В.А. Баженов
А.В. Перельмутер
Ю.В. Ворона
В.В. Отрашевська

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

НАРИСИ З ІСТОРІЇ

Київ 2018

УДК 624.04
Б 16

Видання здійснено за сприяння корпорації «Альтіс-Холдінг»

Рецензенти:

Л.М. Лобанов
д-р техн. наук, проф., академік НАН України, заступник директора з наукової роботи
Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України

В.В. Харченко
д-р техн. наук, проф., академік НАН України,
директор Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України

В.Г. Карнаухов
д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. відділу термопружності
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Б 16 Баженов В.А.
Варіаційні принципи будівельної механіки. Нариси з історії. / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, Ю.В. Ворона, В.В. Отрашевська – К.: Каравела, 2018. – 924 с.

ISBN 978-966-2229-93-8

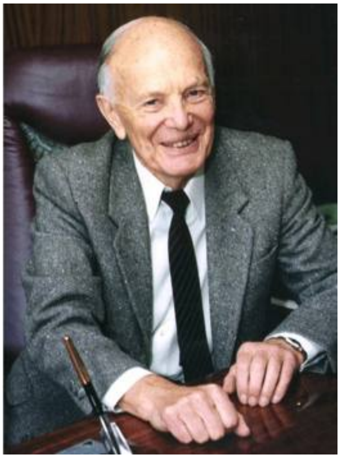
Книга присвячена історії виникнення і розвитку варіаційних принципів будівельної механіки, а також механіки в цілому і за задумом представляється у вигляді нарисів розвитку окремих напрямів, кожному з яких притамана певна історія виникнення і становлення відповідних понять, ідей, принципів, проблем і методів їх реалізації. Адже за відомою думкою Джона Бернала «У науці більше, ніж в будь-якій іншій інституції людства, необхідно вивчати минуле для розуміння сучасного і панування над природою в майбутньому».

Викладення змісту супроводжується фактами з життя і діяльності великих дослідників.

Книга може бути використана як підручник для студентів вищих навчальних закладів при реалізації магістерських програм, вивченні спеціальних курсів, які пов’язані з викладанням варіаційних принципів і методів будівельної механіки, побудовою сучасних чисельних процедур і технологій. Загалом вона зорієнтована на читачів і студентів, які вже вивчали обов’язкові курси будівельної механіки і суміжних технічних дисциплін, а також викладачів і науково-технічних працівників.

УДК 624.04

ISBN 978-966-2229-93-8



В сьогоднішні непрості для української науки часи, коли суспільство потребує належної та ефективної віддачі від усіх своїх сфер, питання вивчення історії науки і техніки, тенденцій розвитку науково-технічного прогресу, ролі науки у суспільному житті є вкрай актуальними. Це особливо важливо для виховання студентів та молодих науковців.

Дана книга присвячена історії виникнення і становлення одного із фундаментальних розділів будівельної механіки і механіки в цілому — варіаційних принципів — і охоплює історичний період від античної механіки до сучасної обчислювальної механіки. Викладення її змісту супроводжується цікавими фактами з життя і діяльності видатних учених, а також численними пізнавальними ілюстраціями.

Значна увага в книзі приділена відображенню ролі видатних українських учених, членів Національної академії наук України, всесвітньо відомих професорів М.В. Остроградського, В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, Д.О. Граве, К.К. Симінського, Є.О. Патона, Б.М. Горбунова, Ю.Д. Соколова, М.В. Корноухова, Ф.П. Белянкіна, Г.С. Писаренка та інш. При цьому підкреслено їх особисту патріотичну позицію, любов до України, їх творчі стосунки з видатними діячами української культури Т.Г. Шевченком, С.С. Гулаком-Артемовським, М.В. Лисенком. Наведені дані про створення та розвиток Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, інших наукових установ і вищих навчальних закладів. Це є особливо актуальним напередодні відзначення сторіччя Національної академії наук України.

Приділення значної уваги історії знань сприяє ознайомленню читача з історично об'єктивними оцінками певних результатів досліджень і пріоритетів, усвідомленню інколи довгого і надзвичайно тернистого шляху становлення навіть незначних і очевидних наукових досягнень і істин і, що не менш важливо, відображенню тієї атмосфери глибокої взаємної поваги та доброзичливості, яка, незважаючи на тривалі і гострі дискусії, царювала і має царювати у наукових колах, що являють собою еліту сучасного суспільства.

Президент
Національної академії наук України,
академік Б.Є. Патон

Зміст

Повага до минулого – ось риса, що відрізняє освіченість від дикунства.

О.С. Пушкін

Винаходити самому дуже добре, але знати і цінувати те, що зроблено іншими – хіба це менше, ніж творчість.

Й.В. Гете

Сучасному, щоб обернутися майбутнім, потрібне вчора.

Й. Бродський

Передмова

Лише закінчуючи роботу над задуманим твором, ми усвідомлюємо, з чого нам слід було його розпочати.

Б. Паскаль

Очі читача строгіші судді, ніж вуха слухача.

Вольтер

Історія механіки як самостійна наука існує близько двох сторіч, і, звичайно, до неї цілком відноситься відомий афоризм Й.В. Гете – «Історія науки - це наука сама по собі». З більш ранніх робіт можна послатися на вступні глави Ж.-Л. Лаґранжа про принципи рівноваги і динаміки в його «Аналітичній механіці» і на відповідні глави в загальних працях з історії математики (Кестнера, Монтюкла та ін.) [Вакуленко, Михайлов, 2000].

У другій половині XIX ст. механіка привернула увагу широких кіл натуралістів. Відкриття закону збереження енергії і спроби у зв'язку з цим виробити єдиний механістичний опис світу потребували з'ясування основних уявлень механіки. Тому перш за все були зроблені зусилля осмислити (або переосмислити) закони ньютонівської механіки. Принципові труднощі формальної аксіоматизації основ механіки (і, зокрема, визначення понять маси і сили) спричинили широку і часом гостру дискусію, в якій взяли тією чи іншою мірою участь майже всі найвидатніші вчені того часу.

У зв'язку з інтересом до зазначеного кола питань у 1869 р. філософський факультет Геттінгенського університету запропонував конкурс на премію за кращу працю, присвячений критичній історії основних принципів механіки. При цьому факультет чітко сформулював вимоги як до історичної частини дослідження (зокрема: «коли, ким і з приводу яких певних задач кожен окремий істотний принцип механіки був вперше знайдений і висловлений»), так і до аналізу логічної і дослідної обґрунтованості принципів, а також їх взаємозв'язку з філософськими теоріями. На конкурс було подано п'ять робіт. Першої премії було удостоєно твір Е. Дюрінга «Критична історія загальних принципів механіки» (1-е вид.: 1873; рос.пер. з 3-го вид. 1893). Наступним твором аналогічного характеру стала «Механіка, представлена історико-критично в її розвитку» Е. Маха (1-е вид.: 1883; рос. пер. з 6-го вид.: 1909). Власне історична сторона обох зазначених досліджень, більш ґрунтовна у Дюрінга, не притягнула особливої уваги вчених. К. Трусделл піддав критиці історичну частину «Механіки» Е. Маха, звернувшись до неї головним чином частим її цитуванням в літературі. Основний закид Е. Маху в цьому плані полягає в поверхневому його знайомстві з першоджерелами.

У Росії короткий історичний нарис про відкриття основних принципів і загальних законів теоретичної механіки був опублікований Д.К. Бобильовим (1892).

Ряд питань з історії механіки висвітлювався в кінці XIX і на початку XX ст. в творах з історії фізики і, меншою мірою, математики. Але розбір механіки в цих творах обмежувався зазвичай лише класичними працями. Прикладом цьому може служити така книга, як «Історія фізики» Ф. Розенбергера (1882-1890; рос. пер. 1933-1936).

Винятком в кінці XIX ст. є «Історія теорії пружності та опору матеріалів від Галілея до лорда Кельвіна» (1886-1893), підготовлена К. Пірсоном по рукопису А. Тодхантера. На 2200 сторінках тут наводиться безпосереднє перекладення більшості робіт з обраної тематики більш ніж за два століття. Звичайно, далеко не вичерпний, цей твір зберігає свою довідникову цінність і до наших днів. Нічого еквівалентного не існує ні для якого іншого розділу механіки.

Новий напрям в історії механіки було закладено на початку XX ст. П. Дюгемом, що відкрив для сучасної науки середньовічну механіку. Деякі вчені взагалі вважають дослідження Дюгема початком сучасної історії науки. Дюгему належать фундаментальні монографії «Витоки статики» (1905-1906), «Етюди про Леонардо да Вінчі» (1906-1913) і «Система світу» (1913-1958), в яких було дано перший досвід аналізу середньовічних поглядів на статику і динаміку. П. Дюгему належить також загальна монографія «Розвиток механіки» (1903). Дослідженню середньовічних джерел були присвячені згодом ґрунтовні твори А. Майєра («Попередники Галілея в XIV столітті», 1949, та ін.), А.В. Койре («Галілеївські етюди», 1939), Е. Муді і М. Кладжетта («Середньовічна наука про вагу», 1952; «Наука і механіка в середні віки», 1959) та ін. Окремої згадки заслуговує вивчення рукописів Леонардо да Вінчі, що ведеться ось уже близько двох століть.

Для історії механіки в XIX ст. цікавою є «Енциклопедія математичних наук», яка була видана на початку XX століття в Німеччині (і паралельно у Франції). Вона містить ґрунтовні огляди по окремих розділах механіки з обширною бібліографією, що представляють собою зараз цінний історичний матеріал. У складанні оглядів для енциклопедії брали участь багато видатних вчених - П. Аппель, Дж. Дарвін, Т. фон Карман, А.М. Крилов, О. Ляв, Х. Ламб, Р. Мізес та ін.

У першій половині XX ст. важко виявити будь-які школи або напрямки в історії механіки, крім згаданих досліджень з середньовічної механіки. Протягом усього цього часу і в усіх країнах велася, звичайно, велика робота з аналізу творчості окремих вчених-механіків, яка приурочувалася частіше до ювілеїв і до видання зібрань їх творів.

Перше критичне видання «Начал» Ньютона було здійснено А.В. Койре і І.Б. Коеном лише у 1971-1972 рр. Ретельний аналіз передісторії «Начал» у творчості самого Ньютона був проведений незадовго до цього Дж.У. Херівелом (1966), а повне видання математичних рукописів Ньютона було здійснено Д.Т. Уайтсайдом в 1967-1981 рр.

Більш глибокий інтерес до історії механіки проявився у світовій літературі в другій половині XX століття. У США вийшли в світ дві згадані вище монографії з середньовічної статики і динаміки, у Франції - дві великі роботи Р. Дюга «Історія механіки» (1950) і «Механіка XVII ст.» (1954).

У 50-і рр. почав публікацію своїх історичних досліджень засновник сучасної історії механіки, видатний американський учений Кліффорд Трусделл. Йому належать, зокрема, фундаментальні роботи з історії загальних принципів і методів механіки суцільного середовища в XVIII і на початку XIX ст., що ґрунтуються на глибокому аналізі першоджерел. Вперше молодий, творчо активний вчений-механік заглибився в історико-критичний аналіз того періоду з позицій сучасної науки. Широку популярність Трусделлу відразу ж принесли його великі вступні статті до томів 11-13 другої серії (механіка) «Повного зібрання праць» Леонарда Ейлера (1954-1960), які виходили далеко за рамки розбору робіт самого Ейлера і містили загальний аналіз стану гідроаеромеханіки, теорії пружності і механіки гнучких тіл в XVIII ст. (достатньо сказати, що ці три вступні статті містили 660 сторінок тексту!). Одночасно Трусделл розпочав систематичну публікацію широкого циклу досліджень з історії механіки. Частина його робіт була зібрана ним у збірнику «Нариси з історії механіки» (1968), перекладеному згодом з англійської на ряд інших мов.

Під впливом Трусделла виникла нова велика школа історії механіки, дослідження якої спираються передусім на порівняльно-історичне вивчення першоджерел. Так, присвячені механіці деформівного твердого тіла і гідрогазодінаміці сім томів останнього видання знаної «Handbuch der Physik» (Фізичної енциклопедії), виданої в 1959-1974 рр. під редакцією Трусделла, містять ґрунтовні наукові огляди, в більшості безпрецедентні з огляду на велику кількість історічного матеріалу.

Трусделл, по суті, першим почав широкі дослідження з історії механіки суцільного середовища, значно розширивши тим самим галузь історичних досліджень. Твори Трусделла відрізняються глибоким знанням першоджерел, оригінальністю і часто гостротою викладення. Так, йому належить дуже різка, шокуюча багатьох сучасників критика «Аналітичної механіки» Ж.-Л. Лаґранжа за вихолощення в ній раціонального змісту механіки та спотворення її історії.

Викладення історії створення та розвитку варіаційних принципів механіки дане у класичних роботах [Вариационные принципы механики, 1959], [Kurrer, 2008]. Це питання висвітлене в книгах Е. Маха [Мах, 1909], А. Майєра [Mayer, 1877], Ф. Клейна [Клейн, 1937], К. Ланцоша [Ланцош, 1965], Л.С. Полака [Полак, 2010], Г. Голдстіна [Goldstine, 1980], С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1957], С.А. Бернштейна [Бернштейн, 1957], В.Л. Бердичевського [Бердичевский, 1983], А.П. Філіна [Филин, 1975, 1978, 1981], О.М. Боголюбова [Боголюбов, 1983, 1987, 1988], книгах [Погребысский, 1966], [Тюлина, 1979] та інших.

Основні поняття і необхідні елементи варіаційного числення викладені у загальновизнаних книгах Р. Куранта, Д. Гільберта [Курант, Гилберт, 1945], М.О. Лаврентьєва, Л.А. Люстерніка [Лаврентьев, Люстерник, 1935], Л.Е. Ельсгольца [Ельсгольц, 1958, 1965], І.М. Гельфанда, С.В. Фоміна [Гельфанд, Фомин, 1961], В.І. Арнольда [Арнольд, 1989], В.М. Алєксєєва, В.М. Тихомирова, С.В. Фоміна [Алексеев та ін, 1979], Н.І. Ахієзера [Ахиезер, 1955], К. Ланцоша [Ланцош, 1965], С.Г. Міхліна [Михлин, 1970], А.А. Мишкіса [Мышкис, 1971], Л. Янга [Янг, 1974], Ф.Р. Гантмахера [Гантмахер, 1966], Л.Я. Цлафа [Цлаф, 1970], К. Веєрштрасса [Weierstrass, 1927], А. Кнезера [Kneser, 1900], Г.А. Блісса [Блисс, 1950].

Основу викладення варіаційних принципів будівельної механіки являють собою матеріали відомих підручників [Александров та ін., 1983], [Александров, Потапов, 1990], [Бабенко та ін., 2009], [Баженов та ін., 2013], [Безухов, 1965], [Безухов, Лужин, 1974], [Бутенко та ін., 1989], [Варвак, 1977], [Варвак та ін., 1981], [Василенко, Алексейчук, 2004], [Гантмахер, 1966], [Дарков, Шапошников, 1986], [Киселев, 1986], [Колтунов та ін., 1983], [Лейбензон, 1947], [Лурье, 1970], [Пискунов та ін., 1994, 1995], [Потапов та ін., 2007],], [Ржаницын, 1982], [Смирнов та ін., 1984], [Тимошенко, 1945, 1971, 1975], [Феодосьев, 1967], [Чирас, 1989], а також книг К. Ланцоша [Ланцош, 1965], К. Васідзу[1] [Васидзу, 1987], Л.С. Лейбензона [Лейбензон, 1943, 1947], А.І. Лур'є [Лурье, 1980], Л.Д. Ландау, Е.М. Лівшица [Ландау, Лившиц, 1987], А. Лява [Ляв, 1935], В.В. Новожилова [Новожилов, 1948, 1958], Е. Треффца [Треффц, 1934], Е. Тонті [Тонти, 1969], П.Ф. Папковича [Папкович, 1939], Р. Клафа, Дж. Пензієна [Клаф, Пензиен, 1979], Л.О. Розіна [Розин, 1978, 1998], Л.В. Бердичевського [Бердичевский, 1983], В.І. Сливкера [Сливкер, 2005], А.П. Філіна [Филин, 1975, 1978, 1981], Я.А. Пратусевича [Пратусевич, 1948], Н.П. Абовського [Абовский, 1973] та інших.

За задумом матеріал даної книги зреалізований у 21 наступному нарисі; природно, що у зв'язку з цілеспрямованістю тематики не вдалося запобігти певних повторів, здебільшого пов'язаних із забезпеченням можливості розгляду кожного нарису як окремого. З іншого боку, викладення всього змісту в одному опусі призвело б до такого збільшення його об'єму, коли, за влучною думкою сера Вінстона Черчилля, «небувала товщина цього звіту захистила б його від загрози бути прочитаним».

Нарис 1	Перші екстремальні задачі
Нарис 2	Екстремальні задачі у XVII ст. Кеплер, Ферма, Ньютон
Нарис 3	Виникнення і становлення варіаційного числення. Родина Бернуллі, Ньютон, Лейбніц, Ейлер, Лагранж, Пуассон, Гаусс, Гамільтон, Остроградський, Якобі
Нарис 4	Варіаційні задачі на умовний екстремум. Метод множників Лагранжа
Нарис 5	Достатні умови екстремуму. Вейерштрасс, Ердман, Якобі
Нарис 6	Теорія поля екстремалей. Кнезер, Гільберт. Теорема Нетер
Нарис 7	Задачі з обмеженнями. Історія доведення правила множників Лагранжа. Майер, Больца, Бертран, Шеррер, Турксма, Емеріх, Хан, Адамар, Макшейн, Люстернік
Нарис 8	Перетворення Лежандра. Двоїсті варіаційні принципи. Двоїсті постановки задач будівельної механіки. Плюккер, В. Юнг, Фенхель, Донкін, Дж. Грін
Нарис 9	Варіаційні задачі на екстремум в замкнених областях. Гернет, Валентайн, Понтрягін
Нарис 10	Відродження прямих методів. Становлення функціонального аналізу
Нарис 11	Загальні варіаційні принципи механіки. Історія розвитку
Нарис 12	Основні варіаційні принципи і функціонали будівельної механіки
Нарис 13	Двоїста природа задач будівельної механіки
Нарис 14	Прямі методи розв'язання варіаційних задач. Рітц, Бубнов, Гальоркін, Треффц, Канторович

---

[1] У російськомовній літературі прижилася невдала транскрипція цього імені як Вашицу. У передмові редактора перекладу книги (Васідзу) справедливо указується на цю лінгвістичну помилку, оскільки в японській мові відсутній звук «ш».

Нарис 15	Штрихи історії методу скінченних елементів
Нарис 16	Метод граничних елементів
Нарис 17	Екстремальні принципи теорії пластичності
Нарис 18	Задачі оптимізації у теорії споруд
Нарис 19	М.В. Остроградський
Нарис 20	В.Л. Кирпичов
Нарис 21	С.П. Тимошенко

За змістом нариси розподілені у чотири частини, а саме:

- Частина I. Екстремальні і варіаційні задачі. Історія становлення та розвитку (нариси 1-10).
- Частина II. Варіаційні принципи механіки (нариси 11-13).
- Частина III. Прямі методи варіаційного числення і їх реалізація (нариси 14-18).
- Частина IV. Внесок українських учених М. Остроградський, В. Кирпичов, С. Тимошенко (нариси 19-21).

Окремі нариси книги присвячені внеску всесвітньо відомих українських учених М.В. Остроградського, В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, які протягом двох століть уособлювали у собі становлення і розвиток механіки в українській науці і вищій освіті. Адже за думкою Томаса Карлейля – «Історія світу - це біографія великих людей».

М.В. Остроградський - всесвітньо відомий математик і механік, ім'я якого назавжди вкарбоване в історію науки, підручники і посібники. В.Л. Кирпичов був фундатором і першим директором провідних вищих навчальних закладів в Україні: Харківського технологічного інституту і Київського політехнічного інституту. С.П. Тимошенко був одним із засновників Української Академії наук у 1918 р. Уперше у світі за його пропозицією технічним наукам було надано ранг академічних наук, і в складі академії був організований підрозділ «прикладного природознавства». І це є актуальним сьогодні при становленні української державності напередодні відзначення сторіччя Національної академії наук України.

Відома книжка С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1957], що неодноразово перевидавалась, написана на основі лекцій з історії опору матеріалів, який він читав для студентів на протязі 25 років, а його учитель В.Л. Кирпичов протягом багатьох років очолював науковий гурток, де вів бесіди про механіку, які покладені в основу книжки «Беседы о механике» [Кирпичов, 1933].

Дані нариси віддають належне історії виникнення загальних принципів і ідей і стосуються галузі механіки, яку називають будівельна механіка у широкому розумінні цього слова. Існує відносно невелика кількість книжок, які присвячені історії будівельної механіки, серед яких найбільший вплив на авторів мали роботи В.Л. Кирпичова [Кирпичев, 1903, 1933], С.П. Тимошенка [Тимошенко, 1957], С.А. Бернштейна [Бернштейн, 1957], К. Трусделла [Трусделл, 2002], [Truesdell, 1968], В.І. Феодосьєва [Феодосьев, 1975], К.Е. Кюррера [Kurrer, 2008], а також видана окремим томом збірка статей з історії теоретичної та прикладної механіки під редакцією Е.Штайна [Stein, 2014]. Слід також відзначити змістовні історичні ремарки, викладені у класичних курсах будівельної механіки І.М. Рабіновича [Рабинович, 1950, 1954].

