \, 6x + 18} & \\
31 &
\end{array}
$$

Розв'язання

У результаті маємо:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 = (x-3)((((x-3)+9)(x-3)+31)(x-3)+46)$$

Розв'язання

У результаті маємо:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 = (x-3)((((x-3)+9)(x-3)+31)(x-3)+46)$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 = (x-3)^4 + 9(x-3)^3 + 31(x-3)^2 + 46(x-3)$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5 = 46$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5 = 46$$

$$y'' = 12x^2 - 18x + 8 \Rightarrow y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 8$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5 = 46$$

$$y'' = 12x^2 - 18x + 8 \Rightarrow y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 8 = 62$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5 = 46$$

$$y'' = 12x^2 - 18x + 8 \Rightarrow y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 8 = 62$$

$$y''' = 24x - 18 \Rightarrow y'''(3) = 24 \cdot 3 - 18$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5 = 46$$

$$y'' = 12x^2 - 18x + 8 \Rightarrow y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 8 = 62$$

$$y''' = 24x - 18 \Rightarrow y'''(3) = 24 \cdot 3 - 18 = 54$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання цього розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 3$:

$$y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 21 \Rightarrow y(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 21 = 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \Rightarrow y'(3) = 4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 5 = 46$$

$$y'' = 12x^2 - 18x + 8 \Rightarrow y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 8 = 62$$

$$y''' = 24x - 18 \Rightarrow y'''(3) = 24 \cdot 3 - 18 = 54$$

$$y^{IV} = 24 \Rightarrow y^{IV}(3) = 24$$

Розв'язання

Таким чином,

$$y(x) = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Розв'язання

Таким чином,

$$y(x) = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= 0 + \frac{46}{1!}(x-3) + \frac{62}{2!}(x-3)^2 + \frac{54}{3!}(x-3)^3 + \frac{24}{4!}(x-3)^4$$

Розв'язання

Таким чином,

$$y(x) = y(a) + \frac{y'(a)}{1!}(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= 0 + \frac{46}{1!}(x-3) + \frac{62}{2!}(x-3)^2 + \frac{54}{3!}(x-3)^3 + \frac{24}{4!}(x-3)^4 =$$

$$= 46(x-3) + 31(x-3)^2 + 9(x-3)^3 + (x-3)^4$$

Задача

Розкласти багаточлен $f(x) = x^7 - 4x^4 - 8$ за степенями двочлена $x - 2$.

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

$$f'' = 42x^5 - 48x^2 \Rightarrow f''(2) = 42 \cdot 2^5 - 48 \cdot 2^2$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

$$f'' = 42x^5 - 48x^2 \Rightarrow f''(2) = 42 \cdot 2^5 - 48 \cdot 2^2 = 1152$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

$$f'' = 42x^5 - 48x^2 \Rightarrow f''(2) = 42 \cdot 2^5 - 48 \cdot 2^2 = 1152$$

$$f''' = 210x^4 - 96x \Rightarrow f'''(2) = 210 \cdot 2^4 - 96 \cdot 2$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

$$f'' = 42x^5 - 48x^2 \Rightarrow f''(2) = 42 \cdot 2^5 - 48 \cdot 2^2 = 1152$$

$$f''' = 210x^4 - 96x \Rightarrow f'''(2) = 210 \cdot 2^4 - 96 \cdot 2 = 3168$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

$$f'' = 42x^5 - 48x^2 \Rightarrow f''(2) = 42 \cdot 2^5 - 48 \cdot 2^2 = 1152$$

$$f''' = 210x^4 - 96x \Rightarrow f'''(2) = 210 \cdot 2^4 - 96 \cdot 2 = 3168$$

$$f^{IV} = 840x^3 - 96 \Rightarrow f^{IV}(2) = 840 \cdot 2^3 - 96$$

Розв'язання

Скористаємося для отримання розкладу формулою Тейлора.Для цього слід підставити до формули $a = 2$:

