Похідна оберненої функції та заданої параметрично функції. Диференціал функції однієї змінної

Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ така, що обернена їй функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.

Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ така, що обернена їй функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.
Маємо:

$$x = g(y)$$

Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ така, що обернена їй функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.
Маємо:

$$x = g(y)$$

Диференціюємо за x:

$$1 = g'(y)y'$$

Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ така, що обернена їй функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.
Маємо:

$$x = g(y)$$

Диференціюємо за x:

$$1 = g'(y)y'$$

Оскільки $g'(y) \neq 0$, $y' = \dfrac{1}{g'(y)}$

Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ така, що обернена їй функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.
Маємо:

$$x = g(y)$$

Диференціюємо за x:

$$1 = g'(y)y'$$

Оскільки $g'(y) \neq 0$, $y' = \dfrac{1}{g'(y)}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

Приклад

Знайти формулу для похідної функції arctg.

Розв'язання

Функція arctg є функцією, оберненою до функції tg, тобто її похідна може бути знайдена у такий спосіб:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x = \operatorname{arctg} y;$$

Розв'язання

Функція arctg є функцією, оберненою до функції tg, тобто її похідна може бути знайдена у такий спосіб:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x = \operatorname{arctg} y;$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Розв'язання

Функція arctg є функцією, оберненою до функції tg, тобто її похідна може бути знайдена у такий спосіб:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x = \operatorname{arctg} y;$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

За наведеною вище формулою одержуємо:

$$y' = \frac{1}{\mathrm{d}(\operatorname{arctg} y)/\mathrm{d}x}; \quad \frac{\mathrm{d}(\operatorname{arctg} y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Розв'язання

Функція arctg є функцією, оберненою до функції tg, тобто її похідна може бути знайдена у такий спосіб:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x = \operatorname{arctg} y;$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

За наведеною вище формулою одержуємо:

$$y' = \frac{1}{\mathrm{d}(\operatorname{arctg} y)/\mathrm{d}x}; \quad \frac{\mathrm{d}(\operatorname{arctg} y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Оскільки $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$,

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1 + y^2};$$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$

Припустімо, що ці функції мають похідні і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$.

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$

Припустімо, що ці функції мають похідні і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$.

Тоді функція $y = \psi(t)$ може бути розглянута як складена функція $y = \psi[\Phi(x)]$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$

Припустімо, що ці функції мають похідні і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$.

Тоді функція $y = \psi(t)$ може бути розглянута як складена функція $y = \psi[\Phi(x)]$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$$

Оскільки $\Phi(x)$ – обернена функція, то $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}}$

Остаточно одержуємо: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Приклад

Знайти похідну функції $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Розв'язання

Спосіб 1:

Виразимо одну змінну через іншу $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Розв'язання

Спосіб 1:

Виразимо одну змінну через іншу $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, тоді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Розв'язання

Спосіб 1:

Виразимо одну змінну через іншу $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, тоді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\operatorname{tg} t}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\,\mathrm{tg}\,t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\,\mathrm{tg}\,t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\,\mathrm{tg}\,t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2\, t$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\operatorname{tg} t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \operatorname{tg}^2 t$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\,\mathrm{tg}\,t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2\,t \Rightarrow \mathrm{tg}^2\,t = -1 + \frac{1}{\cos^2 t}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\,\mathrm{tg}\,t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2\, t \Rightarrow \mathrm{tg}^2\, t = -1 + \frac{1}{\cos^2 t} = -1 + \frac{a^2}{x^2}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\operatorname{tg} t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \operatorname{tg}^2 t = -1 + \frac{1}{\cos^2 t} = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\operatorname{tg} t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \operatorname{tg}^2 t = -1 + \frac{1}{\cos^2 t} = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$$

$$\operatorname{tg} t = \pm\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

Розв'язання

Спосіб 2:

Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\operatorname{tg} t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t \Rightarrow \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \operatorname{tg}^2 t = -1 + \frac{1}{\cos^2 t} = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$$

$$\operatorname{tg} t = \pm\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тоді можна записати: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тоді можна записати: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.
Отже:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тоді можна записати: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.
Отже:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Величина $\alpha \Delta x$ – нескінченно мала більш високого порядку, чим $f'(x)\Delta x$, тобто $f'(x)\Delta x$ – головна частина приросту Δy.

Диференціал функції

Означення **Диференціалом** функції $f(x)$ у точці x називається головна лінійна частина приросту функції.

Позначення диференціала функції

Позначається $\mathrm{d}y$ або $\mathrm{d}f(x)$.