Більшість з них написані досить давно і не завжди відображають важливі елементи історії науки другої половини XX і початку XXI століття. І справа навіть не у тих або інших конкретних результатах, більш важливим є притаманне даному часу більш глибоке осмислення багатьох раніше відомих понять.

На думку авторів, за сучасних умов комп’ютерного проектування дуже важливим є вивчення і засвоєння принципових аспектів теорії, що дозволяє інженеру не тільки змістовно користуватись програмними засобами, а і оцінювати отримані результати, що прямо залежить від розуміння принципів, на яких побудоване програмне забезпечення. Адже, згідно з відомою тезою Норберта Вінера, «Відчуття нерозривного зв'язку з минулим ... залежить не тільки від знання літописної історії ... прагнучи гідного майбутнього, слід пам'ятати про минуле, і якщо існують цілі регіони, де усвідомлення минулого згорнуте до розмірів ледь помітної точки на величезній карті, то не може бути нічого гіршого як для нас самих, так і для наших нащадків ...».

Вкрай важливим є співвідношення між знанням і розумінням, яке приходить тільки тоді, коли явище розглядається не тільки з різних сторін, а і у процесі історичного становлення.

Книга може бути використана як підручник для студентів вишів при реалізації магістерських програм, вивченні спеціальних курсів тощо. Загалом вона зорієнтована на читачів і студентів, які вже вивчали обов’язкові курси з будівельної механіки і суміжних дисциплін, а також викладачів і науково-технічних працівників.

При цьому йдеться не тільки про окремі курси з історії механіки для магістрів і студентів старших курсів, а і про те, що на думку авторів, викладання учбового і учбово-наукового матеріалу у вишах конче корисно, а часом і необхідно супроводжувати розвиненими коментарями історико-філософського характеру. Саме такий підхід започаткований у відомих книжках В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, І.М. Рабиновича.

Ряд нарисів містять у собі необхідні для розуміння основні залежності і рівняння, хоча автори завжди пам’ятали відомий вислів Стівена Гокінга: «Хтось сказав мені, що кожне рівняння, яке я включив до книги, скоротить продажі вдвічі».

Автори висловлюють щиру подяку ст.н.с. О.В. Геращенку за допомогу у підготовці матеріалів до видання.

Квітень 2018 р. *Автори*

Література

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. - Красноярск, 1973. – 190 с.
2. *Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.:Стройиздат, 1983.
3. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности. – М., 1990.
4. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М., 1979.
5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.
6. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. - 248 с.
7. *Бабенко А.Є., Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О.* Теорія пружності. Ч.1. – К.: «Основа», 2009. – 244 с.
8. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп’ютерні технології і моделювання. – К.: Віпол, 2013. – 895 с.
9. *Баженов В.А.* Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.
10. *Баженов В.А., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В.* Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії. – К.: Каравела, 2016. – 428 с.
11. *Безухов Н.И.* Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Госстройиздат, 1965. – 320 с.
12. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
13. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
14. *Бернштейн С.А.* Очерки по истории строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.
15. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: Издательство иностранной литературы, 1950. – 348 с.
16. *Боголюбов А.Н.* Математики и механики. Биографический справочник. – К.: Наук. думка, 1983. - 639 с.
17. *Боголюбов А.Н.* Роберт Гук (1635-1703). – М.: Наука, 1987. – 240 с.
18. *Боголюбов А.Н.* Огюстен Коши и его вклад в механику, и физику. Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1988 — С. 179 — 199.
19. *Бутенко Ю.И. и др.* Строительная механика. – К.: Выща школа, 1989. - 367 с.
20. *Вакуленко А.А., Михайлов Г.К.* Клиффорд Трусделл и современная история механики. – Вопросы истории естествознания и техники, 2000. - №3.
21. *Варвак П.М.* Новые методы решения задач сопротивления материалов. – К., 1977. – 160 с.
22. *Варвак П.М. и др.* Метод конечных элементов. – К., 1981. – 438 с.
23. Вариационные принципы механики: Сб. статей / Под ред. Л.С. Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.
24. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. - 542 с.
25. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
26. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М., 1966. - 300 с.
27. *Гельфанд И.М., Фомин СВ.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
28. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. - 607 с.

29. *Кирпичев В.Л.* Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. К.: Изд-во Кульженка, 1903.
30. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. – 2-е, посмертное. – М.: Гостехтеориздат, 1933. - 270 с.
31. *Киселев В.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1986. - 520 с.
32. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. − М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.
33. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.
34. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 349 с.
35. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2 – ОГИЗ, Гостехиздат, 1945. – 619 с.
36. *Лаврентьев М. и Люстерник Л.* Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.
37. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
38. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. Пер. с англ. В.Ф.Гантмахера. Под ред. Л.С.Полака. – М.: Мир. 1965. – 408 с.
39. *Лейбензон Л.С.* Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943. – 287 с.
40. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 464 с.
41. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
42. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
43. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
44. *Мах Э.* Механика. – С.-Пб., 1909. – 448 с.
45. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
46. *Мышкис А.А.* Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971.
47. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
48. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 365 с.
49. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
50. *Піскунов В.Г.* та інш. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. – К.: Вища школа, кн. 1, 1994. – 201 с., кн. 2, 1994. – 335 с., кн. 3, 1995. – 271 с., кн. 4, 1995. – 303 с., кн. 5, 1995. – 207 с.
51. *Погребысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну.– М.: Наука, 1966.– 326 с.
52. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. Изд. 2-е, испр. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. - 600 с.
53. *Потапов В.Д., Александров А.В., Косицын С.Б., Долотказин Д.Б.* Строительная механика: в 2 кн. Кн.1. Статика упругих систем. – М.: ФГУП “Издательство “Высшая школа”, 2007.
54. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 400 с.
55. *Рабинович И.М.* Курс строительной механики стержневых систем. Т.1. Статически определимые системы, 1950. - 387 с. Т. 2. Статически неопределимые системы, 1954. - 544 с. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре.
56. *Рабинович И.М.* Воспоминания. 1904-1974. – М.: Наука, 1984. – 160 с.
57. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
58. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: ЛГУ, 1978. – 223 с.
59. *Розин Л.А.* Задачи теории упругости и численные методы их решения. – С.-Петербург: изд. СПбГТУ, 1998. – 530 с.

60. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 736 с.
61. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика: Стержневые системы.– М.: Стройиздат, 1981; Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984.
62. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов, т. I (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1945.
63. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостеориздат, 1957. - 536 с.
64. *Тимошенко С.П.* . Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы под редакцией Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
65. *Тимошенко С.П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. – К.: Наукова думка, 1975. – 561 с.
66. *Тонти Э.* Вариационные принципы в теории упругости. – Сб. перев. "Механика", 1969, вып. 5. – С. 124–138.
67. *Треффц Е.* Математическая теория упругости (перевод с немецкого), 1934. – 172 с.
68. *Трусделл К.* Очерки по истории механики. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 316 стр.
69. *Тюлина И.А.* История и методология механики. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.
70. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
71. *Феодосьев В.И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975, — 172 с.
72. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. — М.: Наука, Т. 1. 1975. - 832 с. Т. II. 1978. - 616 с. Т. III. 1981. - 480 с.
73. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1970. – 184 с.
74. *Чирас А.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
75. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 163 с.
76. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
77. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.– 488 с.
78. *Bazhenov V.A., Perelmuter V.A., Vorona Yu.V.* Structural mechanics and theory of structures. History essays. LAP LAMBERT Academic Publishing. Beau Bassin, Mauritius, 2017. 580 c.
79. *Goldstine H.* A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.
80. *Kneser A.* Lehrbruch der Variationsrechnung , Braunschweig: Vieweg, 1900.
81. *Kurrer K.-E.* The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.
82. *Mayer A.* Geschichte dcs Princips der Kieinsten Aktion. – Leipzig, 1877. – 180 S.
83. *Stein E.*(edr). The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering, 2014, Spinger.
84. *Truesdell C.A.* Essays in the history of mechanics. - Berlin: Springer Verlag, 1968. - 384 p.
85. *Weierstrass K.* Vorl. ueber Variationsrechnung, Math. Werke. Bd. 7. Leipzig, 1927.

ЧАСТИНА І

ЕКСТРЕМАЛЬНІ І ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ. ІСТОРІЯ СТАНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТКУ

У світі не відбувається нічого, у чому не був би помітний сенс будь-якого максимуму або мінімуму.

Л. Ейлер

Велика частина питань практики зводиться до задач найбільших і найменших величин, ... і тільки розв'язком цих задач ми можемо задовольнити вимоги практики, яка всюди шукає найкращого, найбільш вигідного.

П.Л. Чебишов

НАРИС 1

ПЕРШІ ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ

Те, що відбувалося тисячу років тому, неодмінно повертається; такою є старовинна сталість.

Сунь-Цзи

Ми запитуємо і допитуємо минуле, щоб воно пояснило нам наше сьогодення і натякнуло про наше майбутнє.

В.Г. Бєлінський

Дослідження задач на екстремум (тобто на максимум і мінімум) почалося дуже давно - двадцять п'ять століть тому, і протягом всієї історії математики відігравало важливу роль в розвитку цієї науки. Накопичилася велика кількість важливих, красивих, яскравих і цікавих задач геометрії, алгебри, фізики і т.п., у вирішенні яких брали участь найвидатніші мислителі минулих епох Евклід, Архімед, Аполлоній, Герон, Тарталья, Торрічеллі, Йоганн і Якоб Бернуллі, Ньютон та багато інших. Довгий час не було єдиних підходів до задач на знаходження екстремумів. Але дослідження конкретних задач стимулювало розвиток теорії і згодом були вироблені прийоми, що дозволяють розв'язувати задачі різної природи єдиним методом. Перші загальні методи вирішення і дослідження задач на екстремум з'явилися в епоху формування математичного аналізу приблизно триста років тому.

Знайомство з конкретними задачами і обговорення способів їхнього розв'язання дозволяє познайомитись з творчістю найвидатніших математиків минулого. І це цікаво не тільки з погляду історії науки. Ідеї і методи, створені великими математиками при вирішенні конкретних проблем, зазвичай не вмирають. Вони згодом обов'язково відроджуються, і тому проникнення в задуми великих людей завжди збагачує. О.С. Пушкін писав: «Слідувати за думками великої людини є наука найбільш захоплююча…».

1.1. Класична ізопериметрична задача. Задача Дідони

Mercatique solum, facti de nomine Byrsam.
Taurino quantum possent circumdare tergo.

Купили клаптик землі, за спосіб куплі тієї,
Тепер ця земля Бірсою зветься, бо стільки купили,
Скільки шкурою вола охопити можна.

П. Вергілій Марон. «Енеїда»

Найдавнішою з відомих екстремальних задач є, мабуть, класична ізопериметрична задача: серед всіх замкнених кривих (поверхонь) заданої величини знайти таку, що обмежує найбільшу площу (об'єм).

Ще давнім грекам було відомо, що серед усіх плоских ізопериметричних фігур найбільшу площу має круг, а серед ізоповерхневих тіл (таких, що мають однакові поверхні) найбільший об'єм має куля.

Важко сказати, коли вперше була висловлена думка про найбільшу «місткість» кола і сфери серед всіх замкнених кривих однакової довжини, або поверхонь однакової площі. Один з останніх учнів афінської школи платоників Сімпліцій з Кілікії (VI ст. н. е.), що склав незадовго до остаточного краху античної цивілізації великий коментар до праць Аристотеля із Стагіра (384–322 року до н. е.), пише: «Доведено до Аристотеля, бо він користується цим як відомим, а потім більш повно – Архімедом і Зенодором, що серед ізопериметричних фігур найбільш містким є коло, а серед ізопіфанних – куля». У цих словах визначена постановка таких екстремальних задач: серед плоских замкнених кривих, що мають задану довжину, знайти криву, яка охоплює найбільшу площу, і серед просторових замкнених поверхонь, що мають задану площу, знайти поверхню, яка охоплює найбільший об'єм. Для філософа-платоника така постановка задачі є природною і пов'язана з пошуком ідеальних форм. Недаремно коло і куля були в давнину символами геометричної досконалості. З цим пов'язують відомий вислів Піфагора, що «найпрекраснішим тілом є куля, а найпрекраснішою плоскою фігурою – круг».

Прозаїчніше мотивування ізопериметричної і близьких до неї задач можна знайти в дещо наївній, але достатньо виразній формі в легенді про Дідону. Нагадаємо її за «Енеїдою» римського поета Вергілія. Фінікійська царівна Дідона із невеликим загоном жителів міста Тіра, рятуючись від переслідувань тирана – брата Дідони, покинули рідне місто і відправилися на кораблях на захід вздовж берегів Середземного моря. Вибравши на африканському узбережжі зручне місце (нинішня Туніська затока), Дідона і її супутники вирішили заснувати тут поселення. Мабуть, ця ідея не сподобалася місцевим жителям, але Дідоні вдалося умовити їх ватажка Ярба, і він необережно погодився продати стільки землі, «скільки шкурою вола охопити можна». Ярб не відразу зрозумів хитрість і підступність фінікіянки. Розрізавши шкуру на тонкі смужки, Дідона зв'язала їх в один довгий ремінь і, оточивши ним значну територію, заклала на ній місто Карфаген (фінікійською Картадашт – «нове місто»). На згадку про цю історію цитадель Карфагена дістала назву Бірса (мовою пунійців, як римляни називали жителів Карфагена, – «шкура»). Всі ці події легенда відносить до 825 (або 814) р. до н. е.

У такій ситуації виникає та ж сама класична ізопериметрична задача: вказати оптимальну форму ділянки землі, яка при заданій довжині периметра L має найбільшу площу S.

Розв'язання ізопериметричної задачі дається таким твердженням: *якщо спрямлювана крива довжини* L *обмежує плоску фігуру, що має площу* S, *то*

$$L^2 \geq 4\pi S \tag{1}$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли крива – коло.

Інші постановки задачі можна отримати якщо, як це природно припустити, Дідона хотіла зберегти вихід до моря. На відміну від класичної ізопериметричної задачі, ці задачі називатимемо задачами Дідони.

Сучасні постановки задач Дідони такі.

Перша задача Дідони. Серед всіх дуг довжини L, що містяться у півплощині, обмеженій прямою l, з кінцями $A, B \in l$, знайти таку, яка разом з відрізком $[AB]$ обмежує фігуру найбільшої площі S.

Наведемо розв'язання цієї задачі. Нехай ACB довільна допустима дуга з кінцями $A, B \in l$, що обмежує фігуру площі S (рис. 1). Відобразивши її симетрично відносно l, дістанемо замкнену криву довжини $2L$, що обмежує фігуру площі $2S$. Із (1)

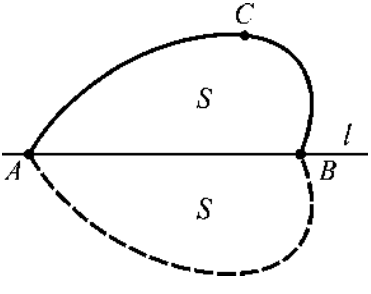


Рис. 1

$$(2L)^2 \geq 4\pi 2S\,, \tag{2}$$

звідки

$$\mathrm{S} \leq L^2\big/(2\pi)\,. \tag{3}$$

Отже, максимальним значенням S є $L^2\big/(2\pi)$ і це значення досягається, якщо ACB – півколо, що спирається на діаметр $[AB]$. Задача має єдиний розв’язок з точністю до зсуву вздовж прямої.

У наведеній задачі кінці A і B шуканої дуги можна вибирати на прямій l довільно. Розглянемо випадок, коли кінці дуги задаються.

Друга задача Дідони. Серед всіх дуг довжини L, що знаходяться в півплощині, обмеженій прямою l, із заданими кінцями $A, B \in l$ знайти таку, яка разом з відрізком $[AB]$ обмежує фігуру найбільшої площі.

Ясно, що ця задача має сенс тільки при $L > |AB|$ (інакше або немає жодної дуги, що задовольняє умови задачі, або (при $L = |AB|$) така дуга тільки одна – сам відрізок $[AB]$). Природно очікувати за аналогією із попередньою задачею, що розв’язком буде дуга кола, для якого $[AB]$ є хордою. Така дуга $A\overset{\frown}{C}B$ визначається єдиним чином. Доповнимо її до повного кола дугою ADB (рис. 2). Довжину дуги ADB позначимо λ, а площу сегмента, обмеженого цією дугою і відрізком $[AB]$, – σ.

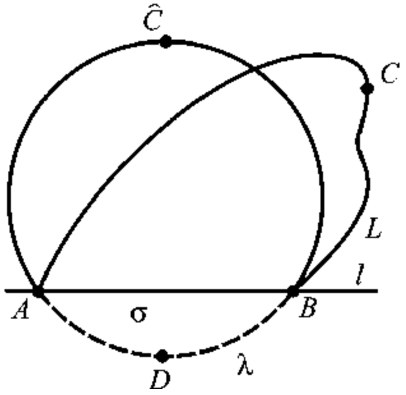


Рис. 2

Нехай тепер ACB – довільна дуга, що задовольняє умови задачі і обмежує разом з $[AB]$ площу S. Замкнена крива $ACBD$ має довжину $L + \lambda$ і обмежує площу $S + \sigma$. Згідно з (2) $4\pi(S+\sigma) \leq (L+\lambda)^2$, звідки

$$S \leq \frac{1}{4\pi}(L+\lambda)^2 - \sigma\,.$$

Як і в (1), рівність, а отже й максимальна площа S досягаються тоді і тільки тоді, коли крива $ACBD$ є колом, тобто коли дуги рівні: $ACB = A\overset{\frown}{C}B$.

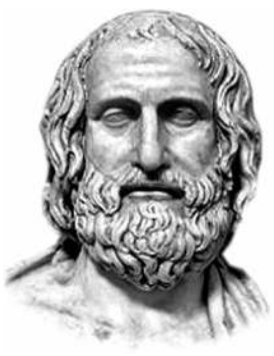
Відзначимо таку відмінність двох наведених задач. У першій задачі Дідони множина конкуруючих кривих більша, оскільки положення точок A і B не задане. Втім, не обмежуючи загальності, одну з них, скажімо A, можна вважати фіксованою. Тоді положення точки B визначається додатковою умовою: $A\overset{\frown}{C}B$ не просто дуга кола, як у другій задачі Дідони, але $A\overset{\frown}{C}B$ є півколом, що еквівалентно твердженню: у своїх кінцях шукана дуга підходить до прямої l під кутом 90°. Далі буде видно, що тут проявляється загальний принцип: надаючи кінцям шуканої кривої деяку свободу, треба вимагати, щоб в них задовольнялися певні умови, які називаються умовами трансверсальності. Форма ж шуканої кривої в обох задачах однакова, вона визначається деяким рівнянням (рівнянням Ейлера), яке має задовольняти крива. У нашому випадку шукана крива в усіх точках повинна мати однакову кривизну.

Ізопериметрична задача зводиться до знаходження екстремуму функціонала S за наявності додаткової умови − довжина кривої має бути сталою, тобто значення функціонала

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

залишається сталим. Умови такого типу називаються *ізопериметричними*.

Перший з відомих творів про ізопериметричні фігури написаний давньогрецьким математиком Зенодором, який жив в Александрії. До нашого часу не дійшли ніякі достовірні дані про час життя Зенодора. Є лише досить докладні викладення його роботи, які є мабуть майже буквальними запозиченнями із його творів (відомо, що такі запозичення в античну епоху не вважалися плагіатом).



Зенодор,
грец. Ζηνόδωρος
(II ст. до н. е.)

Час життя і діяльності Зенодора припадає на період між часом життя Архімеда (287 – 212 рр. до н. е.), який багаторазово згадується у його творі, і Квінтиліана (35 – 95 рр. н. е.), який використав результати теорії Зенодора. Так у 1-шій книзі Квінтіліана «Institutio oratoria» (I, 10, 39–45, td. Halma, Leipzig, 1868, с. 62) говориться: «Хто не повірить оратору, якщо він скаже, що площа, обмежена даними лініями, має бути рівною іншій площі, якщо лінії, які їх охоплюють мають однакову довжину? Тим не менше, це невірно, оскільки площа дуже залежить від того, який вигляд має це охоплення. Геометри висунули заперечення проти помилки істориків, які вважали, що можна визначити величину острова шляхом об'їзду його межі. Досконалішою буде та форма, що містить в собі більшу площу. Круг є на площині найдосконалішою лінією і він охоплює більшу площу, ніж квадрат такого ж периметра. Квадрат своєю чергою містить в собі більшу площу, ніж трикутник, до того ж рівносторонній трикутник більше ніж різносторонній». Хоча Квінтіліан і не згадує при цьому Зенодора, але зрозуміло, що він спирається на результати досить стрункої теорії ізопериметрів, і немає ніяких підстав приписувати створення цієї теорії комусь іншому крім Зенодора.