$$f = x^7 - 4x^4 - 8 \Rightarrow f(2) = 2^7 - 4 \cdot 2^4 - 8 = 56$$

$$f' = 7x^6 - 16x^3 \Rightarrow f'(2) = 7 \cdot 2^6 - 16 \cdot 2^3 = 320$$

$$f'' = 42x^5 - 48x^2 \Rightarrow f''(2) = 42 \cdot 2^5 - 48 \cdot 2^2 = 1152$$

$$f''' = 210x^4 - 96x \Rightarrow f'''(2) = 210 \cdot 2^4 - 96 \cdot 2 = 3168$$

$$f^{IV} = 840x^3 - 96 \Rightarrow f^{IV}(2) = 840 \cdot 2^3 - 96 = 6624$$

Розв'язання

$$f^V = 2520x^2 \Rightarrow f^V(2) = 2520 \cdot 2^2$$

Розв'язання

$$f^{V} = 2520x^2 \Rightarrow f^{V}(2) = 2520 \cdot 2^2 = 10080$$

$$f^{VI} = 5040x \Rightarrow f^{VI}(2) = 5040 \cdot 2$$

Розв'язання

$$f^{V} = 2520x^2 \Rightarrow f^{V}(2) = 2520 \cdot 2^2 = 10080$$

$$f^{VI} = 5040x \Rightarrow f^{VI}(2) = 5040 \cdot 2 = 10080$$

$$f^{VII} = 5040 \Rightarrow f^{VII}(2) = 5040$$

Розв'язання

Таким чином,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Розв'язання

Таким чином,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= 56 + \frac{320}{1!}(x-2) + \frac{1152}{2!}(x-2)^2 + \frac{3168}{3!}(x-2)^3 + \frac{6624}{4!}(x-2)^4 + \frac{10080}{5!}(x-2)^5 +$$
$$+ \frac{10080}{6!}(x-2)^6 + \frac{5040}{7!}(x-2)^7$$

Розв'язання

Таким чином,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= 56 + \frac{320}{1!}(x-2) + \frac{1152}{2!}(x-2)^2 + \frac{3168}{3!}(x-2)^3 + \frac{6624}{4!}(x-2)^4 + \frac{10080}{5!}(x-2)^5 +$$
$$+ \frac{10080}{6!}(x-2)^6 + \frac{5040}{7!}(x-2)^7 =$$

$$56+320(x-2)+576(x-2)^2+528(x-2)^3+276(x-2)^4+84(x-2)^5+14(x-2)^6+(x-2)^7$$

Задача

Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції $y = \ln(1-3x)$ за степенями x та записати залишковий член.

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

$$f(x) = \ln(1-3x) \Rightarrow f(a) = f(0) = \ln(1 - 3 \cdot 0)$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

$$f(x) = \ln(1-3x) \Rightarrow f(a) = f(0) = \ln(1-3\cdot 0) = 0$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

$$f(x) = \ln(1-3x) \Rightarrow f(a) = f(0) = \ln(1-3\cdot 0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{3}{1-3x} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -\frac{3}{1-3\cdot 0}$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

$$f(x) = \ln(1-3x) \Rightarrow f(a) = f(0) = \ln(1-3\cdot 0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{3}{1-3x} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -\frac{3}{1-3\cdot 0} = -3$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

$$f(x) = \ln(1-3x) \Rightarrow f(a) = f(0) = \ln(1 - 3\cdot 0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{3}{1-3x} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -\frac{3}{1-3\cdot 0} = -3$$

$$f''(x) = -\frac{9}{(1-3x)^2} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -\frac{9}{(1-3\cdot 0)^2}$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \ln(1-3x)$, $a = 0$, $n = 2$.

$$f(x) = \ln(1-3x) \Rightarrow f(a) = f(0) = \ln(1-3\cdot 0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{3}{1-3x} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -\frac{3}{1-3\cdot 0} = -3$$

$$f''(x) = -\frac{9}{(1-3x)^2} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = -\frac{9}{(1-3\cdot 0)^2} = -9$$

Розв'язання

$$f'''(x) = -\frac{54}{(1-3x)^3}$$

Розв'язання

$$f'''(x) = -\frac{54}{(1-3x)^3}$$

Таким чином,

$$\ln(1-3x) = 0 - \frac{3}{1!}x - \frac{9}{2!}x^2 - \frac{\frac{54}{(1-3\varepsilon)^3}}{3!}x^3 =$$