Позначення диференціала функції

Позначається $\mathrm{d}y$ або $\mathrm{d}f(x)$.
З визначення випливає, що $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ або

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

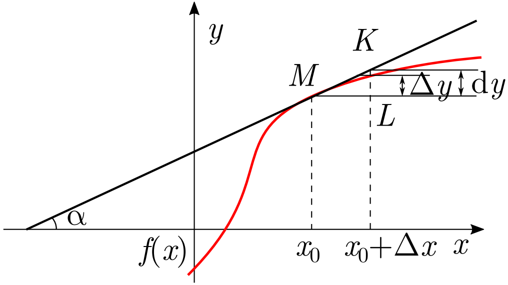
Позначення диференціала функції

Позначається $\mathrm{d}y$ або $\mathrm{d}f(x)$.
З визначення випливає, що $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ або

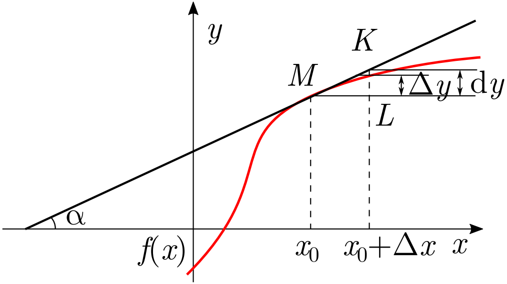
$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Можна також записати: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Геометричний зміст диференціала

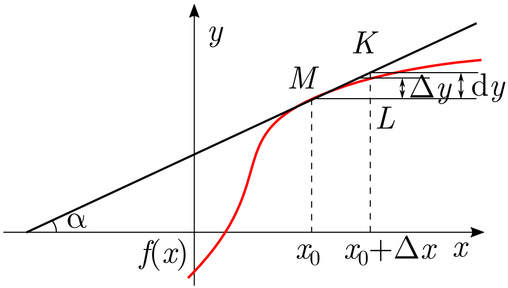


Геометричний зміст диференціала



Із трикутника ΔMKL: $KL = \mathrm{d}y = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$.

Геометричний зміст диференціала



Із трикутника ΔMKL: $KL = \mathrm{d}y = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$.
Таким чином, диференціал функції $f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка цієї функції у розглянутій точці.

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$

Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = (u \pm v)'\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$
4. $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$

Диференціал складеної функції. Інваріантність форми запису диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто y – складена функція.

Диференціал складеної функції. Інваріантність форми запису диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто y – складена функція.
Тоді $\mathrm{d}y = f'(x)g'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.

Диференціал складеної функції. Інваріантність форми запису диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто y – складена функція.
Тоді $\mathrm{d}y = f'(x)g'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.
Видно, що форма запису диференціала $\mathrm{d}y$ не залежить від того, чи буде x незалежної змінної або функцією якоїсь іншої змінної, у зв'язку із чим ця форма запису називається **інваріантною формою запису диференціала**.

Диференціал складеної функції. Інваріантність форми запису диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто y – складена функція.
Тоді $\mathrm{d}y = f'(x)g'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.
Видно, що форма запису диференціала $\mathrm{d}y$ не залежить від того, чи буде x незалежної змінної або функцією якоїсь іншої змінної, у зв'язку із чим ця форма запису називається **інваріантною формою запису диференціала**.
Однак, якщо x – незалежна змінна, то $\mathrm{d}x = \Delta x$, але якщо x залежить від t, то $\Delta x \neq \mathrm{d}x$.

Диференціал складеної функції. Інваріантність форми запису диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто y – складена функція.
Тоді $\mathrm{d}y = f'(x)g'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.
Видно, що форма запису диференціала $\mathrm{d}y$ не залежить від того, чи буде x незалежної змінної або функцією якоїсь іншої змінної, у зв'язку із чим ця форма запису називається **інваріантною формою запису диференціала**.
Однак, якщо x – незалежна змінна, то $\mathrm{d}x = \Delta x$, але якщо x залежить від t, то $\Delta x \neq \mathrm{d}x$.
У такий спосіб форма запису $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ не є інваріантною.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx. Також можна скористатися формулою

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx. Також можна скористатися формулою

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Тоді абсолютна похибка

$$|\Delta y - \mathrm{d}y|$$

Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx. Також можна скористатися формулою

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Тоді абсолютна похибка

$$|\Delta y - \mathrm{d}y|$$

Відносна похибка

$$\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\right|$$

Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx. Також можна скористатися формулою

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Тоді абсолютна похибка

$$|\Delta y - \mathrm{d}y|$$

Відносна похибка

$$\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\right|$$

Формула наближення (Лагранжа):

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Приклад

Знайти наближене значення функції $y = \sqrt{1+x}$ при $x = 0,02$.

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1 + 0}$$

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}}$$

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

- Застосовуємо наближання за формулою Лагранжа:

$$\sqrt{1,02} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02$$

Розв'язання

- Вибираємо опорну точку $x_0 = 0$, тоді приріст, потрібний для отримання значення x, дорівнює $\Delta x = 0,02$.
- Знаходимо значення функції та її похідної в опорній точці:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

- Застосовуємо наближання за формулою Лагранжа:

$$\sqrt{1,02} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,01$$