Трактат Зенодора «Пэрὶ ἰσομέτρων σχημάτων» («Про ізометричні фігури») нині втрачений, але багато з доведених у ньому теорем відомі нам з коментаря Теона Александрійського до «Синтаксису» Птолемея. Зенодор досліджує і частково вирішує такі питання: яка плоска фігура при даному периметрі має найбільшу площу і яке тіло при даній поверхні має найбільший об’єм. Доведення відповідей викликало труднощі. Такі доведення ізопериметричних властивостей кола і кулі були виконані тільки у 1884 р. Германом Шварцем. Зенодор доводить у своєму трактаті 14 теорем, з яких найважливішими є такі. *З двох правильних багатокутників з рівними периметрами більшу площу матиме той, у якого більше кутів. Якщо коло і правильний багатокутник мають однаковий периметр, то площа кола буде більшою. З усіх багатокутників рівного периметра і з рівним числом сторін найбільшим буде правильний багатокутник.*

На підставі цих теорем Зенодор робить висновок, що з усіх фігур однакового периметра коло є найбільшим. Цей висновок справедливий лише у тому разі, коли «фігурами» називаються тільки кола і багатокутники. Далі Зенодор доводить дві стереометричні теореми: *якщо правильний багатокутник з парним числом сторін обертати навколо найдовшої його діагоналі, то отримане тіло буде меншим за кулю з такою ж поверхнею. Кожне з п'яти Платонових тіл (тетраедр, октаедр, ікосаедр, гексаедр, додекаедр) матиме менший об'єм, ніж куля з такою ж поверхнею.*

Вже зазначалося, що сам твір Зенодора «Пэρὶ ίσομέτρων σχημάτων»[1] не зберігся. Однак до нас дійшов дуже повний і чіткий виклад його теорії в коментарях Теона Александрійського до «Альмагесту» Птолемея. Крім того, у 5-ій книзі «Математичного зібрання» Паппа, яка «містить порівняння ізопериметричних плоских фігур між собою і кругом і порівняння просторових тіл, що мають однакову поверхню, між собою і кулею», також викладена теорія Зенодора. Але текст Паппа подекуди є зіпсованим і незрозумілим.

Папп Александрійський (приблизно III-IV ст. н.е.) – математик і механік епохи пізнього еллінізму, жив і працював в Александрії. Інші відомості з його життя не збереглися. Головна праця Паппа - трактат «Математичні зібрання» у восьми книгах, дійшов до нас не повністю. Це посібник для вивчення геометрії - з коментарями, історичними довідками, з поліпшенням і видозміною відомих теорем і доведень, а також з деякими власними результатами автора. Зокрема, у трактаті містяться роботи Автоліка з Пітани, Менелая Александрійського, Феодосія, ряд задач про пропорційність, опис способів вписування п'яти правильних багатогранників у сферу, відомості про спіраль Архімеда і конхоїду Нікомеда, про ізопериметричні фігури, роботи з механіки Архімеда, Філона Візантійського, Герона Александрійського, визначення конічних перетинів за допомогою директриси та інші задачі. Тут же наведена теорема Паппа. Також в цій роботі розглядається задача Паппа: для n прямих на площині треба знайти геометричне місце точок, для яких добуток довжин відрізків, проведених з цих точок до $n/2$ даних прямих під однаковими кутами, має задане відношення до аналогічного добутку довжин відрізків, проведених до інших прямих. Для значної частини випадків Папп довів, що шукане геометричне місце точок є конічним перетином.

Багато результатів античних авторів відомі тільки в тій формі, в якій вони збереглися у Паппа (наприклад, задачі про квадратуру круга, подвоєння куба і трисекцію кута). Напівправильні тіла Архімеда теж відомі нам завдяки Паппу.

---

[1] Назва цього твору у всіх згадуваних далі джерелах є «Про ізометричні фігури». Гультч вважає, що вживається слово «ізометричні», а не «ізопериметричні» тому, що Зенодор розглядає також просторові задачі, до яких термін периметр не відноситься.

Робота Паппа стала загальновідомою після перекладу Федеріко Коммандіно латинською мовою у 1588 р.

Відтворити хід міркувань Зенодора у незрозумілому і пошкодженому тексті Паппа дозволило те, що в додатках до нього Гультч помістив відповідний текст з коментаря Теона [Pappi Alexandrini Collectionis, 1876–1878, т. III, с. 1189 – 1211]. У цьому перекладі Гультч, як він сам каже, з метою порівняння обох творів змінив тільки символіку і форму креслень на однакову з уживаною у Паппа. Однак саме порівняння і включені відповідні примітки Гультча мають переважно лінгвістичний характер. В тому разі, коли Гультч намагається провести порівняння по суті, він проявляє часто необгрунтовану пристрасть до способу викладення Паппа. Так, він може вважати прямою заслугою Паппа неістотну зміну фрази, говорити про більш витончене і наочне доведення Паппа, яке насправді збігається з відповідним міркуванням Зенодора, і зробити скромне зауваження про просту відмінність доведення у разі, коли в доведенні у Паппа є явна помилка. Втім, слід зауважити, що не всі зміни Паппа неістотні або неправильні. Можна відзначити і більш загальні формулювання теорем, і додатково вирішені питання, і істотні поліпшення доведень.

Що ж стосується міркування Зенодора, то перш за все слід вказати, що все воно побудовано в строго класичному, евклідовому дусі: він вважає за необхідне доводити, і до того ж надзвичайно докладно, навіть абсолютно очевидні твердження, наприклад, що на основі *AB* нерівнобедреного трикутника *ABC* можна побудувати ізопериметричний з ним трикутник *ABD* (рис. 3). Характерно, що при цьому завжди спочатку доводиться можливість побудови, потім дається сама побудова і, нарешті, доводиться, що побудований трикутник дійсно задовольняє вимоги задачі.

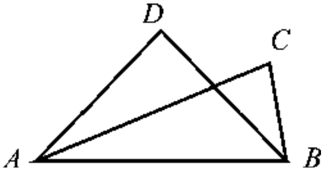


Рис. 3

Однак Папп, викладаючи зміст твору Зенодора, вже не так строго стежить за виконанням всього цього ритуалу, обмежуючись, наприклад, в наведеному прикладі доведенням існування шуканого трикутника, яке він проводить тим же методом, що і Зенодор, але для загальнішого випадку. Він показує, що для будь-якого нерівнобедреного трикутника *ABC* існує ізопериметричний з ним, але ближчий до рівнобедреного трикутник *ABD*, спираючись на теорему про те, що у разі, коли кожні два з деяких трьох відрізків в сумі більші третього, то існує трикутник, сторони якого рівні цим відрізкам.

До речі, слід зазначити, що поширене серед істориків математики твердження, ніби стародавні вчені доводили існування тільки шляхом побудови, тобто діяли в стилі сучасних інтуїціоністів[1], потребує уточнення. Вірно, що стародавні класичного періоду не обмежувалися одним тільки доведенням існування, але вважали за необхідне виконати і побудову. Однак існування не випливало у них з

---

[1] Як відомо, інтуїціоністи (Брауер, Вейль) розглядаюь твердження про існування лише як абстракцію від уже виконаної попередньої побудови, відмовляючись таким чином від категорії можливості в математиці.

побудови. Швидше навпаки, до побудови у більшості випадків переходили лише після доведення існування шуканого об'єкта, яке служило обгрунтуванням можливості побудови.

Вже в ті далекі часи існувала дуже струнка і красива теорія ізоперимеричних фігур. Вона цілком строго була розвинена для правильних багатокутників, було проведено порівняння правильних багатокутників з колом того ж периметра, були спроби вирішення просторової ізопериметричної задачі. Однак, коли Зенодор намагався довести, що правильний багатокутник є максимальним з усіх багатокутників з тим же периметром і числом сторін, він припускався логічної помилки. Він вважав чимось само собою зрозумілим, що існує така максимальна фігура, і вивчав її властивості. Але головне питання і полягає в доведенні існування шуканої фігури, тому що з виділення класу, наприклад, ізопериметричних багатокутників з заданим числом сторін не випливає, що в цьому класі існує максимальна фігура. Однак слід зауважити, що ця логічна прогалина в елементарній теорії ізопериметричних фігур не була подолана ще дуже довгий час. Роботи Штейнера (1796 - 1863) з цього питання, незважаючи на простоту, витонченість, дотепність прийомів, – він розробив цілих п'ять методів для доведення основної теореми ізопериметрії про коло, як найбільше (за площею) з усіх плоских фігур однакового периметра, також мали вказаний недолік. Штейнер не йшов прямим шляхом, який полягає у виборі з даної множини певного елемента і доведенні, що він має потрібну ознаку (наприклад, площу або об'єм) більшою мірою, ніж будь-який інший елемент цієї множини. Його шлях полягав у визначенні властивостей, які повинен мати максимальний елемент множини, і у знаходженні елемента, що може задовольняти ці властивості. Але, по-перше, саме виділення властивостей максимальної фігури припускає її існування, і, по-друге, ніколи не можна бути певним, що вказані всі її властивості.

В інших роботах з елементарної ізопериметрії були спроби позбутися цього недоліку. Люїльс (1750 - 1840), наприклад, перетворював даний трикутник в ізопериметричний рівнобедрений трикутник (як це робив і Зенодор) і повторюючи цей процес нескінченну кількість разів, отримав нескінченний ряд рівнобедрених трикутників, у яких різниця бічної сторони і основи за абсолютною величиною асимптотично наближалася до нуля. Але Штейнер відкинув це доведення як незадовільне через те, що воно вимагало нескінченного процесу.

Перше елементарно-геометричне доведення основної теореми ізопериметрії, вільне від явних або неявних посилань на очевидність існування максимальної фігури, було дано лише у 1882 р. Едлером. Воно поділяється на три частини: по-перше, доводиться, що для будь-якого неправильного багатокутника можна шляхом скінченної кількості кроків (вказаних тут же в доведенні) побудувати деякий правильний багатокутник, який є ізопериметричним з даним, але має більшу площу; по-друге, коло порівнюється з площею ізопериметричного з ним правильного багатокутника методом, аналогічним методу Зенодора; і, по-третє, площа кола порівнюється з площею всякої плоскої ізопериметричної з ним фігури, чого не робили ні Зенодор, ні Папп, які розглядали, за прикладом Евкліда, тільки фігури, обмежені прямолінійними відрізками і дугами кіл.

У 1910 р. Каратеодорі і Штуді [Mathematische Annalen, 1910, 68, с. 133–140] знову розглядали цю задачу, розв'язуючи її строгими методами математичного аналізу.

Із сказаного видно, що виправлення логічної помилки, допущеної Зенодором, було важкою задачею і що витончена і дотепна теорія Зенодора цілком може зрівнятися з роботами навіть дуже недавнього часу.

Птолемеєвський «Альмагест», в коментарях Теона до якого була поміщена зенодорова теорія ізопериметричних фігур, був широко поширений в середньовіччя. Це і стало однією з причин того, що теорією ізопериметричних фігур і тіл займалися різні вчені того часу, зокрема, Йоганн Сакробоско (пом. у 1256 р.) і Томас Брадвардін (1290 – 1349). Завдяки цій обставині, ймовірно, теорія ізопериметрів привернула увагу і Галілео Галілея (1564 – 1642). Їй присвячено кілька сторінок галілеєвих «Бесід і математичних доведень, що стосуються двох нових галузей науки», вперше виданих у 1638 р.

Галіле́о ді Вінче́нцо Бонаю́ті де Галіле́й.
італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei
(1564 – 1642)

Про ізопериметричні фігури (твір побудований у формі бесіди) йдеться не спеціально, а лише до речі, у зв'язку з практичними питаннями та прикладами. Так, при міркуваннях про витягування майстрами золоченого дроту розглядаються і порівнюються між собою поверхні циліндрів, що мають рівні об'єми, а також об'єми ізоповерхневих циліндрів. Одну з отриманих при цьому теорем, – що об'єми прямих циліндрів, бічні поверхні яких рівні, обернено пропорційні їхнім висотам, – Галілей використовує для вирішення практичного питання про вибір найвигіднішої форми мішка для зерна, зробленого з прямокутного шматка полотна і круглого дерев'яного дна.

Появу в тексті основної теореми, – «що з усіх правильних фігур з рівним периметром коло має найбільшу площу, яка у багатокутників взагалі тим більша, чим більше число їх сторін», – Галілей також обґрунтовує практичними міркуваннями, взятими з творів стародавніх вчених. Перша частина основної теореми є у Галілея простим наслідком такої леми: «круг є середнім пропорційним між двома будь-якими правильними подібними багатокутниками, один з яких описаний навколо нього, а інший ізоперіметричний колу». Доведення другої частини основної теореми ґрунтується крім цієї леми на порівнянні площ описаних багатокутників.

Подальшого розвитку теорія елементарної ізопериметрії в роботах Галілея не мала. Навпаки він зауважує, що «ми, здається, занадто заглибилися в область геометрії» і поспішає перейти до інших питань. З цих питань відзначимо лише, що у зв'язку з дослідженням падіння тіл взагалі Галілей ставить задачу про брахістохрону – криву лінію, скочуючись по якій важка матеріальна точка найшвидше спуститься з однієї даної точки в іншу з нульовою початковою швидкістю. Спираючись на дослідні дані, Галілей доводить, що скочування по дузі кола відбувається швидше, ніж по його хорді.

1.2. Задача Герона

> *В задачах з елементарної геометрії доводиться користуватися дуже дотепними, часом тонкими прийомами, і той, хто в своїй молодості скуштував їхню принадність, ніколи їх не забуде.*
>
> Е. Борель

Геро́н Александрі́йський, грец. Ήρων (бл. 10 - 70)

У древніх вже були широко поширені знання про екстремуми, що мали навіть загальний, іноді філософський характер. Екстремальні ідеї древніх, безсумнівно, впливали на виникнення і розробку, зокрема, варіаційних принципів механіки. З цієї точки зору цікавою є одна робота Герона Александрійського, ідеї якої згодом допомогли Ферма відкрити і висловити свій мінімальний принцип для оптики. Йдеться про роботу Герона Александрійського «De Speculis» («Про дзеркала») [Herons von Alexandria, 1900, с. 301 – 325], хоча, власне, варіаційні задачі в ній не вирішувалися.

Герон Александрійський (бл. I ст. н. е.) – математик і винахідник античності. Жив і працював в Александрії, інших відомостей про його життя немає. Лише майже через 2000 років були знайдені і перекладені сучасними мовами арабські списки його праць. Основні праці «Метрика», «Пневматика», «Автоматопоетика», «Механіка», «Катопріка» (наука про дзеркала). Займався геометрією, механікою, гідростатикою, оптикою. Йому належать формули визначення площі різних геометричних фігур, найвідомішою є його формула для знаходження площі трикутника (формула Герона). Також знайшов чисельний розв'язок квадратного рівняння, наближені обчислення квадратних і кубічних коренів.

Довгий час робота Герона Александрійського «De Speculis», що збереглася лише в латинському перекладі ХШ ст., приписувалася Кл. Птолемею. Лише в XIX ст. вдалося встановити справжнього автора, спираючись на деякі дані, в тому числі на дуже важливе свідчення Даміаноса (VI ст. н. е. Див. його «Основні положення оптики», 1937, гл. 14, с. 12, 20). В згадуваній роботі Герон вважає, що «все, що рухається з неперервною швидкістю, рухається по прямій». Потім він пояснює, в чому полягає явище відображення і, нарешті, доводить, що у разі коли промінь йде від ока до предмета, на шляху відбиваючись від дзеркала, то кут падіння має бути рівним куту відбиття, тому що промінь світла повинен йти найкоротшим шляхом. За цієї умови шлях променя від ока до предмета буде найкоротшим. Доведення проведено також і для кривого дзеркала, причому в точці падіння променя крива поверхня дзеркала замінюється дотичною до неї площиною.

Задачу Герона можна інакше переформулювати таким чином: дано дві точки *A* і *B* по одну сторону від прямої *l*. Потрібно знайти на *l* таку точку *D*, щоб сума відстаней від *A* до *D* і від *B* до *D* була найменшою (рис. 4).

Наведемо розв'язання задачі Герона. Нехай B_1 - точка, симетрична *B* відносно прямої *l*. З'єднаємо *A* з B_1. Тоді точка *D* перетину AB_1 з прямою *l* буде шуканою (рис. 4).

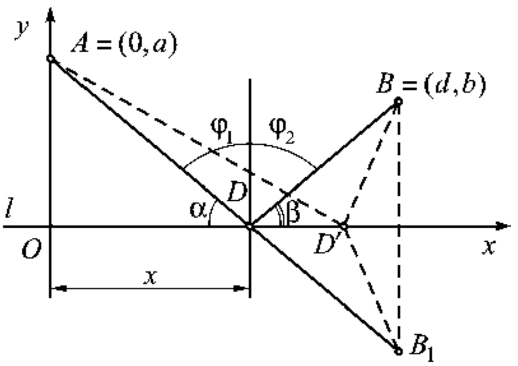


Рис. 4

Дійсно, для будь-якої точки D', відмінної від *D*, справедлива нерівність

$$|AD'|+|D'B|=|AD'|+|D'B_1|>|AB_1|=|AD|+|DB_1|. \qquad (4)$$

Тут і далі будемо використовувати такі позначення: [*AB*] - відрізок, що з'єднує точки *A* і *B*, |*AB*| - довжина відрізка [*AB*], *AB*||*CD* - пряма *AB* паралельна прямій *CD*.

У нерівності (4) використовувалися властивості симетрії, з яких випливають рівності $|DB|=|DB_1|$, $|D'B|=|D'B_1|$ і нерівність трикутника $|AD'|+|D'B_1|>|AB_1|$. Задача розв’язана.

Зауважимо: шукана точка *D* має таку властивість, що кут α дорівнює куту β (рис. 4), а також кут φ_1 дорівнює куту φ_2 або, як кажуть, кут падіння дорівнює куту відбиття.

Ідея, використана в наведеному тільки що міркуванні, дозволяє розв’язати також такі задачі.

Задача 1. Задано кут і точка *C* всередині нього. Знайти такі точки *A* і *B* на сторонах кута, щоб периметр трикутника *ABC* був найменшим.

Задача 2. Задано кут і дві точки *C* і *D* всередині нього. Знайти такі точки *A* і *B* на сторонах кута, щоб сума довжин $|CA|+|AB|+|BD|$ була найменшою.

Розв'язання цих задач є наочно зрозумілим з рис. 5 і 6. Якщо ж побудова, наведена на цих рисунках, неможлива, то шукані точки мають збігатися з вершиною кута.

Герон досліджує в своїй книзі закони відбиття світла і застосовує результати своїх роздумів до питань, пов'язаних з властивостями дзеркал. Зокрема, він доводить, що параболічне дзеркало фокусує пучок променів, паралельних осі параболи.

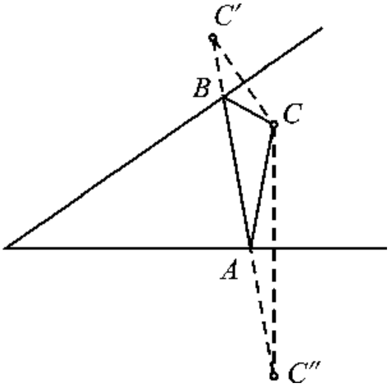


Рис. 5

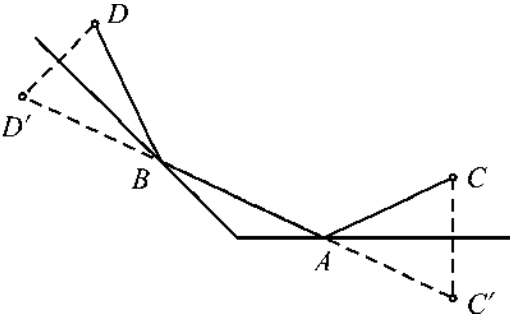


Рис. 6

В ту пору закони природи намагалися осягнути умоглядно, за допомогою логічних міркувань, не вдаючись до експерименту. Першим експериментатором в історії науки був Г. Галілей, який жив в XVII столітті. Герон, своєю чергою, пояснюючи закони відображення, шукав для них логічні підстави. Він припускав, що природа діє найкоротшим шляхом. Ось як пише про це один з його коментаторів Даміанос (VI ст. н. е.): «Герон ... показав, що прямі, нахилені під рівними кутами, є найменшими з усіх проміжних, що утворюють нахили з однієї і тієї ж сторони від однієї і тієї ж прямої. Доводячи це, він говорить, що якщо природа не хоче даремно обводити промінь зору, то вона переламає їх під рівними кутами». Дослідники історії науки вважають, що тут вперше пролунала думка про те, що природа керується екстремальними принципами.