Розв'язання

$$f'''(x) = -\frac{54}{(1-3x)^3}$$

Таким чином,

$$\ln(1-3x) = 0 - \frac{3}{1!}x - \frac{9}{2!}x^2 - \frac{\frac{54}{(1-3\varepsilon)^3}}{3!}x^3 =$$

$$= -3x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{(1-3\varepsilon)^3}x^3$$

Розв'язання

Той самий результат можна отримати зі стандартного розкладу:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

Розв'язання

Той самий результат можна отримати зі стандартного розкладу:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1}$$

Розв'язання

Той самий результат можна отримати зі стандартного розкладу:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1}$$

Отже, замінюючи x на $-3x$, маємо:

$$\ln(1+x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-1)^2}{3}\left(\frac{-3x}{1-3\varepsilon}\right)^3 =$$

Розв'язання

Той самий результат можна отримати зі стандартного розкладу:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1}$$

Отже, замінюючи x на $-3x$, маємо:

$$\ln(1+x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-1)^2}{3}\left(\frac{-3x}{1-3\varepsilon}\right)^3 =$$

$$= -3x - \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{(1-3\varepsilon)^3}x^3$$

Задача

Написати формулу Тейлора для функції $y = 3x - e^{-3x}$ при $x_0 = 2$ та $n = 2$.

Розв’язання

Скористаймося готовим розкладом.

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2$$

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2$$

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow y = 3x - e^{-3x}$$

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow y = 3x - e^{-3x} = 3(t+2) - e^{-3(t+2)}$$

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow y = 3x - e^{-3x} = 3(t+2) - e^{-3(t+2)} = 6 + 3t - e^{-6} \cdot e^{-3t}$$

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow y = 3x - e^{-3x} = 3(t+2) - e^{-3(t+2)} = 6 + 3t - e^{-6} \cdot e^{-3t}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Розв'язання

Скористаймося готовим розкладом.Для цього спочатку виконаємо заміну змінної з метою перевести розклад у відомий.

$$t = x - 2 \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow y = 3x - e^{-3x} = 3(t+2) - e^{-3(t+2)} = 6 + 3t - e^{-6} \cdot e^{-3t}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Тому

$$e^{-3t} = 1 + \frac{-3t}{1} + \frac{(-3t)^2}{2!} + \frac{(-3t)^3}{3!}e^{-3\theta t}, \qquad 0 < \theta < 1$$

або

$$e^{-3t} = 1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{9}{2}t^3 e^{-3\theta t}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Розв'язання

Отже,

$$y = 6 + 3t - e^{-6} \cdot e^{-3t}$$

Розв'язання

Отже,

$$y = 6 + 3t - e^{-6} \cdot e^{-3t} = 6 + 3t - e^{-6}\left(1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{9}{2}t^3 e^{-3\theta t}\right)$$

Розв'язання

Отже,

$$y = 6 + 3t - e^{-6} \cdot e^{-3t} = 6 + 3t - e^{-6} \left(1 - 3t + \frac{9}{2} t^2 - \frac{9}{2} t^3 e^{-3\theta t} \right)$$

Виконуємо зворотну заміну $t = x - 2$:

$$y = 6 + 3(x-2) - e^{-6} \left(1 - 3(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^2 - \frac{9}{2}(x-2)^3 e^{-3\theta(x-2)} \right) \quad 0 < \theta < 1$$

Задача

Знайти три перших ненульових члени розкладу функції $y = \operatorname{tg} x - x$ за степенями x та записати залишковий член.

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

$$y = \operatorname{tg} x - x \Rightarrow y(0) = \operatorname{tg} 0 - 0$$

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

$$y = \operatorname{tg} x - x \Rightarrow y(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$$

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

$$y = \operatorname{tg} x - x \Rightarrow y(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} - 1$$

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

$$y = \operatorname{tg} x - x \Rightarrow y(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} - 1 = 0$$

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

$$y = \operatorname{tg} x - x \Rightarrow y(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} - 1 = 0$$

$$y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow y''(0) = \frac{2 \sin 0}{\cos^3 0}$$

Розв'язання

Знайдемо шукані члени наново за допомогою загальної формули Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Слід покласти $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $a = 0$.

$$y = \operatorname{tg} x - x \Rightarrow y(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} - 1 = 0$$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow y''(0) = \frac{2\sin 0}{\cos^3 0} = 0$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0 = 2$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0 = 2$$

$$y^{IV} = 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 16\sec^4 x \operatorname{tg} x \Rightarrow y^{IV}(0) = 8\sec^2 0 \operatorname{tg}^3 0 + 16\sec^4 0 \operatorname{tg} 0$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0 = 2$$

$$y^{IV} = 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 16\sec^4 x \operatorname{tg} x \Rightarrow y^{IV}(0) = 8\sec^2 0 \operatorname{tg}^3 0 + 16\sec^4 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0 = 2$$

$$y^{IV} = 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 16\sec^4 x \operatorname{tg} x \Rightarrow y^{IV}(0) = 8\sec^2 0 \operatorname{tg}^3 0 + 16\sec^4 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$y^{V} = 16\sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 88\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 16\sec^6 x$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0 = 2$$

$$y^{IV} = 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 16\sec^4 x \operatorname{tg} x \Rightarrow y^{IV}(0) = 8\sec^2 0 \operatorname{tg}^3 0 + 16\sec^4 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$y^{V} = 16\sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 88\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 16\sec^6 x \Rightarrow$$

$$y^{V}(0) = 16\sec^2 0 \operatorname{tg}^4 0 + 88\sec^4 0 \operatorname{tg}^2 0 + 16\sec^6 0$$

Розв'язання

$$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x \Rightarrow y'''(0) = 4\sec^2 0 \operatorname{tg}^2 0 + 2\sec^4 0 = 2$$

$$y^{IV} = 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 16\sec^4 x \operatorname{tg} x \Rightarrow y^{IV}(0) = 8\sec^2 0 \operatorname{tg}^3 0 + 16\sec^4 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$y^{V} = 16\sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 88\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 16\sec^6 x \Rightarrow$$

$$y^{V}(0) = 16\sec^2 0 \operatorname{tg}^4 0 + 88\sec^4 0 \operatorname{tg}^2 0 + 16\sec^6 0 = 16$$

Розв'язання

$$y^{VI} = 32 \sec^2 x \operatorname{tg}^5 x + 416 \sec^4 x \operatorname{tg}^3 x + 272 \sec^6 x \operatorname{tg} x$$

Розв'язання

$$y^{VI} = 32\sec^2 x \operatorname{tg}^5 x + 416\sec^4 x \operatorname{tg}^3 x + 272\sec^6 x \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$y^{VI}(0) = 32\sec^2 0 \operatorname{tg}^5 0 + 416\sec^4 0 \operatorname{tg}^3 0 + 272\sec^6 0 \operatorname{tg} 0$$

Розв'язання

$$y^{VI} = 32\sec^2 x \operatorname{tg}^5 x + 416\sec^4 x \operatorname{tg}^3 x + 272\sec^6 x \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$y^{VI}(0) = 32\sec^2 0 \operatorname{tg}^5 0 + 416\sec^4 0 \operatorname{tg}^3 0 + 272\sec^6 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

Розв'язання

$$y^{VI} = 32\sec^2 x \operatorname{tg}^5 x + 416\sec^4 x \operatorname{tg}^3 x + 272\sec^6 x \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$y^{VI}(0) = 32\sec^2 0 \operatorname{tg}^5 0 + 416\sec^4 0 \operatorname{tg}^3 0 + 272\sec^6 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$y^{VII} = 64\sec^2 x \operatorname{tg}^6 x + 1824\sec^4 x \operatorname{tg}^4 x + 2880\sec^6 x \operatorname{tg}^2 x + 272\sec^8 x$$

Розв'язання

$$y^{VI} = 32\sec^2 x \operatorname{tg}^5 x + 416\sec^4 x \operatorname{tg}^3 x + 272\sec^6 x \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$y^{VI}(0) = 32\sec^2 0 \operatorname{tg}^5 0 + 416\sec^4 0 \operatorname{tg}^3 0 + 272\sec^6 0 \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$y^{VII} = 64\sec^2 x \operatorname{tg}^6 x + 1824\sec^4 x \operatorname{tg}^4 x + 2880\sec^6 x \operatorname{tg}^2 x + 272\sec^8 x \Rightarrow$$

$$y^{VII}(0) = 64\sec^2 0 \operatorname{tg}^6 0 + 1824\sec^4 0 \operatorname{tg}^4 0 + 2880\sec^6 0 \operatorname{tg}^2 0 + 272\sec^8 0$$