Ідею Герона розвинув французський математик П'єр Ферма (1601–1665). Ферма вивів відомий на той час закон переломлення світла, виходячи з припущення, що траєкторія поширення світла від однієї точки до іншої в неоднорідному середовищі характеризується тим, що на шлях уздовж неї витрачається найкоротший час. Починаючи з цього моменту, ідея екстремальності проявів природи стає провідною зіркою всього природознавства. На підтвердження можна навести слова Л. Ейлера: «У світі не відбувається нічого, у чому не було б видно сенс якогось максимуму або мінімуму». Факт залишається фактом: траєкторії світла і радіохвиль, руху маятників і планет, течії рідин і газів і багато інших рухів виділяються з різноманіття всіх можливих рухів тим, що вони є розв’язками деяких задач на максимум або мінімум. Ця обставина є плідним засобом математичного опису природи.

У цьому полягає одна з причин, що спонукають розв’язувати задачі на максимум і мінімум і розвивати теорію екстремальних задач. Вона привела в XVIII ст. до створення спеціального розділу цієї теорії, названого варіаційним численням.

Інша причина в тому, що людям властиво прагнення до кращого, і тому їм завжди хочеться вибрати оптимальну з наявних можливостей. Трапляється, що математика може в цьому допомогти.

Це можна обговорювати на прикладі задачі Герона, якій іноді надають вигляд проблеми, що виникає на практиці. Тоді пряма l стає, скажімо, прямолінійною ділянкою залізниці, точки A і B - містами, точка D - залізничною платформою. І ставиться питання: де слід поставити платформу, щоб прямолінійні ділянки шляху мали найменшу сумарну довжину?

Геометричною задачею, що має прикладне значення, є, наприклад, така: нехай є три міста A, B і C. Потрібно вказати таке місце D, щоб сумарна довжина прямолінійних ділянок шосе, що з'єднують D з A, B і C, була мінімальною.

Звичайно, такого роду задачі є лише моделями реальних життєвих ситуацій. На практиці все набагато складніше: і ділянки залізниці не бувають прямолінійними, і шосе не будують строго прямими, і «сума відстаней» в чистому вигляді рідко буває «критерієм оптимальності». Але безсумнівно, що при будівництві залізничних, шосейних чи інших доріг, так само як і при будівництві газо- і нафтопроводів, і в багатьох інших випадках, постає питання, як це здійснити найдоцільніше або, скажімо, найдешевше. Такі проблеми є частими у господарській діяльності.

1.3. Максимуми і мінімуми в геометрії

> *Геометрія – це мистецтво добре міркувати на погано виконаних кресленнях.*
>
> Н. Абель

П. Лаплас писав: «Історія науки дає нам багато прикладів застосування чистої геометрії і користі, принесеної нею». Геометричні задачі на максимум і мінімум зустрічаються у всіх трьох найвидатніших математиків античності - Евкліда, Архімеда, Аполлонія. Їм віддавали данину найвидатніші математики епохи Відродження - Вівіані, Торрічеллі, Ферма та інші. Інтерес до таких задач зберігся і дотепер.

1.3.1. Задача Евкліда

> *Ніколи не слід забувати, що в нашому евкліловому світі будь-яка палиця має два кінці.*
>
> А. Стругацький, Б. Стругацький

Евклід – давньогрецький математик, визнаний основоположник математики. Родом з Афін, був учнем Платона, є автором найдавніших трактатів з математики, які дійшли до сьогодення. В них підсумовано досягнення давньогрецької математики. Наукова діяльність Евкліда проходила в Александрійській бібліотеці - суспільній інституції, що являла собою бібліотечний, науковий, навчальний, інформаційно-аналітичний і культурологічний комплекс. Основна праця Евкліда «Начала» (латинізована назва «Елементи»), що вийшла в IV ст. до н. е., є першою науковою монографією та першим навчальним посібником в історії людства. Ця праця складається з 15 книжок, які містять систематизований виклад геометрії, а також деяких питань теорії чисел. «Начала» відіграли винятково важливу роль у подальшому розвитку математичної науки. Історичне значення цієї праці полягає в тому, що в ній уперше здійснено спробу логічної побудови геометрії на основі аксіоматики. «Начала» Евкліда витримали понад 500 перевидань усіма мовами світу. Евклід мав також роботи з астрономії, оптики, теорії музики. На його честь названі евклідова геометрія, евклідова відстань, евклідова норма, евклідове кільце, евклідів простір, алгоритм Евкліда.

Евклі́д,
дав.-гр. Ευκλείδης
(близько 365 до н. е. -
близько 300 до н. е.)

В «Началах» Евкліда є лише одна задача на максимум. У сучасній редакції вона формулюється так. В даний трикутник *ABC* вписати паралелограм *ADEF* ($EF \| AB$, $DE \| AC$) найбільшої площі (рис. 7).

Наведемо одне з можливих геометричних розв'язань цієї задачі, висхідне до розв'язання Евкліда, що міститься у «Началах». Доведемо, що шуканий паралелограм характеризується тим, що *D*, *E* і *F* - середини відповідних сторін.

Дійсно, нехай *AD'E'F'* - вписаний в *ABC* паралелограм, відмінний від *ADEF*. Точку перетину прямих *D'E'* і *EF* позначимо через *G'*, а точку перетину прямих *DE* і *E'F'* - через *G*.

Покажемо, що площа паралелограма *AD'E'F'* менша площі паралелограма *ADEF* на величину площі паралелограма *EG'E'G*. Для цього проведемо в трикутнику *ABC* з точки *B* висоту, довжину якої позначимо через *H*. Довжину сторони *AC* позначимо через b, а довжину висоти трикутника *GE'E*, проведеної з точки *E'*, - через H_1.

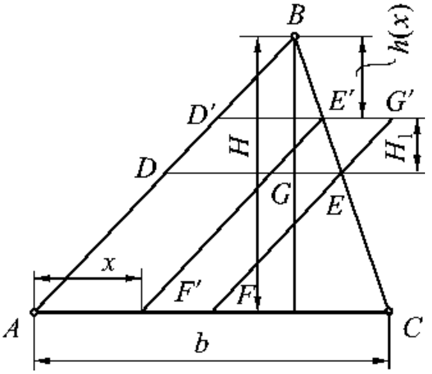


Рис. 7

З подібності трикутників *GEE'* і *ABC* ($E'G \| AB$, $GE \| AC$) дістанемо

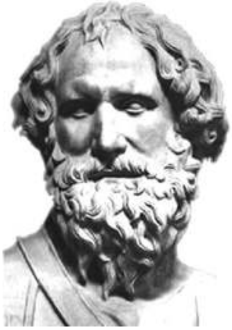
$$\frac{H_1}{|GE|} = \frac{H}{b} \Leftrightarrow \frac{H_1}{H/2} = \frac{|GE|}{b/2}.$$

З отриманого співвідношення випливає, що площа паралелограма *D'G'ED*, висота якого H_1, а довжина сторони *DE* - $b/2$, дорівнює площі паралелограма *EGF'F,* бо його висота дорівнює $H/2$, а довжина сторони *F'F* дорівнює $|GE|$. Звідси і випливає, що площа паралелограма *ADEF* дорівнює площі фігури *AD'G'EGF'*, тобто на величину площі паралелограма *GE'G'E* більша, ніж площа *AD'E'F'*. Задача розв'язана.

1.3.2. Ізопіфанна задача Архімеда

> *Розповідають, що Архімед заповідав побудувати над своєю могилою пам'ятник у вигляді сфери і циліндра на згадку про те, що він знайшов відношення об'ємів циліндра і вписаної в нього сфери* – 3/2 .
>
> М. Вебер

Серед вчених всіх часів геній Архімеда, поряд з генієм Ньютона, викликає, мабуть, найбільше захоплення.



Архімед,
дав.-гр. Ἀρχιμήδης
(прибл. 287 – 212 до н. е.)

Архімед (287-212 рр. до н. е.) – славетний математик і механік античності. Він зробив видатний внесок у математику, механіку, фізику і астрономію, впритул наблизився до створення інтегрального числення, чим випередив свій час на два тисячоліття.

Математичний геній Архімеда проявився особливо виразно в тому, що він взявся за вирішення найважчих проблем свого часу: обчислення площ криволінійних фігур, обчислення поверхонь і об'ємів циліндра і сфери. Ці проблеми приводять його (у творі «Ефодікон», відкритому в 1906 р.) до встановлення основних понять інтегрування. Історії знадобилося близько 1700 років для того, щоб Ісааком Ньютоном (1643-1727) і Ґотфрідом Лейбніцем (1646-1716) було фактично започатковано диференціальне і інтегральне числення. Архімед був першим із стародавніх, хто встановив межі для числа π (він встановив, що π знаходиться між $3\,{}^{1}/_{7}$ і $3\,{}^{10}/_{11}$).

Свій математичний геній Архімед проявив і у вирішенні механічних задач, багато зробив у механіці. Його основні досягнення - закон важеля і закон Архімеда - отримані геометричним методом. Архімеда з повним правом можна назвати родоначальником математичної фізики.

Добре відома розповідь Вітрувія про обставини відкриття знаменитого закону Архімеда. Вигук Архімеда, який відкрив закон у ванні, «Евріка!» - став крилатим висловом. Вітрувій розповідає, що Архімед дослідом перевірив своє відкриття. Звичайно, не підлягає сумніву, що дослід наштовхнув Архімеда на ідею, і дослід дав йому можливість її перевірити. Більше того, Архімед, безсумнівно, вмів на досліді визначати питому вагу; згадують навіть про поплавок, за допомогою якого порівнюють питомі ваги рідин (ареометр).

В особі Архімеда механіка стародавніх досягла кульмінаційного пункту. До його результатів наступники не додали нового, а в середньовіччя вони були втрачені, і архімедове вчення про плавучість тіл було замінено вченням схоластів про те, що плавання тіл обумовлено їхньою формою.

За легендою, Архімед заявляв: «Якби в моєму розпорядженні була інша Земля, на яку можна було б стати, я зрушив би з місця нашу» (в іншому варіанті: «Дайте мені точку опори, і я переверну світ»).

Вже зазначалося, що в деяких творах стародавніх авторів вказується, що Архімед доводив ізопериметричну властивість кола і ізопіфанну властивість сфери. Однак в творах Архімеда, що дійшли до нас, ізопериметрична задача не згадується, і внесок Архімеда у вирішення цієї проблеми дотепер невідомий. Рішення ж однієї ізопіфанної задачі є в творі Архімеда «Про сфери і циліндри». Там ставиться і вирішується така проблема: знайти сферичний сегмент, що вміщує максимальний об'єм, серед всіх сегментів, які мають задану площу сферичної поверхні.

Наведемо спочатку розв'язання, хоча і засноване цілком на ідеях Архімеда, але все ж таки сильно алгебраізоване. А потім наведемо це ж розв'язання, викладене суто геометричною мовою його автора.

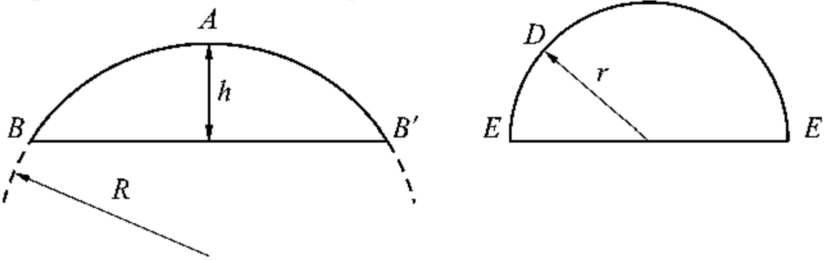


Рис. 8

Розглянемо кулю радіуса R і її кульовий сегмент BAB' висоти h (рис. 8). Разом із сегментом BAB' розглянемо півкулю EDE' з такою ж бічною поверхнею. Позначимо її радіус через r. Об'єм V сферичного сегмента дорівнює, як відомо, $nh^2(R$ - $h/3)$, площа його бічної поверхні – $2\pi Rh$, об'єм $\hat{V}$ півкулі – $(2/3)\pi r^3$, площа $\hat{S}$ бічної поверхні – $2\pi r^2$. З рівності бічних поверхонь сегмента і півкулі маємо

$$r^2 = Rh. \tag{5}$$

Доведемо нерівність

$$(2R-r)r > (2R-h)h \text{ при } h \neq R. \tag{6}$$

Розглянемо два випадки: а) $h < R$ і б) $h > R$.

У випадку а) $r^2 = Rh > h^2 \Rightarrow r > h \Rightarrow$

$$\Rightarrow R - r < R - h \Rightarrow (2R-r)r = R^2 - (R-r)^2 > R^2 - (R-h)^2 = (2R-h)h;$$

у випадку б):

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= Rh < h^2 \\ r^2 &= Rh > R^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R < r < h \Rightarrow r - R < h - R \Rightarrow (2R-r)r = R^2 - (R-r)^2 > R^2 - (R-h)^2 =$$

$$= (2R-h)h.$$

Додавши (5) і (6) і помноживши на $\pi h/3$, дістанемо

$$\frac{\pi h}{3}\cdot 2Rr > \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2. \tag{7}$$

Замінивши тепер в (7) Rh на r^2, отримаємо потрібну нерівність:

$$\widehat{V} = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{\pi h}{3}\cdot 2Rr > \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right) = V.$$

Отже, півкуля з тією ж бічною поверхнею має більший об'єм порівняно зі сферичним сегментом, або, словами Архімеда, «з усіх сферичних сегментів, обмежених рівними поверхнями, найбільшим буде півкуля». [Архимед, 1962. с. 95–117].

Наведемо ще одне розв'язання цієї задачі, вже майже буквально йдучи за думкою Архімеда (в дужках все ж будемо вказувати відповідні алгебраїчні співвідношення).

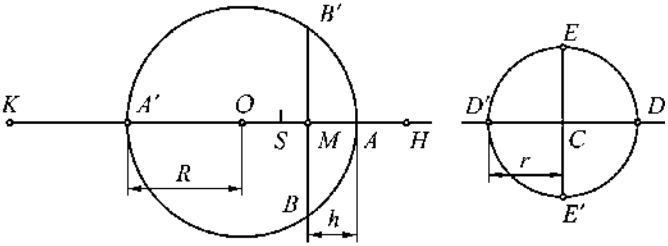


Рис. 9

Архімед не міг скористатися алгебраїчною мовою і алгебраїчними викладеннями - адже до зародження алгебри залишалося вісімнадцять століть. Мова Архімеда - мова геометрії. На прямій *A'A* (рис. 9) відкладемо, слідом за Архімедом, відрізок [*OH*] такої величини, щоб конус з висотою *HM* і з радіусом основи *MB* був рівновеликим сферичному сегменту *BAB'*.

На продовженні відрізка [*OA'*] відкладемо відрізок [*A'K*] довжини, рівної радіусу *R*. Рівновеликість конуса і сегмента приводить Архімеда до такої пропорції:

$$\frac{|HM|}{|AM|} = \frac{|KM|}{|A'M|}. \tag{8}$$

Перевіримо, чи ця рівність дійсно має місце (використовуючи відомі формули об'єму конуса $V_{\text{к}}$ і сегмента $V_{\text{с}}$):

$$V_{\text{к}} = \frac{\pi}{3}|HM||MB|^2 = \frac{\pi}{3}|HM||MA'||MA| = V_{\text{с}} = \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2 = \frac{\pi}{3}|KM||AM|^2. \tag{9}$$

Ми скористалися тим, що довжина відрізка [*MB*] є середнім геометричним довжин відрізків [*A'M*] і [*MA*]. З (9) формула (8) випливає відразу.

Рівність поверхонь півкулі і сегмента приводить до того, що

$$|AB| = |ED|. \tag{10}$$

Дійсно, $|ED| = r\sqrt{2}$, $|AB|^2 = |AA'||AM|$ (знову відома властивість трикутника, який вписаний в коло і спирається на діаметр), отже,

$$\pi|AB|^2 = 2\pi Rh = S_{\text{с}} = \widehat{S} = 2\pi r^2 = \pi|ED|^2 \Rightarrow |AB| = |ED|.$$

Далі Архімед відкладає відрізок [*AS*], рівний за довжиною [*CD*] і доводить нерівність (6):

$$|A'S||AS| > |A'M||AM| \quad (\Leftrightarrow (2R-r)r > (2R-h)h).$$

Цей факт Архімед доводить геометрично: з двох прямокутників з однаковим периметром площа більша у того, у якого більша довжина меншої сторони.

Далі маємо (через рівність бічних поверхонь сегмента і півкулі)

$$|AS|^2 = |AM||A'K| \quad (\Leftrightarrow r^2 = Rh).$$

Додаючи останню нерівність і цю рівність, дістанемо

$$|AS||AA'| > |KM||AM| \quad (\Leftrightarrow 2Rr > (3R-h)h).$$

Помноживши на $|AM|$ і використовуючи (9), отримаємо

$$|AS||AA'||AM| > |KM||AM|^2 \quad (\Leftrightarrow 2Rrh > (3R-h)h^2). \tag{11}$$

Раніше були доведені співвідношення

$$|KM||AM|^2 = |HM||MB|^2 \text{ (див. (9))},$$

$$|AA'||AM| = |AB|^2 = |ED|^2 \text{ (див. (10))},$$

$|AS| = |CD|$ (за побудовою), звідки із (11) маємо

$$\widehat{V} = \frac{\pi}{3}|CD||ED|^2 > \frac{\pi}{3}|HM||MB|^2 = V_{\text{к}} = V_{\text{с}} \quad (\Leftrightarrow \widehat{V} = \frac{2}{3}\pi r^3 > \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2 = V_{\text{с}}).$$

Доведення завершено.

Нагадаємо, що всі використані формули (об'єм конуса, сфери та сферичного сегмента, площа поверхні сфери і сферичної поверхні сегмента) також вперше отримані саме Архімедом і все в тій же роботі «Про сфери і циліндри». Важко не погодитися зі словами англійського математика Г. Харді: «Архімеда будуть пам'ятати, коли Есхіла забудуть, бо мови вмирають, а математичні ідеї – ніколи». Архімеда будуть славити, допоки житиме хоча б один математик.

1.3.3. Задача Штейнера

> *Історія науки дає нам багато прикладів застосування чистої геометрії і користі, принесеної нею.*
>
> П. Лаплас

Розглянемо ще одну задачу на максимум і мінімум: у площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника мінімальна.

Ця задача теж має давню історію, хоча і не таку, як задача Герона і класична ізопериметрична. Вона містилася в творі Вівіані «Про максимальні і мінімальні значення», який вийшов у світ в 1659 р.

Цією ж задачею цікавилися Кавальєрі і Торрічеллі. Самий же результат розв'язання цієї задачі, тобто точку, де досягається шуканий мінімум, прийнято називати точкою Торрічеллі (див., наприклад, книгу Зетеля [Зетель, 1948]). Кокстер [Кокстер, 1966] стверджує, що цією задачею займався також і Ферма.

Вінченцо Вівіані (1622 – 1703), Бонавентура Франческо Кавальєрі (1598 - 1647) і Еванджеліста Торрічеллі (1608 - 1647) - відомі італійські вчені XVII ст. Кавальєрі знаменитий своїм принципом - предтечею інтегрального числення, Торрічеллі - відкриттям атмосферного тиску. Торрічеллі і Вівіані - учні Галілея. Саме Вівіані записував «Бесіди про механіку» зі слів Галілея, коли той осліп наприкінці свого життя.

Інтерес таких великих вчених до такої елементарної задачі - ще одне підтвердження того, що стимулом до творчості нерідко є естетичні мотиви.

У XIX ст. цією і іншими подібними проблемами багато займався швейцарський математик Якоб Штейнер (1796 - 1863). Їх часто називають проблемами Штейнера.

Наведемо відоме геометричне розв’язання задачі Штейнера для трикутника з кутами, що не перевищують 120°. Нехай в трикутнику *ABC* (рис. 10) кут $C \ge 60^\circ$. Повернемо тепер трикутник *ABC* навколо точки *C* на кут 60°. Отримаємо трикутник *A'B'C*. Візьмемо будь-яку точку *D* в трикутнику *ABC*, а через *D'* позначимо образ *D* при вказаному повороті. Тоді сума довжин $|AD|+|BD|+|CD|$ дорівнює довжині ламаної $|BD|+|DD'|+|D'A'|$.

Нехай тепер $\hat{D}$ - точка Торрічеллі, тобто точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120°, і $\hat{D}'$ - образ $\hat{D}$ при повороті. Неважко зрозуміти, що точки *B*, $\hat{D}$, $\hat{D}'$ і *A'* лежать на одній прямій, звідки випливає, що точка Торрічеллі і є розв’язком задачі. Можна показати, що якщо тупий кут більший 120°, то розв’язком задачі буде вершина тупого кута.