Розв'язання

$$y^{VI} = 32\sec^2 x\,\mathrm{tg}^5\,x + 416\sec^4 x\,\mathrm{tg}^3\,x + 272\sec^6 x\,\mathrm{tg}\,x \Rightarrow$$

$$y^{VI}(0) = 32\sec^2 0\,\mathrm{tg}^5\,0 + 416\sec^4 0\,\mathrm{tg}^3\,0 + 272\sec^6 0\,\mathrm{tg}\,0 = 0$$

$$y^{VII} = 64\sec^2 x\,\mathrm{tg}^6\,x + 1824\sec^4 x\,\mathrm{tg}^4\,x + 2880\sec^6 x\,\mathrm{tg}^2\,x + 272\sec^8 x \Rightarrow$$

$$y^{VII}(0) = 64\sec^2 0\,\mathrm{tg}^6\,0 + 1824\sec^4 0\,\mathrm{tg}^4\,0 + 2880\sec^6 0\,\mathrm{tg}^2\,0 + 272\sec^8 0 = 272$$

Розв'язання

$$y^{VIII} = 128\sec^2 x \operatorname{tg}^7 x + 7680\sec^4 x \operatorname{tg}^5 x + 24576\sec^6 x \operatorname{tg}^3 x + 7936\sec^8 x \operatorname{tg} x$$

Розв'язання

$$y^{VIII} = 128 \sec^2 x \operatorname{tg}^7 x + 7680 \sec^4 x \operatorname{tg}^5 x + 24576 \sec^6 x \operatorname{tg}^3 x + 7936 \sec^8 x \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$y^{VIII}(\varepsilon) = 128 \sec^2 \varepsilon \operatorname{tg}^7 \varepsilon + 7680 \sec^4 \varepsilon \operatorname{tg}^5 \varepsilon + 24576 \sec^6 \varepsilon \operatorname{tg}^3 \varepsilon + 7936 \sec^8 \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon$$

Розв'язання

$$y^{VIII} = 128\sec^2 x\,\mathrm{tg}^7\, x + 7680\sec^4 x\,\mathrm{tg}^5\, x + 24576\sec^6 x\,\mathrm{tg}^3\, x + 7936\sec^8 x\,\mathrm{tg}\, x \Rightarrow$$

$$y^{VIII}(\varepsilon) = 128\sec^2 \varepsilon\,\mathrm{tg}^7\, \varepsilon + 7680\sec^4 \varepsilon\,\mathrm{tg}^5\, \varepsilon + 24576\sec^6 \varepsilon\,\mathrm{tg}^3\, \varepsilon + 7936\sec^8 \varepsilon\,\mathrm{tg}\, \varepsilon$$

Підставляючи до формули Тейлора отримані значення, маємо:

$$\mathrm{tg}\, x - x = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} +$$

$$+\frac{1}{8!}\left(128\sec^2 \varepsilon\,\mathrm{tg}^7\, \varepsilon + 7680\sec^4 \varepsilon\,\mathrm{tg}^5\, \varepsilon + 24576\sec^6 \varepsilon\,\mathrm{tg}^3\, \varepsilon + 7936\sec^8 \varepsilon\,\mathrm{tg}\, \varepsilon\right) x^8$$

Задача

Знайти три перших члени розкладу функції $y = \ln\cos 2x$ за степенями x та записати залишковий член.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.

Задача

Записати формулу Тейлора для функції $y = \ln(x+1)$ при $x_0 = 2$ та $n = 3$.

Розв’язання

Розв’язати самостійно.

Задача

Записати формулу Маклорена для функції $y = \operatorname{ch} x$ при $n = 5$.

Розв'язання

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Розв'язання

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Скористаймося готовим розкладом:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Розв'язання

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Скористаймося готовим розкладом:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Отже,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Розв'язання

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Скористаймося готовим розкладом:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Отже,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Тому

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\operatorname{ch} \varepsilon}{6!} x^6, 0 < \varepsilon < x$$

Задача

Написати формулу Маклорена для функції $y = xe^{4x}$ при $n = 4$.

Розв'язання

Розв'язати самостійно.