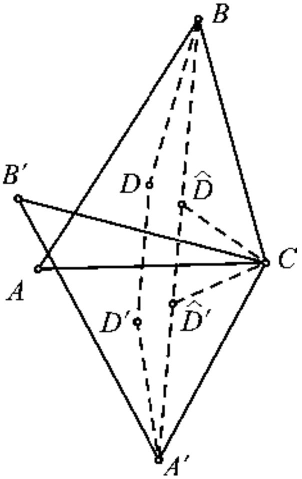


Рис. 10

Бонавентура
Франческо Кавальєрі,
італ. Bonaventura
Francesco Cavalieri
(1598 - 1647)

Еванджеліста
Торрічеллі,
італ. Evangelista
Torricelli
(1608 - 1647)

Вінченцо Вівіані,
італ. Vincenzo Viviani
(1622 – 1703)

Я́коб Ште́йнер,
нім. Jakob Steiner
(1796 - 1863)

1.4. Максимуми і мінімуми в алгебрі

> *Алгебра є щедрою. Найчастіше вона дає більше, ніж від неї вимагають.*
>
> Ж. Д'Аламбер

> *Алгебра – це арифметика після вторгнення в неї латинського алфавіту.*
>
> Інтернет

Багато цікавих задач на максимум і мінімум з'явилися у зв'язку з розвитком алгебри і аналізу.

1.4.1. Задача Тартальї

Італійський математик Нікколо Тарталья (1499 - 1557) увійшов в історію науки як людина, яка навчилася розв'язувати рівняння третього степеня. За його словами він самостійно відкрив загальний алгоритм розв'язання кубічних рівнянь, дещо раніше знайдений італійським математиком Сципіоном дель Ферро. У 1539 р. Тарталья передав опис цього методу Дж. Кардано, який поклявся не публікувати його без дозволу Тартальї. Незважаючи на обіцянку, у 1545 р. Кардано опублікував цей алгоритм у своїй роботі «Велике мистецтво», тому він увійшов в історію математики як «формула Кардано». Питання про те, чи дійсно Тарталья незалежно відкрив метод дель Ферро, неодноразово обговорювалося. Висловлювалося припущення, що насправді Тарталья якимось чином отримав доступ до записів дель Ферро. Як на непрямі докази такого твердження історики посилалися на те, що інших серйозних математичних досягнень у Тартальї не було. Однак прямих свідчень на користь вказаного припущення знайти не вдалося.

Нікколо́ Тарта́лья,
італ. Niccolò Tartaglia
(1499 - 1557)

Справжнє ім'я Нікколо Тарталья – Нікколо Фонтана. У віці шести років під час однієї з Італійських воєн (1494-1559), що вели між собою Франція та Іспанія за право володіти Італією, він був поранений в обличчя і через це розмовляв з великими труднощами, тому його називали «Тарталья» (італ. tartaglia - заїка).

Розглянемо задачу, пов'язану з питанням, поставленим в одному з творів Тартальї: розділити число вісім на дві такі частини, щоб добуток їхнього добутку на їхню різницю був максимальним.

Зробимо спробу відновити хід міркувань Тартальї при розв'язанні цієї задачі. Для цього не зайвим буде сказати кілька слів про історію його знаменитого відкриття.

Сципіон дель Ферро, який вперше знайшов розв’язок рівняння $x^3+px+q=0$ (для додатного p і від’ємного q), жив на рубежі XV і XVI століть. Це був час, коли коренями рівняння вважалися лише додатні корені - ні від’ємні, ні, тим більше, комплексні до уваги не бралися. Дель Ферро не опублікував свого відкриття, але повідомив про нього кількох близьких собі людей.

В ті часи були дуже поширені «математичні бої». Один із посвячених у таємницю розв’язання рівняння третього степеня вирішив скористатися нею, щоб перемагати в математичних боях. І він, напевно, домігся б повного успіху, якби одного разу доля не звела його з Нікколо Тарталья. Тартальї було запропоновано вирішити 30 рівнянь третього степеня при різних значеннях p і q. Спочатку Тарталья не знав, що його супротивнику відома таємниця загального розв’язку. Але незадовго до закінчення терміну, коли необхідно було представити розв’язки задач, Тарталья про це дізнався. Вклавши всі свої сили у вирішення проблеми, Тарталья за 8 днів до призначеного терміну самостійно винайшов цей спосіб. Інакше кажучи, він отримав (слідом за дель Ферро) таку формулу:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (12)$$

Формула (12) дає вираз для додатного кореня у випадку Ферро (якщо $p > 0$, а $q < 0$). Але і в інших випадках (наприклад, коли $p < 0$, а $q > 0$) вона також дає вираз для дійсного кореня. Як зазначалося, ця формула зазвичай називається формулою Кардано, який вперше оприлюднив її. Тарталья цієї формули не опублікував, але в низці своїх робіт він повідомляв про те, що вміє розв’язувати ті чи інші рівняння і задачі. В одній з його робіт була поставлена і сформульована вище задача. Автор не навів її розв’язання, але дав відповідь, яку сформулював так: «число 8 слід розділити навпіл; квадрат цієї половини, збільшений на третину цього квадрата, має дорівнювати квадрату різниці обох частин». Таким чином, якщо шукані числа позначити через a і b ($a>b$), то для різниці a-b Тарталья навів такий вираз: $(a-b)^2=(8:2)^2+(8:2)^2:3=64/3$, тобто $a-b=8/\sqrt{3} \Leftrightarrow a=4+4\sqrt{3}$, $b=4-4\sqrt{3}$. Як буде видно далі, Тарталья не помилився.

А тепер спробуємо (за книгою Цейтена [Цейтен, 1932]) відновити хід міркувань Тартальї, який привів його до правильної відповіді. Не будемо обмежуватися конкретним числом 8, а розв’яжемо задачу в загальному вигляді.

Нехай треба розділити довільне число S. Як ми бачили, Тарталья у відповіді вказує не самі числа a і b, а їхню різницю. Напевно, саме її він брав за невідоме. Отже, нехай $a-b=x$, тоді $a=(S+x)/2$, $b=(S-x)/2$, і отже, треба знайти максимум функції

$$f(x)=x(S/2+x/2)(S/2-x/2)=(S^2x-x^3)/4.$$

Позначимо максимальне значення цієї функції (для $x\geq 0$) через M і отримаємо рівняння для x:

$$x(S/2+x/2)(S/2-x/2)=M \Leftrightarrow x^3-S^2x+4M=0. \qquad (13)$$

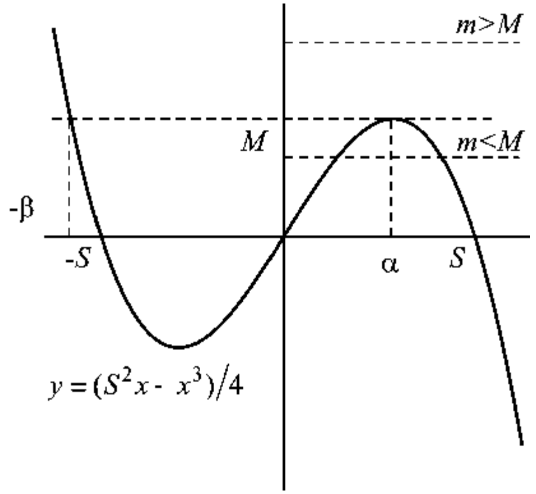


Рис. 11

На жаль, рівняння (13) не має структури рівняння Ферро, бо тут $p = -S^2 < 0$, а $q = 4M > 0$. Але, з іншого боку, рівняння (13) має примітну особливість: крім від'ємного кореня (позначимо його $-\beta$) воно має двократний додатний корінь, тобто тут перетворюються в нуль функція і похідна. З рис. 11 видно, що при $m>M$ рівняння $x^3 - S^2x + 4m = 0$ не має додатних коренів, при $m < M$ має два кореня, а при $m = M$ - один додатний корінь. Додатний корінь рівняння (13) позначимо через α, це число і дорівнюватиме шуканій різниці. Таким чином, можна записати тотожність

$$x^3 - S^2x + 4M = (x+\beta)(x-\alpha)^2 = x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha^2\beta,$$

з якої випливає, що

$$\beta = 2\alpha,\ p = -S^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2,\ q = 4M = \alpha^2\beta = 2\alpha^3,$$

і отже,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow \frac{(4M)^2}{4} = \frac{S^6}{27} \Leftrightarrow (2M)^2 = \left(\frac{S^2}{3}\right)^3.$$

При цьому формула (12) дає вираз для від'ємного кореня:

$$-\beta = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{2M} = -2\frac{S}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \beta = \frac{2S}{\sqrt{3}}.$$

Звідси

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{S}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{S^2}{3} = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{S}{2}\right)^2. \tag{14}$$

Якщо S=8, то і виходить, що для отримання квадрата різниці «число 8 слід розділити навпіл і квадрат цієї половини збільшити на одну третину цього квадрата». Задача виявилася розв'язаною.

Тарталья написав кілька книг, в яких розглядалися не тільки питання математики, а й деякі питання практичної механіки, балістики і топографії. Найбільший твір Тартальї має назву «Generale trattato de numeri e misure» («Загальний трактат про число і міру», 1556-1560) виданий у Венеції і складається з шести томів. У ньому він виклав свої оригінальні дослідження з арифметики, алгебри і геометрії. Цікаво, що у цій книзі вперше застосовуються круглі дужки. Трактат містить також таблицю так званих «біноміальних коефіцієнтів», яка була частково відома в Індії ще в II ст. до н. е. Більшу популярність ця таблиця отримала в XVII ст. у зв'язку з роботами Блеза Паскаля, тому іноді її називають «трикутником Паскаля».

1.4.2. З історії деяких нерівностей

Відомо, що багато екстремальних задач приховані в різного роду «точних нерівностях». Розглянемо, мабуть, найдавнішу таку нерівність – *нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним двох чисел.* Нехай a і b - невід'ємні числа. Їх середнім геометричним називається число $\sqrt{ab}$, а середнім арифметичним - число $(a + b)/2$. Доведемо, що для будь-яких невід'ємних чисел a і b справедлива нерівність

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \tag{15}$$

тобто що середнє геометричне не перевищує середнього арифметичного. Нерівність (15) точна. Це означає, що в (15) іноді досягається рівність, а саме, це буває тоді (і тільки тоді), коли $a = b$.

В нерівності (15) насправді криються різні екстремальні задачі. Назвемо дві.

А. Знайти максимум добутку двох чисел, якщо їх сума є сталою.

Б. Знайти максимальну площу прямокутного трикутника, якщо сума довжин катетів є сталою.

З нерівності (15), зокрема, випливає, що серед прямокутних трикутників із заданою сумою катетів максимальну площу має рівнобедрений трикутник.

Задача А є алгебраїчною за своїм змістом; задача Б - геометричною. Коли Ферма відкрив свій метод знаходження максимумів і мінімумів (про нього йтиметься у нарисі 2), він виклав його в приватному листі відомому математику того часу Робервалю. Свій метод він проілюстрував, розв'язавши задачу Б, сам же геометричний факт був відомий ще античним геометрам.

П'єр Ферма́,
фр. Pierre de Fermat
(1601 — 1665)

Нерівність (15) можна довести різними способами. Наведемо два доведення: алгебраїчне і геометричне.

Алгебраїчне розв'язання грунтується на такій послідовності очевидних нерівностей:

$$0 \le (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Проіллюструємо це геометрично (рис. 12). Візьмемо відрізок [AC] довжини $a+b$ $(|AD| = a,\ |DC| = b)$ і проведемо півколо, що спирається на цей відрізок. З точки D встановимо перпендикуляр до AC. Нехай B - точка перетину цього перпендикуляра з півколом. З подібності трикутників ABD і BCD (слід мати на увазі, що кут B спирається на півколо і, отже, є прямим, тобто кут A дорівнює куту DBC, а кут C дорівнює куту ABD) дістанемо

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|BD|}{|DC|}\Rightarrow|BD|=\sqrt{ab}.$$

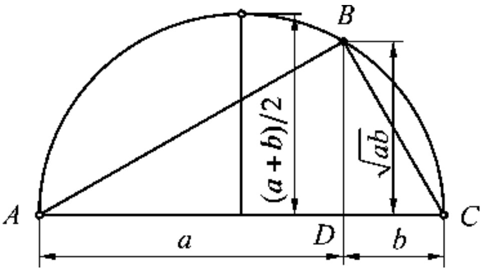


Рис. 12

Якщо тепер при фіксованому відрізку [AC] (тобто при заданій сумі $a+b$ міняти точку D, то видно, що відрізок BD матиме максимальну довжину (а саме рівну $(a+b)/2$) тоді і тільки тоді, коли точка D збігається з центром півкола. Цим і доводиться нерівність (15).

Нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним (загальний випадок). Доведемо таке твердження. Для будь-яких невід'ємних чисел $x_1,...,x_n$ справедлива нерівність

$$\sqrt[n]{x_1...x_n}\le\frac{x_1+...+x_n}{n}. \tag{16}$$

Ліва частина нерівності (16) називається середнім геометричним чисел $x_1,...,x_n$, права називається їх середнім арифметичним. Таким чином, не тільки для n=2, а і при будь-якому n середнє геометричне не перевищує середнього арифметичного. Нерівність (16) є точною. Якщо всі числа рівні, вона перетворюється у рівність.

Існує багато доведень нерівності (16). Одне з найкрасивіших і абсолютно елементарне - доведення, дане знаменитим французьким математиком О. Коші.

Спочатку покажемо, як за методом Коші довести нерівність (16) для n=3. Для цього виведемо (16) при $n=4$, а потім «спустимося» до $n=3$. Для $n=4$ нерівність (16) відразу випливає з дворазового застосування доведеної перед цим нерівності (16) для $n=2$:

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=(x_1\cdot x_2)\cdot(x_3\cdot x_4)\le\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2=$$

$$=\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]^2\le\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4, \tag{17}$$

тобто нерівність (16) для $n=4$ доведена.

А тепер застосувавши (17) дістанемо

$$(x_1\cdot x_2\cdot x_3)^{1/3}=\left[x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_1\cdot x_2\cdot x_3)^{1/3}\right]^{1/4}\le\frac{x_1+x_2+x_3+(x_1\cdot x_2\cdot x_3)^{1/3}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}(x_1\cdot x_2\cdot x_3)^{1/3}\le\frac{x_1+x_2+x_3}{4}\Rightarrow(x_1\cdot x_2\cdot x_3)^{1/3}\le\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

що доводить (16) для $n=3$.

Тепер доведемо (16) у загальному випадку. По-перше, зазначимо, що точно так, як перед цим доведено нерівність (16) для $n=4$, можна довести її для $n=8$, потім для $n=16$ і т.д. - для будь-якого n=2^k, $k=2,3,$ ...

Застосуємо «метод спуску», який вже використовувався при переході від чотирьох до трьох. Нехай нерівність для $n = m+1$ вже доведено. Доведемо її для $n = m$. За нашого припущення маємо

$$(x_1 ... x_m)^{1/m} = \left[(x_1 ... x_m) \cdot (x_1 ... x_m)^{1/m}\right]^{1/(m+1)} \le \frac{x_1 + ... + x_m + (x_1 ... x_m)^{1/m}}{m+1}.$$

Звідси

$$(x_1 ... x_m)^{1/m}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \le \frac{x_1 + ... + x_m}{m+1} \Rightarrow (x_1 ... x_m)^{1/m} \le \frac{x_1 + ... + x_m}{m}.$$

Нерівність (16) повністю доведена.

Це доведення - одне з багатьох. У відомій книзі Беккенбаха і Беллмана «Нерівності» [Беккенбах, Беллман, 1948] наведено дванадцять доведень цієї нерівності. Мабуть, найпростіше з них належить Елерсу. Доведемо за індукцією, що із $x_1 ... x_n = 1$, $x_i > 0$, випливає нерівність $x_1 + ... + x_n \ge n$ (звідси все виходить очевидним чином). Для $n = 1$ це твердження є тривіальним. Нехай для $n = m$ твердження доведено, і припустимо, що $x_1 ... x_{m+1} = 1$. Тоді є два числа (нехай це x_1 і x_2) такі, що $x_1 \ge 1$, а $x_2 \le 1$, тобто $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \le 0$, або $x_1 x_2 + 1 \le x_1 + x_2$. Звідси, а також із припущення індукції, випливає $x_1 + ... + x_{m+1} \ge 1 + x_1 x_2 + x_3 + ... + x_{m+1} \ge 1 + m$, що і треба було довести.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним пов'язана з багатьма задачами. Для прикладу розглянемо таку задачу: в дану сферу вписати конус найбільшого об’єму.

Позначимо через R радіус сфери і через r і h - радіус основи і висоту конуса відповідно. Тоді об’єм V конуса дорівнює $\pi h^2 (2R - h)/3$. Застосовуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, дістанемо

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2}\frac{h}{2}(2R - h) \le (2R)^3,$$

і рівність досягається при $\frac{h}{2} = 2R - h \Rightarrow h = (4/3)R$. При цій висоті об’єм конуса і буде максимальним.

Наведемо ще дві задачі.

- В заданий конус вписати циліндр максимального об’єму.
- Дано прямокутний лист жерсті розмірами $a \times b$. Потрібно вирізати у кожному з його кутів однакові квадратики так, щоб після згинання країв вийшов відкритий зверху короб найбільшої місткості.

Відмітимо, що вказаний прийом розв’язання таких задач цікавий тим, що не використовує диференціювання.

Нерівність між середнім арифметичним і середнім квадратичним. Нехай $x_1,...,x_n$ - деякі числа. Їхнім *середнім квадратичним* називається число $\left[(x_1^2+...+x_n^2)/n\right]^{1/2}$. Справедлива така теорема.

Для будь-яких чисел $x_1,...,x_n$ виконується нерівність

$$\frac{x_1+...+x_n}{n} \le \left(\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}\right)^{1/2}, \tag{18}$$

тобто середнє арифметичне завжди не перевищує середнього квадратичного. Нерівність (18) є точною. Якщо всі числа рівні, вона стає рівністю.

Нерівність (18) можна також доводити по-різному. Але найпростішим є, мабуть, таке доведення. Маємо

$$0 \le (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \le a^2+b^2. \tag{19}$$

Звівши середнє арифметичне в квадрат і скориставшись далі нерівністю (19), отримаємо

$$\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)^2 = \frac{x_1^2+...+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+...+2x_{n-1}x_n}{n^2} \le$$

$$\le \frac{x_1^2+...+x_n^2+(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2+x_3^2)+...+(x_{n-1}^2+x_n^2)}{n^2} = \frac{n(x_1^2+...+x_n^2)}{n^2} = \frac{x_1^2+...+x_n^2}{n},$$

що і треба було довести.

Зіставляючи нерівність між середнім геометричним і середнім арифметичним і доведену нерівність (18), дістанемо, що для будь-яких невід'ємних чисел $x_1,...,x_n$ справедлива точна нерівність

$$\sqrt[n]{x_1...x_n} \le \left(\frac{x_1^2+...+x_n^2}{n}\right)^{1/2}. \tag{20}$$

Зокрема, при $n=2$ матимемо $\sqrt{x_1...x_n} \le \sqrt{(x_1^2+x_2^2)/2}$.

Цій нерівності можна легко надати геометричний зміст. З неї, наприклад, відразу випливає, що серед вписаних в коло прямокутників, найбільшу площу має квадрат.

Йога́ннес Ке́плер,
нім. Johannes Kepler
(1571 - 1630)

Ця задача, своєю чергою, допускає щонайменше два стереометричних узагальнення. Одне з них таке: серед прямокутних паралелепіпедів, вписаних в кулю, знайти паралелепіпед найбільшого об'єму. Інше узагальнення: серед циліндрів, вписаних в кулю, знайти циліндр найбільшого об’єму. Обидві ці стереометричні задачі досліджував Кеплер. Зазначимо, до речі, що з нерівності (20) при n=3 одразу випливає, що паралелепіпедом найбільшого об’єму, вписаним в кулю, є куб.

Далі планіметричну задачу про прямокутник найбільшої площі, вписаний в коло, називатимемо *планіметричною задачею Кеплера*.

Нерівність Коші-Буняковського. Має місце така теорема: для будь-яких чисел $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ справедлива нерівність

$$a_1b_1+...+a_nb_n \le (a_1^2+...+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+...+b_n^2)^{1/2}. \qquad (21)$$

Нерівність (21) називається *нерівністю Коші-Буняковського*. Вона точна: рівність досягається при $a_1=b_1,...,a_n=b_n$.

Доведемо (21). Якщо $b_1=...=b_n=0$, то доводити нема чого. Нехай не всі b_i дорівнюють нулю. Маємо для довільного числа x

$$(a_1+xb_1)^2+...+(a_n+xb_n)^2=$$

$$=a_1^2+...+a_n^2+2x(a_1b_1+...$$

$$+a_nb_n)+x^2(b_1^2+...+b_n^2)= = ax^2+2bx+c\,,$$

де введені позначення $a=b_1^2+...+b_n^2$, $b=a_1b_1+...+a_nb_n$, $c=a_1^2+...+a_n^2$.

Огюстен-Луї Коші,
Augustin Louis
Cauchy
(1789- 1857)

Віктор Яковлевич
Буняковський
(1804-1889)

Ясно, що $a>0$ і що для всіх x виконується нерівність

$$ax^2+2bx+c\ge 0. \qquad (22)$$

Умова невід'ємності квадратного тричлена (22) полягає в нерівності

$$b^2-ac\le 0 \Leftrightarrow (a_1b_1+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2), \qquad (23)$$

що і вимагалося.

Нерівність Коші-Буняковського має таке важливе узагальнення.

Нерівність Гельдера. Справедливе таке твердження: для будь-яких невід'ємних чисел $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ при $p>1$ має місце нерівність

$$a_1b_1+...+a_nb_n \le (a_1^p+...+a_n^p)^{1/p}(b_1^{p'}+...+b_n^{p'})^{1/p'}, \qquad (24)$$

де $p'=\dfrac{p}{p-1}$, (тобто $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$).

Нерівність (24) називається *нерівністю Гельдера.* Доведемо її. Дві функції $y=x^{p-1}$ і $x=y^{p'-1}$ взаємно обернені. Виберемо два додатних числа a і b. Тоді

Отто Людвіг Гельдер,
нім. Otto Ludwig Hölder
(1859 – 1937)

$$\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \quad \int_0^b y^{p'-1}\mathrm{d}y = \frac{b^{p'}}{p'}.$$

З рис. 13 видно, що величина a^p/p - це площа криволінійного трикутника, заштрихованого вертикально, $b^{p'}/p'$ - площа криволінійного трикутника, заштрихованого горизонтально. Легко перевірити, що при будь-якому розташуванні a і b сума площ цих двох трикутників не менше площі прямокутника зі сторонами a і b. Причому рівність можлива лише, якщо $a^{p-1} = b$.

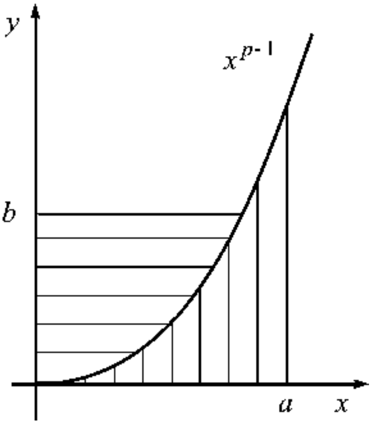


Рис. 13

Отже, доведена така нерівність для двох будь-яких невід'ємних чисел:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{25}$$

Нехай тепер $a_1,...,a_n$ і $b_1,...,b_n$ - довільні невід'ємні числа. Якщо, скажімо, $b_1 = ... = b_n = 0$, то нерівність (24) вірна. Отже, можна вважати, що

$$A = (a_1^p + ... + a_n^p)^{1/p} \neq 0 \text{ і } B = (b_1^{p'} + ... + b_n^{p'})^{1/p'} \neq 0.$$

Позначимо $x_k = a_k/A$, $y_k = b_k/B$. Тоді із (25) випливає

$$x_k y_k \le \frac{a_k^p}{pA^p} + \frac{b_k^{p'}}{p'B^{p'}}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Додаючи ці нерівності і враховуючи, що $1/p + 1/p' = 1$, $a_1^p + ... + a_n^p = A^p$, $b_1^{p'} + ... + b_n^{p'} = B^{p'}$, дістанемо

$$x_1 y_1 + ... + x_n y_n \le 1 \Rightarrow a_1 b_1 + ... + a_n b_n \le AB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 b_1 + ... + a_n b_n \le (a_1^p + ... + a_n^p)^{1/p} (b_1^{p'} + ... + b_n^{p'})^{1/p'},$$

що і треба було довести.

НАРИС 2

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ У XVII СТ. КЕПЛЕР, ФЕРМА, НЬЮТОН

Слідувати за думками великої людини
є наука найбільш захоплююча …

О.С. Пушкін

2.1. Задача Кеплера

Фігури по обидві сторони від їх найбільшої місткості мають невідчутне зменшення.

Й. Кеплер

Математика є прообраз краси світу.

Й. Кеплер

Коли історію життя Кеплера зіставляєш з тим, що він зробив, радісно дивуєшся і при цьому переконуєшся, що справжній геній долає будь-які перешкоди.

Й. Гете

До XVII ст. не було загальних прийомів розв'язання екстремальних задач і кожна така задача вирішувалася спеціально для неї розробленим способом. У 1615 р. вийшла книга Й. Кеплера «Нова стереометрія винних бочок» [Кеплер,1935]. Йоганнес Кеплер (1571-1630) – німецький філософ, математик, астроном, астролог і оптик, відомий насамперед відкриттям законів руху планет, названих на його честь законами Кеплера.

Йога́ннес Ке́плер,
нім. Johannes Kepler
(1571 - 1630)

Книгу «Нова стереометрія винних бочок» Кеплер починає так: «У листопаді минулого року (1613) я ввів у свій будинок нову дружину (у 1610 р. померла перша дружина Й. Кеплера, від якої він мав трьох дітей, у 1613 р. він вдруге одружився і від другої дружини мав вісім дітей). В той час, коли Австрія, зібравши рясний врожай благородного винограду, розподіляла свої здобутки, розсилаючи вверх по Дунаю завантажені баржі, в нашому Норику і весь берег у Лінці були завалені винними бочками, які продавалися за доступною ціною. Маючи обов'язки чоловіка і доброго батька сімейства, мені довелось попіклуватись про необхідні напої. Тому до мене додому принесли і поставили кілька бочок, а через чотири дні прийшов продавець з вимірювальною лінійкою, за допомогою якої він проміряв усі бочки, не звертаючи увагу на форму, без усіляких міркувань і обчислень. А саме, мідний оголовок лінійки просувався через наливний отвір повної бочки до п'яти того і іншого дерев'яного круга, які ми по-домашньому звемо днищем. Після того як у обох випадках ця довжина від верхньої точки до нижньої того і іншого дощатого круга були рівними, продавець оголошував кількість амфор, яку вміщує бочка, зазначивши лише число, поставлене на лінійці у тому місці, на якому закінчується означена довжина. За цим числом він визначав ціну» (рис. 1).

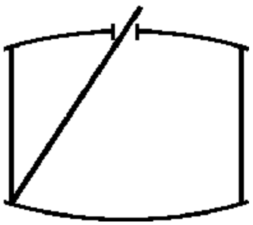


Рис. 1

Й. Кеплер дуже здивувався, йому здалося дивним, як за допомогою одного виміру можна визначати місткість бочок різної форми. «Я, як наречений, вважав для себе доцільним, - пише він, - взяти новий предмет математичних занять і дослідити геометричні закони такого зручного виміру та з’ясувати його основи, якщо такі є».

В ході вирішення поставленої задачі Й. Кеплер заклав основи диференціального і інтегрального числень і сформулював перші загальні правила розв’язання екстремальних задач. Вважається, що навіть символ інтегралу походить від сум, позначених Й. Кеплером. Він пише: «Під впливом благодійного генія, який був, без сумніву, хорошим геометром, бондарі почали надавати бочкам такої форми, яка при даній довжині лінії, виміряній мірщиком, дає можливість судити про найбільшу місткість бочки, а в зв’язку з тим, що в околі кожного максимуму зміни бувають нечутливими, то невеликі випадкові відхилення не чинять помітного впливу на величину ємності». І далі: «Фігури по обидві сторони від їхньої найбільшої місткості мають невідчутне зменшення» (теорема V, додаток, с.35).

Тут у достатньо загальній формі висловлений той критерій екстремальності, який надалі був оформлений у точну теорему спочатку П. Ферма (для многочленів) (1629 р.), а потім – І. Ньютоном і Г. Лейбніцем і отримав назву теореми Ферма.

Й. Кеплер, насправді, не використовував цей критерій для знаходження екстремальних розмірів тіл і фігур, він керувався іншими міркуваннями. Але Кеплер чітко розумів узагальнююче значення тієї властивості, яка стала одним із джерел розвитку диференціального числення. Слід додати, що йому також належить те тлумачення проблеми знаходження об’ємів і площ, яке започаткувало інтегральне числення. Це досить виразно підкреслює роль Й. Кеплера у створенні нової математики.

«Нова стереометрія винних бочок» була написана з випадкового приводу, про який Й. Кеплер розповідає у передмові – під час свого спостереження над способами вимірювання об’ємів бочок на верхньому Рейні, яке здійснювалося у зв’язку із закупівлею вина для частування гостей, запрошених Й. Кеплером на урочистість укладання шлюбу зі своєю другою дружиною. Розповідь про це весілля зустрічається у багатьох джерелах. Очевидно, що глибока робота Й. Кеплера мала приводом звичайну гостинність. І, безумовно, якби не весілля Й. Кеплера, то результати, отримані ним, були б викладені з іншого приводу і в інший час.

Зазначимо, що Й. Кеплер розв’язав кілька конкретних екстремальних задач, зокрема, задачу про циліндр найбільшого об’єму, вписаний у сферу.

Ключове місце в книзі «Стереометрія винних бочок» займає теорема V частини другої: «*З усіх циліндрів, що мають одну і ту ж діагональ, найбільш містким буде той, в якому відношення діаметра основи до висоти дорівнює* $\sqrt{2}$ ».

Інакше кажучи, в цій теоремі дається розв’язання такої задачі: вписати в задану кулю циліндр найбільшого об’єму. До нього природно приєднується планіметричний варіант: вписати в задане коло прямокутник найбільшої площі.

Перша задача називається *задачею Кеплера*, друга – *планіметричною задачею Кеплера*.

Довівши цю теорему, Кеплер пише: «Звідси ясно, що австрійські бондарі як би за здоровим і геометричним глуздом при побудові бочки дотримуються правила, щоб за радіус днища брати третину довжини клепок. Саме при такому влаштуванні циліндр, подумки побудований між двома днищами, матиме дві половини, що істотно наближені до умов теореми V, і тому буде найбільш містким, хоча б під час виготовлення бочки були деякі відхилення від точних правил, бо фігури, близькі до оптимальної, дуже мало змінюють свою місткість ..., бо по обидва боки від місця найбільшого значення спадання на початку неістотне».

У заключних словах Кеплера закладений той основний алгоритм знаходження екстремумів, який згодом був оформлений в точну теорему. Вже згадувалося, що спочатку (для многочленів) його описав Ферма (1629), а потім Ньютон і Лейбніц в загальному вигляді. Згодом він отримав назву «теореми Ферма».

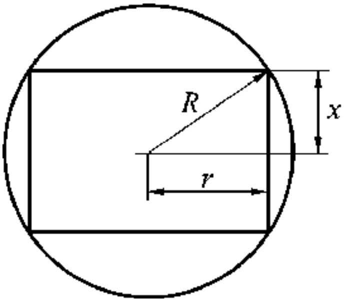


Рис. 2

Ілюстрацією думки Кеплера про незначну зміну функції поблизу екстремуму оже бути такий простий приклад, пов'язаний з планіметричною задачею Кеплера (рис. 2). У позначеннях рис. 2 площа $S=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$, де $\alpha=\frac{x}{R}$. Графік цієї функції зображений на рис. 3. Максимум $S=0,5$ досягається при $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,707$. Відповідні значення α і S поблизу точки екстремуму наведені в таблиці 1. І на графіку і з таблиці наочно видно, що поблизу точки екстремуму відхилення від екстремального значення є незначними.

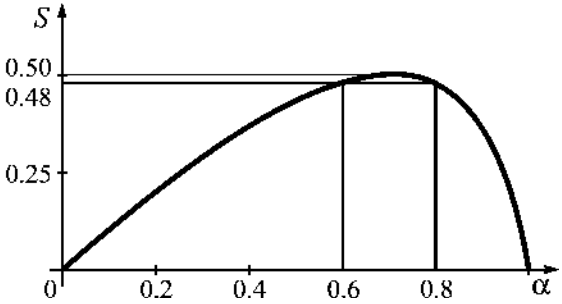


Рис. 3

Таблиця 1

α	0,45	0,5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
S	0.402	0.433	0.459	0.48	0.494	0.5	0.496	0.48	0.448	0.392	0.297

Наведемо розв’язання за методом Лагранжа задачі про найбільший об’єм бочки у вигляді циліндру, місткість якої визначається одним вимірюванням (рис. 4).

Об’єм визначається формулою

$$V=\pi x^2 y,$$

за умови $l^2=4x^2+\frac{y^2}{4}$. Застосуємо для розв'язання звичайну процедуру множників Лаґранжа. Маємо

$$\overline{V}=\pi x^2y+\lambda(l^2-4x^2-\frac{y^2}{4}).$$

Далі дістанемо систему рівнянь:

$$1.\ \frac{\partial\overline{V}}{\partial x}=2\pi xy-8\lambda x=0,$$

$$2.\ \frac{\partial\overline{V}}{\partial y}=\pi x^2-\frac{\lambda y}{2}=0,$$

$$3.\ l^2=4x^2+\frac{y^2}{4}.$$

Звідки послідовно знаходимо

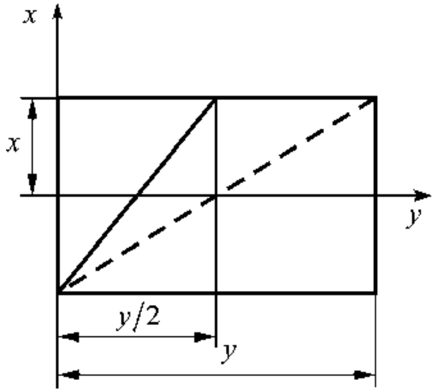


Рис. 4

$$\lambda=\frac{\pi y}{4},$$

$$V(y)=\frac{\pi l^2}{4}y-\frac{\pi}{16}y^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}V(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\pi l^2}{4}-\frac{3}{16}\pi y^2=0,\quad y=\frac{2}{\sqrt{3}}l,\quad x=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}l,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V(y)}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{3}{8}\pi y<0\quad\text{при}\quad y>0,\quad V_{\max}=\frac{\pi l^3}{3\sqrt{3}}.$$

Наведені результати були узагальнені Й. Кеплером у вигляді теореми XXVI: «*Відношення місткості бочок, фігури яких подібні, дорівнює кубу відношення відстаней верхнього отвору до найнижчої точки будь-якого днища*».

Тобто для бочок *SQKT* і *XGCZ* різної величини, але однієї і тієї ж форми, *O* і *A* – їх отвори *QK*, *ST* і *GC*, *XZ* – діаметри днищ *T*, *K* і *Z*, *C* – їх найнижчі точки, *OK*, *OT* і *AC*, *AZ* – відповідно рівні одна одній відстані стверджується, що відношення місткості бочок дорівнює кубу відношення довжин *OK* і *AC* (рис. 5).

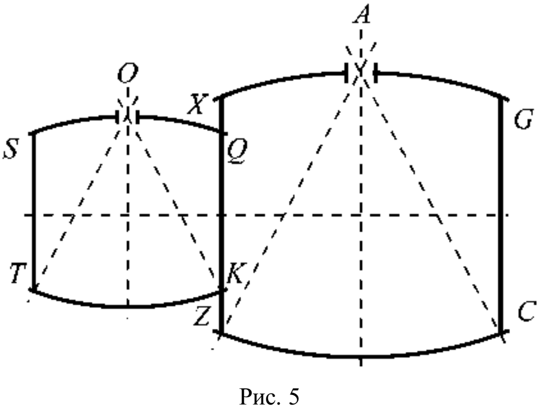


Рис. 5

У додатку 1 до теореми Й. Кеплер докладно описує властивості лінійки. Вимірювальна лінійка ділиться на частини так, щоб перша і найнижча з них дорівнювала довжині *OK* еталонної бочки, яка вміщує одну амфору, а інші частини градують шкалу лінійки з урахуванням кубічних співвідношень. Тоді лінійка, яка вставлена в бочку так, що її нижній кінець впирається у точку *C* або *Z* числом, яке прийдеться біля внутрішньої поверхні клепки біля отвору А, і покаже, скільки амфор вміщує ця бочка, тому що це число і дає співвідношення об’ємів вимірюваної бочки *XGCZ* і еталонної бочки *SQKT*, яка вміщує одну амфору.

За допомогою геометричного підходу Й. Кеплером доведена і згадана вище теорема V, згідно з якою із усіх циліндрів, що мають однакову діагональ, найбільш містким буде той, у якому співвідношення діаметра основи до висоти дорівнює $\sqrt{2}$, тобто дорівнює відношенню ребра тетраедра або діагоналі грані куба, який вписаний у одну і ту ж сферу, до ребра куба.

Дійсно, маємо (рис. 5):

$$V=\pi x^2 y,$$

$$l_1^2=4x^2+y^2,$$

$$\bar{V}=\pi x^2 y+\lambda(l_1^2-4x^2-y^2),$$

$$1.\ \frac{\partial\bar{V}}{\partial x}=2\pi xy-8\lambda x=0.$$

$$2.\ \frac{\partial\bar{V}}{\partial y}=\pi x^2-2\lambda y=0\ .$$

$$3.\ l_1^2=4x^2+y^2\ .$$

$$\lambda=\frac{\pi y}{4},$$

$$V(y)=\frac{\pi y}{4}(l_1^2-y^2)=\frac{\pi l_1^2}{4}y-\frac{\pi}{4}y^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}V(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\pi l_1^2}{4}-\frac{3}{4}\pi y^2=0,\ 3y^2=l_1^2,\ y=\frac{l_1}{\sqrt{3}},$$

$$l_1^2=4x^2+\frac{l_1^2}{3},\quad \frac{2}{3}l_1^2=4x^2,\ x=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}l_1,$$

діаметр $D=2x=\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}l_1$, висота $h=y=\frac{1}{\sqrt{3}}l_1$, $\frac{D}{h}=\sqrt{2}.$

Робота Й. Кеплера дуже зацікавила сучасних йому математиків О. Андерсена, П. Гульдіна, Г. Бріґґза та інш. Деякі з них критикували його методи і висновки, інші їх дуже схвалювали. Те, що бачив Й. Кеплер, не завжди бачили його критики (Андерсон, Гульдін), які дотримувалися поглядів «строгої» математики і критикували Й. Кеплера з позицій застиглих методів офіційної античної математики. Пауль Гульдін (1577–1643) – швейцарський математик, один із фундаторів методу нескінченно малих, виступав із запереченнями щодо методів Й. Кеплера і Б. Кавальєрі, водночас не заперечуючи, їх евристичної цінності і результатів, отриманих цими вченими. Зауваження П. Гульдіна були опубліковані в його трактаті «Про центр ваги» (1635-

1645). У другій книзі трактату міститься теорема про об’єми і поверхні тіла обертання замкненої фігури навколо осі, яка їх не перетинає, сформульовані (без доведення) Паппом Александрійським.

Пізніше, у XVIII ст., методи Й. Кеплера згадувалися у чудовому критичному збірнику його праць, виданому Фрішем у 1863 р.

Генрі Бріґґз,
англ. Henry Briggs
(1561 – 1630)

Пауль Гульдін,
нім. Paul Guldin
(1577 – 1643)

Бонавентура
Франческо
Кавальєрі,
італ. Bonaventura
Francesco Cavalieri
(1598 – 1647)

Зауважимо, що критика, якої зазнали методи Й. Кеплера від його сучасників, є актуальною і нині. Якщо деякі сучасники Й. Кеплера не бачили історичного значення його методів, то і наші сучасники часто не бачать великого педагогічного значення «нестрогих» інфінітезимальних побудов. Якщо інфінітезимальні методи XVII ст. є давно минулим історичним етапом розвитку математики, то у викладанні математичних дисциплін і зараз слід залишати їх вихідним пунктом, тому що в них основні ідеї аналізу нескінченно малих виступають, хоча і в спрощеній, але саме завдяки цій спрощеності, у легко доступній формі. Строге доведення отриманих результатів краще засвоюється саме після попереднього проходження першого, нестрогого, етапу розвитку математичної думки. Це не завжди помічають і в результаті на вівтар математичної строгості приноситься розуміння суті операцій і понять аналізу. Тому історичний контекст дискусій, які точились чотириста років щодо питання про допустимість інфінітезимально атомістичних прийомів у викладанні механіко-математичних дисциплін, є актуальним і зараз.

Йоганнес Кеплер у 1594 р. був запрошений до читання лекцій з математики в університеті міста Ґрац, де вийшла в світ (1596) його перша книга «Mysterium Cosmographicum» («Таємниця світу»). Занесений до списку «єретиків», Кеплер у 1600 р. переїхав до Праги на запрошення придворного астронома імператора Рудольфа II Тихо Браге, після смерті якого у 1601 р., Кеплер зайняв його посаду. У 1609 р. на основі власних досліджень і Тихо Браге в книзі «Нова астрономія», яка стала початком розвитку небесної механіки, Кеплер виклав два закони – що траєкторії планет є еліпсами, і що радіус-вектор, який сполучає планету і Сонце, за однакові проміжки часу описує однакові площі. Причому, заради обережності, він відносив їх тільки до Марса. Книга Й. Кеплера «Нова астрономія» (1609) визнається гігантським витвором людської думки і є монументальною пам’яткою початку нової епохи, який знаменувався виходом у світ цієї книги.

До нового 1611 р. Кеплер опублікував трактат «Новорічний подарунок шестикутного снігу» у якому висловив припущення про те, що не існує щільнішої упаковки однакових сфер, ніж гранецентрована кубічна та гексагональна, що отримало назву гіпотези Кеплера. Доведення гіпотези Кеплера для регулярних ґраток дав у 1831 р. К. Ф. Ґаусс. Для нерегулярних структур задача виявилася складнішою і стала 18-ою проблемою Гільберта, розв'язання якої за допомогою комп'ютерних обчислень отримано у 1998 р. Є переклад двох книг Й. Кеплера російською: «Стереометрия винных бочек» [Кеплер, 1935] і «О шестиугольных снежинках» [Кеплер, 1982].

Сміливість польоту думки Й.Кеплера, глибина передбачень мабуть і були підставою для того, щоб К. Маркс на питання про те, хто його улюблені герої, відповів: Спартак і Кеплер.

А. Ейнштейн, який назвав Й. Кеплера «незрівняною людиною», писав про його долю так [Ейнштейн, 1965-1967, с. 121]: «Він жив у епоху, коли ще не було впевненості у існуванні деякої загальної закономірності для усіх явищ природи. Якою глибокою була у нього віра в таку закономірність, якщо, працюючи одинаком, ніким не підтримуваний і незрозумілий, він протягом багатьох десятків років брав у неї сили для важкого і копіткого емпіричного дослідження руху планет і математичних законів цього руху. Сьогодні, коли цей науковий акт вже здійснений, ніхто не може повною мірою оцінити скільки винахідливості, скільки важкої праці і терпіння знадобилося, щоб відкрити ці закони і так точно їх виразити».

На місці поховання Й. Кеплера покладена проста кам'яна плита і невідомо навіть, чи вибита на ній латинська епітафія, висловлена самим Й. Кеплером і у перекладі автора передмови до книги «Нова стереометрія винних бочок» М.Я. Вигодського російською мовою звучить так:

Я небеса измерял, ныне тени Земли измеряю,
Дух на небе мой жил, здесь же тень тела лежит.

І якщо Й. Кеплер у своїй епітафії говорить, що дух його за життя існував на небі, то можна сказати, що після його смерті, дух його ще лишається на Землі.

2.2. Теорема Ферма

Коли величина є максимальною або мінімальною, в цю мить вона не тече ані вперед, ані назад.

І. Ньютон

Перший загальний аналітичний прийом розв'язання екстремальних задач був розроблений французьким математиком П'єром Ферма (1601 – 1665). Цей метод Ферма розробив не пізніше 1629 р., як видно з його листа до Роберваля від 22 вересня 1636 р. (Fermat, Oeuvres, т. II, стор. 71). Щоб осягнути первинну думку Ферма можна звернутися до книги Р. Декарта, де наведений цей лист [Декарт,1938, с.154]. Сучасною мовою (хоча, у Ферма лише для поліномів) прийом Ферма зводиться до того, що при знаходженні екстремуму функції $f(x)$ без обмежень в точці екстремуму $\widehat{x}$ має виконуватися рівність $f'(\widehat{x})=0$.

П'єр Ферма́,
фр. Pierre de Fermat
(1601 — 1665)

Вже зазначалося, що думка про непомітність зміни величини біля максимуму, що відповідає нашому рівнянню $dy=0$, була висловлена у 1615 р. Й. Кеплером. Ферма вперше запропонував алгоритм знаходження екстремумів; він підходив для функцій, які зводяться до цілих алгебраїчних многочленів.

Наведемо невеликий витяг з книги П. Ферма «Methodus ad disquirendam maximum et minimum» («Метод знаходження найбільших і найменших значень», наведений у [Декарт,1938].

«Все вчення про знаходження найбільших і найменших значень ґрунтується на тому, що приймають дві літерні невідомі (positio in notis) і застосовують таке єдине правило.

Припустимо, що *A* являє собою будь-яку невідому в питанні величину (поверхню або тіло, або ж довжину відповідно до запропонованого), і виразимо максимум або мінімум через члени, що містять *A* в яких-небудь степенях. Потім візьмемо для початкового невідомого значення *A+E* і знову виразимо максимум або мінімум через члени, що містять *A* і *E* в яких-небудь степенях. Потім обидва вирази для найбільшого або найменшого значення прирівняємо[1], як каже Діофант, один одному і відкинемо спільні члени (після чого в кожному члені з обох сторін буде стояти або *E*, або який-небудь його степінь). Потім розділимо всі члени на *E* або ж на вищий степінь її так, щоб (принаймні) один з членів на якій-небудь стороні був абсолютно вільним від *E*. Потім на обох сторонах відкинемо члени, що містять *E* або її степені, а те, що залишиться, вважатимемо рівним один одному або ж, якщо на одній зі сторін нічого не залишиться, то – що зводиться до того ж – вважатимемо від'ємні члени рівними додатним. Розв'язання останнього рівняння дасть значення *A*; якщо ж останнє відомо, то максимум або мінімум дістанемо на підставі раніше зробленого розв'язання (ex repetitis prioris resolutions vestigiis innotescet).

Наведемо такий приклад: пряму *AC* треба так розділити в *E,* щоб прямокутник *AEC* був найбільшим.

Пряму *AC* (рис. 6) назвемо *B*. Одну частину *B* назвемо *A*, так що інша буде *B-A*, а прямокутник на відрізках, для якого треба знайти найбільше значення, буде *B* на *A-Aq*. Вважатимемо тепер, з іншого боку, одну частину рівною *A+E*, так що інша буде *B-A-E*, і прямокутник на відрізках буде

B на *A-Aq.+B* на *E* - два *A* на *E-Eq.*,

що має бути прирівняне першому прямокутнику

B на *A-Aq*.

---

[1] В іншій роботі ([Fermat, 1891, т. I, с. 140]) Ферма пояснює, що прирівнювання, adaequatio, полягає в тому, що величини, в дійсності нерівні, вважаються рівними; отже – це наближена рівність. Adaequatio – переклад латиною грецького παρισότης, що у Діофанта позначає наближену рівність

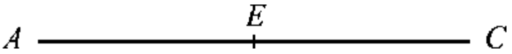


Рис. 6

Відкинувши однакові члени, дістанемо

B на *E* дорівнює два *A* на *E*+*Eq*.,

а якщо все поділити на *E*, то вийде, що

B дорівнює два *A*+*E*.

Якщо відкинути *E*, то

B дорівнюватиме два *A*.

Таким чином розв’язком є поділ *B* навпіл. І більш загальний метод навести неможливо».

Сучасною мовою наведене розв'язання цього прикладу записується таким чином.

Якщо довжина відрізка *AC* дорівнює *B* і одна частина дорівнює *A*, то інша буде *B*-*A*, а прямокутник на відрізках, для якого треба знайти найбільше значення, буде $A(B-A)=BA-A^2$ (*B* на *A*-*Aq*.). Якщо одну частину вважати рівною *A*+*E*, то інша буде *B*-*A*-*E*, і прямокутник на відрізках буде

$$BA-A^2+BE-2AE-E^2$$ (*B* на *A*-*Aq*.+*B* на *E* - два *A* на *E*-*Eq*.),

що треба прирівняти першому прямокутнику

$$BA-A^2$$ (*B* на *A*-*Aq*.).

Відкинувши однакові члени, дістанемо

$$BE=2AE+E^2$$ (*B* на *E* дорівнює два *A* на *E*+*Eq*.),

а якщо все поділити на *E*, то вийде, що

$$B=2A+E$$ (*B* дорівнює два *A*+*E*).

Якщо відкинути *E*, то

$$B=2A$$ (*B* дорівнюватиме два *A*).

Таким чином розв’язком є поділ *B* навпіл.

Зауважимо, що нечисленні задачі на визначення геометричних екстремумів були розв’язані ще древніми греками. Розв’язання мали частинний характер і в деяких випадках зводилися до знаходження меж, в яких рівняння могли мати додатні корені. Якщо, наприклад,

$$y=ax-x^2,\text{ то } x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-y};$$

значить, максимальне можливе значення y буде $\frac{a^2}{4}$ причому $x=\frac{a}{2}$.

Фактично Ферма виконує майже ті ж самі обчислення, що і в теперішній час. У наближеній рівності

$$f(x+h)\approx f(x)$$

відкидаються тотожні члени, потім все ділиться на *h*, потім члени, в яких ще залишається *h*, відкидаються і наближена рівність перетворюється в точну, що відповідає сучасному

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=0.$$

Однак Ферма не робить граничного переходу. Намагаючись теоретично обґрунтувати відкритий ним прийом, він навіть не вважає *h* нескінченно малою величиною. Для нього тут *h* скінченна і незмінна величина, правда, дуже мала. Відкидання членів з вищими степенями *h* він розглядає не як нехтування зникаючими величинами і в поясненні до правила, яке він навів у 1643 р. в одному з листів, немає вказівки на нескінченну малість *h*.

Думку Ферма можна з невеликими модифікаціями передати приблизно так. Якщо $f(x)$ є максимум, то одночасно $f(x+h)<f(x)$ і $f(x-h)<f(x)$ Ліві частини нерівностей можна подати у вигляді $f(x)+A(\pm h)+Bh^2+C(\pm h)^3+\cdots$... Якщо коефіцієнт при ±*h*, тобто наша $f'(x)=A$, дорівнює нулю, то, стверджує і показує на одному з прикладів Ферма, коефіцієнт *B* при h^2 буде від'ємним. Але тоді ліві частини нерівностей, дійсно, разом менше правої, бо члени з $\pm h^3$, h^4 і т.д. не впливають на знак лівих частин нерівностей. З листа видно, що Ферма вже міг розрізняти максимум і мінімум: перший має місце, коли коефіцієнт при h^2 додатний, другий, коли він від'ємний; це відповідає відомому правилу з другою похідною ([Oeuvres de Fermal, 1922, с. 123-125]). Правило знаходження екстремуму і встановлення його типу опублікував у 1684 р. Лейбніц (Ньютону воно було відомо раніше). Випадок зникнення ряду похідних розглянув у 1748 р. Маклорен.

Знову повернемося до витягу з книги П. Ферма «Methodus ad disquirendam maximum et minimum», наведеному у [Декарт,1938].

«Знаходження дотичних в даних точках яких-небудь кривих ми зводимо до викладеного вище методу. Припустимо, наприклад, що дана парабола *BDN* з вершиною *D*, діаметром *DC* і на ній дана точка *B*, через яку потрібно провести пряму *BE*, що торкається параболи і перетинає діаметр в точці E.

Якщо на прямій *BE* (рис. 7) взяти будь-яку точку *O* і від неї провести ординату *OI*, а також провести ординату *BC* від точки *B*, то відношення *CD* до *DI* буде більшим, ніж відношення квадрата *BC* до квадрата *OI*, бо точка *O* знаходиться поза параболою. Але, внаслідок подібності трикутників, квадрат *BC* відноситься до квадрату *OI*, як квадрат *PE* до квадрату *IE*, і, отже, відношення *CD* до *DI* є більшим, ніж відношення квадрата *PE* до квадрату *IE*.

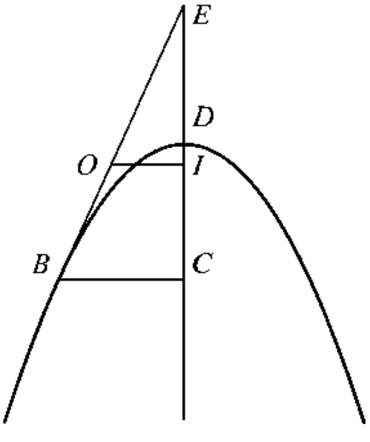


Рис. 7

Оскільки точка *B* дана, то дана і ордината *BC*, а значить, і точка *C* і, отже, також *CD*. З цього вважатимемо *CD* рівним даній *D*. Вважатимемо також, що *CE* є *A*, а *CI* є *E*.

Отже, *D* знаходиться до *D–E* у відношенні більшому, ніж

Aq. до *Aq.+Eq.* - два *A* на *E*.

І якщо перемножити між собою середні і крайні, то

D на *Aq.* + *D* на *Eq.* -два *A* на *E* на *D* буде більшим, ніж *D* на *Aq.*– *Aq.* на *E*.

Прирівняємо тепер, згідно з вищевикладеним методом. Відкидаючи однакові члени, ми дістанемо

D на *Eq.*– два *D* на *A* на *E* дорівнює – *Aq.* на *E*,

або, що те саме,

D на *Eq.* + *Aq.* на *E* дорівнює два *D* на *A* на *E*.

Розділимо все на *E*; тоді

D на *E* + *Aq.* дорівнює два *D* на *A*.

Відкинемо *D* на *E* тоді

Aq. дорівнюватиме два *D* на *A*

і, отже,

A дорівнюватиме два *D*.

Отже, ми довели, що *CE* вдвічі більше *CD*, як воно і є насправді».

Коли Ферма говорить про застосування «вищевикладеного методу» знаходження дотичних, то має на увазі не знаходження найбільших або найменших ліній, а «прирівнювання». Однак його туманні мовні звороти Декарт зрозумів інакше, завдяки чому відбулося знамените листування з питання про проведення дотичних. Сам Ферма писав: «Ми розглядаємо в площині будь-якої кривої дві дані по положенню прямі, одну з яких можна назвати діаметром, а іншу ординатою. Потім ми вважаємо, що дотична в даній точці кривої вже знайдена і на підставі «прирівнювання» розглядаємо специфічну властивість кривої вже не на самій кривій, а на шуканій дотичній; потім, відкидаючи члени (як цьому вчить теорія найбільших і найменших значень), ми, нарешті, отримуємо рівняння, що визначає точку зустрічі дотичної з діаметром, і, отже, власно дотичну» ([Fermat, 1891,т. I, с. 159]). Дотичну Ферма розглядає ще, слідом за стародавніми, як пряму, що має одну спільну точку з кривою.

Якщо позначити $CD = x, CI = \mathrm{d}x, CB = y, IO = y - \mathrm{d}y, CE = s_t, IE = s_t - \mathrm{d}x$, $-\Delta y$ – приріст ординати кривої в точці *I*, то обчислення Ферма рівносильні таким:

$$\frac{y}{y-\mathrm{d}y} = \frac{s_t}{s_t - \mathrm{d}x}.$$

(Для нас звідси було б $s_t = \frac{ydx}{dy}$, але Ферма не мав поняття диференціала). Оскільки для параболи $\frac{x}{x-\mathrm{d}x} = \left(\frac{y}{y-\Delta y}\right)^2$, він зводить у квадрат попередню рівність, отримуючи $\frac{y^2}{(y-\mathrm{d}y)^2} = \frac{s_t^2}{(s_t - \mathrm{d}x)^2}$, і далі «прирівнює» $y - \mathrm{d}y$ і $y - \Delta y$ (з похибкою вищого порядку малості):

$$\frac{s_t^2}{(s_t - \mathrm{d}x)^2} \approx \frac{x}{x - \mathrm{d}x},$$

звідки

$$s_t^2 x - s_t^2 \mathrm{d}x \approx s_t^2 x - 2s_t x\mathrm{d}x + x(\mathrm{d}x)^2$$

і

$$s_t = 2x .$$

Ніякого характеристичного трикутника тут ще немає, всупереч думці Цейтена [Цейтен, 1932,ч. II, с. 322]).

Дотичні до конічних перетинів були побудовані Аполлонієм. Ферма бере приклад з параболою, щоб продемонструвати швидкість і точність свого методу. В інших роботах Ферма знаходить дотичні до ряду інших кривих і дає правило знаходження точок перегину. У них досягає максимуму кут дотичної з діаметром, тобто відношення ординати до піддотичної $\frac{y}{s_t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\,\alpha$ ([Fermat, 1891,т. I, с. 166,167]).

Ферма далі пише: «Цей метод ніколи не зраджує. Навпаки, його можна поширити на численні чудові питання. Дійсно, за його допомогою ми визначили центри тяжіння фігур, обмежених кривими лініями і прямими, і центри тяжіння тіл і багато іншого, про що я, можливо, розповім, якщо матиму вільний час.

Що стосується квадратури площ, утворених кривими і прямими лініями, а також відношення тіл, що породжуються ними, до конуса з тими ж висотою і основою, то це я вже докладно обговорював з паном де-Робервалєм»[1].

Зауважимо, що Декарт, незважаючи на різкі закиди на адресу Ферма, які містяться в знаменитому листуванні з питання про дотичні, в якому, крім Декарта і Ферма, взяли участь Роберваль, Е. Паскаль, Ж. Дезарг (1593-1661) і ін., зрозумів, що новий метод з деякими виправленнями є цілком ефективним.

Точного сенсу міркування Ферма набули за 46 років, коли у 1684 р. з'явилася робота Г. Лейбніца (1646-1716), в якій закладалися основи математичного аналізу. Вже сам заголовок цієї роботи, який починається так: «Nova methodus pro maximis et minimis...» («Новий метод знаходження найбільших і найменших значень...»), свідчить про важливість задачі знаходження екстремумів в становленні сучасної математики. У своїй статті Лейбніц не тільки отримує як необхідну умову співвідношення $f'(\bar{x}) = 0$ (цей результат зараз називають теоремою Ферма), але і використовує другий диференціал для розрізнення максимуму і мінімуму. Слід зауважити, що більшість наведених Лейбніцем фактів на той час були відомі також і Ньютону. Проте його робота «Метод флюксій», завершена в основному до 1671 р., була опублікована тільки у 1736 р.

---

[1] Йдеться про квадратуру парабол $y = ax^n$ (n - ціле, додатне), центри тяжіння їхніх площ, об'єми і центри тяжіння їхніх тіл обертання. Див. листи Ферма до Роберваля від 4 листопада і 16 грудня 1636 року в його Oeuvres, ([Fermat, 1891,т. I, с. 83-87, 92-96]).

Цікаво, що П. Ферма не був професійним математиком – він вивчав право в університеті Тулузи і до кінця життя служив радником касаційної палати Тулузького парламенту. Працюючи над «Арифметикою» Діофанта, він істотно розвинув теорію чисел, поклавши початок великому розділу математики – теорії алгебраїчних чисел, яка виникла внаслідок спроб довести деякі сформульовані, але не доведені самим Ферма теореми.

П. Ферма за життя не друкувався - на той час ще не було наукових журналів. Результати його досліджень стали відомими після смерті вченого, коли Мерсенн (друг Р. Декарта і хранитель рукописів вчених-сучасників) і син Ферма опублікували основні роботи математика.

Винятком стала тільки так звана «Велика теорема Ферма»(ВТФ) - найвідоміша теорема в історії математики. Винятком у подвійному сенсі. По-перше, це єдина теорема з тридцяти, доведення якої для окремого випадку $n=4$ було знайдено у записах Ферма. По-друге, це єдина теорема з усіх ним запропонованих, загального доведення якої безуспішно шукали сотні найвидатніших математиків світу аж до наших днів. Їхні пошуки супроводжувалися появою низки розділів сучасної алгебри та інших її відгалужень, до створення яких доклали немало зусиль Л. Ейлер, К. Ґаусс, Л. Діріхле, А. Лежандр, Ж. Ламе, С. Жермен. Вінцем їхньої роботи стало доведення все нових і нових частинних випадків, а загальне доведення ВТФ вдалося віднайти тільки нещодавно.

У листах Ферма, як правило, не містилися доведення математичних положень, пропонованих ним до розгляду. «Я не можу, - писав Ферма, - навести тут доведення, яке випливає з багатьох різних і втаємничених властивостей чисел». Однак там, де він стверджував, що має таке доведення, воно обов’язково було віднайдено зусиллями інших математиків наступних поколінь (головним чином Л. Ейлером і О. Коші).

Магія ВТФ у її зовнішній простоті. Саме ця простота породжує ось уже понад трьохсот років нав’язливу ідею фікс – будь-що довести теорему. Саме через цю таємничо-зрадливу простоту позбулися спокою тисячі і тисячі аматорів. У 1908 р. німецький промисловець і любитель математики Вольфскель заповів 100 000 марок тому, хто доведе ВТФ.

Історія цієї теореми почалася з того, що у 1621 р. був надрукований дивом збережений рукопис «Арифметики» давньогрецького математика Діофанта. Цю книгу придбав П. Ферма, який уважно прочитав її, занотувавши на полях 48 зауважень. Найвідоміше з них стверджувало - не існує рівності

$$x^n + y^n = z^n, \tag{1}$$

де x, y, z цілі числа, а n – ціле число, більше за двійку. Ферма додав: «Я знайшов цьому справді чудове доведення, але поля занадто вузькі, щоб вмістити його».

Записи Ферма на полях книги Діофанта були опубліковані вже після його смерті і викликали великий інтерес серед математиків. Так, Л. Ейлер довів твердження Ферма для $n=3$ і $n=4$, скориставшись «методом спуску», який вперше пропонував ще Ферма для доведення неіснування розв’язку низки рівнянь.

Ідея «методу спуску» нескладна. Припустимо, що рівність (1) для $n=3$ виконується, тобто існує трійка чисел x_1, y_1, z_1, для яких справедлива рівність

$$x_1^3 + y_1^3 = z_1^3. \qquad (2)$$

Далі слід спробувати довести, що з рівності (2) випливає рівність

$$x_2^3 + y_2^3 = z_2^3, \qquad (3)$$

де x_2, y_2, z_2 менші за x_1, y_1, z_1. Повторюючи те саме міркування, можна перейти від x_2, y_2, z_2 до ще менших чисел x_3, y_3, z_3 і т.д. нескінченно. Але звідси вже випливає неможливість виконання рівності (2), оскільки кількість цілих чисел, менших даного, завжди скінченна.

При використанні «методу спуску» Ейлер використовував розклад різниці $z^n - y^n$ на лінійні множники:

$$z^n - y^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y)...(z-\varepsilon^{n-1} y), \qquad (4)$$

де ε є коренем степеня n з одиниці. Як відомо, число таких коренів дорівнює n, один з коренів - одиниця, дійсне число, інші корені - комплексні, за модулем рівні одиниці і розташовані на комплексній площині в вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло одиничного радіуса.

Ейлер оперував з множниками, що входять у розклад (4), як зі звичайними цілими числами, і на цьому шляху довів теорему Ферма для $n=3$.

Далі дослідження Л. Ейлера були продовжені, і у 1847 р. французький математик Ламе (1795-1870) опублікував повне, як йому здавалося, доведення великої теореми для довільних n. Заперечення проти доведення виставив Ліувілль (1809-1882), зазначивши, що для чисел виду (4) не існує єдиності розкладу на прості множники - так, наприклад:

$$4 = 2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}).$$

На достовірність доведення Ейлером теореми Ферма для окремого випадку $n=3$ неєдиність розкладу на прості множники не вплинула, але загальне доведення Ламе для будь-якого n виявилося вже несправедливим.

Приблизно в ці ж роки і навіть дещо раніше на цю обставину звернув увагу німецький математик Ернест Куммер (1810 - 1893), який працював над доведенням теореми Ферма з 1837 р. Куммер зумів відновити єдиність розкладу на множники шляхом введення нового математичного поняття - ідеальних множників. За допомогою нового поняття Куммер у низці статей, опублікованих у 1847 - 1850 роках, довів теорему Ферма для всіх $n \le 100$, а точніше для всіх n, які не входять до чисельників $(n-3)/2$ перших чисел Бернуллі.

«Ідеальні множники» Куммера відіграли велику роль у подальшому розвитку алгебри, і таким чином робота над доведенням теореми Ферма істотно сприяла розвитку математики.

Однак подальша історія теореми Ферма пішла іншим шляхом. Тривали спроби доведення теореми для $n > 100$ багатьма математиками. Один з них, Вольфскель з

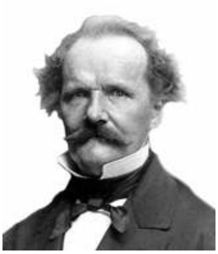
Дармштадта, який помер у 1906 р., залишив заповіт, в якому 100 тисяч марок призначалися як премія тому, хто представить повне доведення теореми Ферма. Теорема відразу стала знаменитою (і, якщо можна так сказати, «марно знаменитою»). Посипалася ціла низка «доведень», в яких при уважному аналізі неминуче виявлялися помилки. Але потік цей не припинявся.

Діофант
Александрійський
дав.-гр. Διόφαντος
λεξανδρεύς
(між 200 та 214 —
між 284 та 298)

Леона́рд Е́йлер,
нім. Leonhard
Euler
(1707-1783)

Ґабрієль Ламе́,
фр. Gabriel Lamé
(1795–1870)

Жозеф Ліувілль,
фр. Joseph
Liouville
(1809 – 1882)



Ернст Едуард
Куммер,
нім. Ernst Eduard
Kummer
(1810 – 1893)

У 1923 р. в Німеччині вибухнула величезна інфляція, а потім грошова реформа. У нових грошах, введених після реформи, 100 тисяч старих марок дорівнювали менше ніж одній сотій нової марки, тобто премія Вольфскеля втратила грошову цінність. Проте «маховик» був уже розігнаний, і теорема Ферма продовжувала займати думки багатьох людей, часто не знайомих з літературою та історією питання, які намагалися вирішити задачу за допомогою деякої надзвичайної ідеї. Триваючий потік доведень дуже утруднював роботу математичних інститутів, співробітникам яких доводилося витрачати багато часу на роботу з виявлення помилок в доведеннях людей, яких вони називали «ферматистами». Співробітники інститутів всіма силами намагалися ухилитися від цієї роботи. Якщо підрахувати, скільки часу і енергії втратили і самі «ферматисти», і співробітники математичних інститутів на пошук доведення теореми і помилок в доведеннях, то вийде величезна, приголомшлива цифра. На зміну одним «ферматистам» приходили інші, а доведення теореми все не давалося до рук.

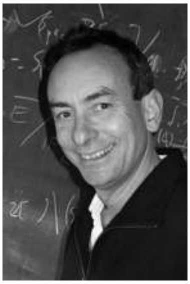
Новий поворот у справі доведення теореми Ферма стався у 1955 році, коли молодий японський математик Ю. Таніяма (1927 - 1958) сформулював своєрідну гіпотезу про властивості так званих еліптичних кривих, тобто кривих виду:

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad (5)$$

де a і b – цілі числа.

Гіпотеза Таніями спершу не привернула особливої уваги і 20 років про неї мало згадували. Потім виявилося, що з цієї гіпотези випливає багато цікавих наслідків. Найважливіший наслідок, що з гіпотези Таніями, мабуть, випливає теорема Ферма, виявив німецький математик Герхард Фрей. Повністю довести цей наслідок Г. Фрей не зміг, але він опублікував його як гіпотезу, яку у 1985 р. довів американський математик Кеннет Рібет. Тепер залишалося зробити останній і найважчий крок – довести гіпотезу Таніями.

Ютака Танияма,
яп. 谷山 豊
(1927 - 1958)



Кеннет Алан Кен Рібет,
англ. Kenneth Alan Ken Ribet
(нар. 1948)

Герхард Фрей,
нім. Gerhard Frey
(нар. 1944)

Сер Ендрю Джон Уайлс,
англ. Sir Andrew John Wiles
(нар. 1953)

Річард Лоуренс Тейлор,
англ. Richard Lawrence Taylor
(нар. 1962)

У 1993 р. американський математик Ендрю Уайлс з Прінстона довів гіпотезу Таніями і доповів про це на конференції з теорії чисел в Кембриджі. Це був найважливіший і вирішальний крок у доведенні – по суті справи в колективному доведенні – Великої теореми. Доведення Уайлса, що займає, до речі, 150 сторінок тексту, уважно вивчили і виявили в ньому помилку. Однак Уайлс разом з Р. Тейлором виправили помилку, і влітку 1995 р. виправлене доведення було опубліковано. Його ще раз прискіпливо перевірили, але цього разу помилки ніхто не знайшов, і доведення визнали достовірним. У 1998 р. на Всесвітньому математичному конгресі в Берліні Уайлс доповів своє твердження. Всі дві тисячі делегатів конгресу прийшли на його доповідь, уважно слухали і вітали доповідача дружніми оплесками. У 350-річній історії теореми Ферма була поставлена переможна крапка. Ні за обсягом, ні за методами дослідження кінця XX ст. сам П. Ферма такого доведення мати не міг.

Присутній на доповіді академік В.І. Арнольд писав потім в своїх нотатках про Всесвітній математичний конгрес, що з двох тисяч делегатів, які аплодували Е. Уайлсу, навряд чи набралося б з десяток, хто вивчав це доведення або ж зрозумів його, прослухавши двогодинну доповідь. Але тут важливий спортивний успіх - теорема, яка не піддавалася 350 років, нарешті, впала - і всі дружно аплодували.

У місті Дортмунд відкрито Музей доведень Великої теореми Ферма.

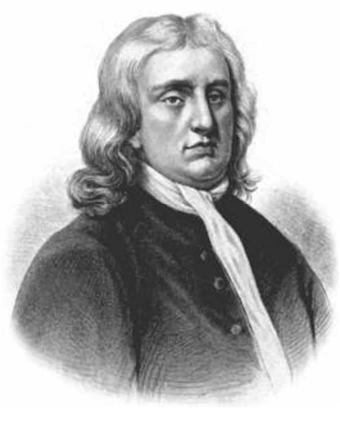
2.3. Аеродинамічна задача Ньютона

> *Нехай смертні радіють, що подібне було і настільки велика прикраса людського роду.*
>
> Епітафія на могилі І. Ньютона

> *Ця книга назавжди залишиться пам'ятником глибини генія*
>
> П. Лаплас
> (про книгу «Начала натуральної філософії» І. Ньютона)

> *У математичних питаннях не можна нехтувати навіть найдрібнішими помилками.*
>
> І. Ньютон

Першою з варіаційних задач кінця XVII століття була задача, поставлена Ісааком Ньютоном (1642 – 1726) у 1687 р.: знайти тіло обертання, яке при русі в рідині або газі буде зазнавати опір менший, ніж будь-яке інше тіло обертання, описане на тій же довжині і тій же найбільшій ширині. Ця задача поставлена в роботі Ньютона «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» London, 1678, (Математичні начала натуральної філософії, скорочено «Начала»).



Сер Іса́ак Нью́тон
англ. Sir Isaac Newton
(1642 – 1726)

«Начала» побачили світ у 1687 р. В цій книзі Ньютону судилося відкрити систему світу, а таке може статися лише один раз. Лагранж назвав цей твір «найбільшим твором людського розуму»; Лаплас назвав «Начала» «пам'ятником глибини генія». Крім відкриття основних законів механіки, законів руху планет і інших основоположних фактів в «Началах» відведене місце і багатьом частинним проблемам.

К. Трусделл зазначив [Трусделл, 2002], оскільки «Начала» є однією з тих робіт, про які всі говорять, але ніхто не читає, то сказане про неї щось інше, ніж улесливі хвалебні промови, має зіткнутися з лютим обуренням з усіх боків. Але це наукова робота, а не Біблія. Її слід вивчати і оцінювати, звичайно, із захопленням, але не молитися на неї. У ній є свої новації і свої наслідування, своя елегантна досконалість і свої помилки, свої блискучі скорочення і свої зайві манівці, свої незвичайні зразки міркувань і свої логічні провали, своє виключення сформульованих гіпотез і своє введення несформульованих.

Можна поставити під сумнів те, що хтось з тих, хто звертався до «Начал», ретельно опрацював їх; тільки такі, хто при нагоді просто робить заяви, які можна почерпнути в будь-якому популярному есе про науку або її історію.

«Начала» складаються з трьох книг, різних за характером. Їх визнана репутація грунтується головним чином на першій частині Книги I, яка описує рух одного або двох тіл в порожнечі (вакуумі). Е.В. Мах знав, що цей матеріал не був повністю оригінальний, і наступні історичні дослідження довели, що більшу частину його змісту, як фізичні принципи, так і висновки, можна знайти в роботах попередників. Але сказати, що в цьому сенсі «Начала» є ретроспективною роботою, де відібрані, розміщені в певному порядку і формалізовані досягнення попереднього століття, - надмірне дрібне спрощення.

Хоча сучасники Ньютона і не усвідомлювали цієї властивості Книги I, тим не менше, їхнє захоплення нею було велике, незалежно від того, поділяли вони погляди Ньютона чи ні. По-перше, Ньютон писав вірно, ясно і стисло. В роботах, які виходили раніше, блискучі відкриття залишалися прихованими під нагромадженням слів, стомлюючих подробиць, метафізики, плутанини і помилок.

Але читачів «Начал» вразила їхня інша і важливіша риса. В Книзі чільне місце займають відомі аксіоми або закони руху:

«I. Кожне тіло продовжує залишатися в своєму стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки прикладені до нього сили не змушують його змінити цей стан.

II. Зміна руху пропорційна прикладеній рушійній силі, і він відбувається уздовж тієї прямої, по якій діє ця сила.

III. Будь-яка дія завжди має рівну їй і протилежну до неї за напрямком протидію; інакше кажучи, взаємні дії двох тіл одне на одне завжди рівні і спрямовані в протилежні сторони».

Книга I «Начал» виступає як перший загальний трактат про механіку, який систематизує широке коло питань механіки і випливає з фундаментальних законів. Для читачів того часу саме цей дедуктивний математичний аспект став великим досягненням. На основі кількох простих аксіом виявилися доведеними всі основні властивості руху тіл.

Різноманітність явищ, успішно впорядкованих в «Началах», робить їх стислість ще примітнішою. Хоча стародавні були готові давати точні математичні формулювання, вірні чи невірні, про рух планет, їхній підхід до руху на Землі мав здебільшого якісний характер, де використовувалася мова причин, наслідків і тенденцій, як в біології та медицині. Цього поділу небесної геометрії і земної механіки дотримувався Галілей, який збільшив розрив між геометричною механікою і практичними механічними явищами хоча і зробив багато для поширення ідей про кінематичні властивості рівноприскореного руху, вірно встановлених вченими триста років тому, Галілей, по-перше, відмовився пов'язати будь-яким чином небесний і земний рух і, по-друге, висував як головні близькі та знайомі закони руху, які мають силу тільки в ідеальному або порожньому середовищі. Практик, змушений працювати на реальній Землі, додавав ефекти, що виникали завдяки опору і тертю, але пояснювалися тільки як якості або тенденції в стилі фізики Аристотеля, так зневажуваної Галілеєм.

Й. Кеплер шукав фізику, однаково прийнятну на небесах і на Землі. Хоча видатні успіхи Й. Кеплера при описуванні Сонячної системи підвели його впритул до закону гравітації, він нічого не зробив у земній механіці. Декарт категорично стверджував, що не існує єдиної механіки, закони якої однаково вірні вгорі і внизу, але, не маючи терпіння в деталях, він ніколи не просунувся в своїх дослідженнях настільки, щоб дізнатися, що його власні принципи виявлялися частково невірними, а також недостатніми. Великі і значні відкриття в динаміці, зроблені Гюйгенсом; його робота більшою мірою, ніж всі виконані раніше, показала наповненість аналізом чисел та цифр, а не визначень; але, будучи консерватором, він не зайнявся вивченням руху планет.

Друга половина Книги І «Начал» є повністю оригінальною роботою, але тут Ньютон почав відступати від програми виведення всього математично на основі аксіом.

Але, без сумніву, шедевром Книги І є розгляд Ньютоном задачі трьох тіл.

К. Трусделл зазначає, що хоча Книга І «Начал» - це виконання програми Кеплера, Ньютон мав свою власну програму. Тіла на землі, як з готовністю підтвердить будь-який послідовник фізики Аристотеля, в реальних експериментах не підпорядковувалися наказам Галілея. Ідеального середовища або вакууму, в якому ці декларації якраз справедливі, не існує ніде на практичній, фізичній Землі, як може підтвердити з ще більшою готовністю послідовник Аристотеля. Переконавшись, що для виправдання нехтування тертям треба спочатку точно оцінити його вплив, Ньютон поставив перед собою задачу визначення математичним методом природи руху в середовищі, яке чинить опір. Все це є темою Книги ІІ, за винятком кількох відступів.

Для створення переконливого вчення про опір рідин Ньютон спочатку мав вивчити рух рідин. Тут у нього не було гідного попередника, тут його підвела програма математичної дедукції. Книга ІІ майже повністю оригінальна, і в ній багато невірного. У кожному розділі з'являються нові гіпотези, приховані припущення застосовуються вільно, а сформульовані припущення іноді зовсім не використовуються. З Книги ІІ небагато перейшло або в тексти, або в історичні нариси, а те, що залишилося, дуже часто мало хибне тлумачення. Для створення теорії пружності повітря, витікання рідини з отвору, руху хвиль у воді, коливання води в трубі, опору, що зазнається тілами в розріджених або щільних середовищах, поширення звуку в повітрі, внутрішнього тертя рідин Ньютон створив нові поняття. Те, що небагато з його понять збереглися і небагато з його рішень виявилися вірними, менш примітно, враховуючи повну новизну предметів, порівняно з тим, що він все ж зміг в кожному разі намацати або підібратися до деякої певної відповіді. Блискуче щира, але, врешті-решт, повністю незадовільна Книга ІІ накреслила плани та визначила задачі для багатьох досліджень у галузі механіки наступного століття.

Книга ІІІ присвячена астрономії. У ній Ньютон показав, що математичні теореми Книги І з відповідними числовими значеннями справедливі для явищ Сонячної системи.

За основу своєї «Системи Всесвіту» в Книзі ІІІ Ньютон прийняв дев’ять «Гіпотез». Останні п’ять, які стосуються планет і Місяця, у другому виданні (1713) він позначив «Явища», де перші три він назвав «Regulae Philosophandi»; сучасною мовою їх можна позначити «Правила умовиводів в природничих науках». Саме в цих «Правилах» слід було б шукати експериментальну основу його механіки, але вона відсутня.

«Гіпотеза 1. Нам слід визнати не більше причин природних речей, крім тих, які можуть бути як істинними, так і достатніми, щоб пояснити ці явища. Дійсно, природа проста і не впливає на численність причин.

Гіпотеза 2. І, таким чином, у природних явищ одного і того ж роду однакові причини.

Гіпотеза 3. Будь-яке тіло можна перетворити в тіло якого-небудь іншого роду, і воно може приймати послідовно всі проміжні ступені якостей».

Останню гіпотезу важко зрозуміти і про неї не згадують історики з емпіричними нахилами. Грубо кажучи, вона означає, що фізичні явища відбуваються плавно, а не стрибками; її можна назвати «неквантовою гіпотезою». Як можна здогадатися, її мета - затвердити фізичну значимість для диференціювання та інтегрування, які зустрічаються майже на кожній сторінці «Начал»[1], і в подібному контексті вона знайома будь-якому студенту вісімнадцятого століття як «закон неперервності Лейбніца».

У трьох книгах «Начал» Ньютон виступає як найбільший теоретик. Він: 1) систематизував, вивів математично і надав нову форму відомим, але розрізненим законам і явищам; 2) створив нові поняття; 3) отримав докладні чисельні результати і порівняв їх з виміряними величинами. Ньютон дійсно зробив дуже багато для механіки: він почав далеке тоді від завершення «формальне проголошення основних принципів механіки, тепер загальноприйнятих».

У 1705 р. королева Анна посвятила Ньютона в лицарі (сер Ісаак Ньютон). Уперше в англійській історії звання лицаря було надано за наукові заслуги. Ньютон отримав власний герб. На могилі Ньютона у Вестмінстерському абатстві висічена епітафія:

«Нехай смертні радіють, що подібне було і
настільки велика прикраса людського роду».

У студентській записній книжці Ньютона є програмна фраза: «У філософії не може бути повелителя, крім істини… Ми повинні поставити пам'ятники із золота Кеплеру, Галілею, Декарту і на кожному написати: «Платон - друг, Аристотель - друг, але головний друг - істина».

Фізичні гіпотези, на які спирається Ньютон при вирішенні поставленої в «Началах» задачі про тіло обертання, що зазнає найменшого опору рухаючись у газі, такі: середовище, в якому рухається тіло обертання, представляється рівномірно заповненим однорідними частинками. Сила опору цього середовища дорівнює зміні за одиницю часу кількості руху частинок, що зіткнулися з тілом. Таким чином,

---

[1] Історики все ще повторюють старі вигадки минулих століть про Ньютона, який «приховує свої методи» і представляє за допомогою «грецької геометрії» доведення теорем, «відкритих шляхом обчислення». Незважаючи на те, що Ньютон, дійсно, не користувався поняттям флюксій в «Началах», сучасний математик, маючи незначну повагу до тих, хто змішує позначення з поняттями, вважає «Начала» книгою, наповненою теорією і додатками з обчислення нескінченно малих.

якщо α кут зустрічі поверхні з напрямком руху, то кількість частинок, що зіткнулися з поверхнею, дорівнює $kp\sin\alpha$ (де k – коефіцієнт пропорційності, p – величина поверхні). Опір, що чиниться однією частинкою, пропорційний $\sin^2\alpha$ (бо $mv\sin\alpha$ – нормальний опір, а його складова у напрямку руху дорівнює $mv\sin^2\alpha$).

Математичні передумови у вирішенні варіаційних задач грунтувалися на характерних для XVII ст. уявленнях про нескінченно малі і операціях над ними. Всі властивості скінченних чисел переносилися на нескінченно малі, скінченне число (скінченний відрізок кривої) представлялося як сума нескінченно великої кількості нескінченно малих (відрізків). Широко практикувалося відкидання нескінченно малих вищих порядків. Як наслідок звідси, для поставленої Ньютоном задачі випливало, що нескінченно малий відрізок кривої можна вважати прямолінійним, а тіло обертання – таким, що складається з нескінченно великої кількості нескінченно тонких зрізаних конусів.

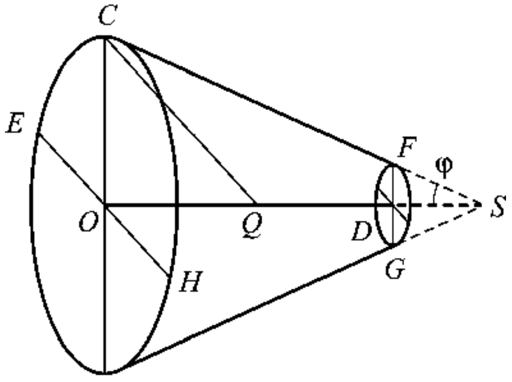


Рис. 8

Перед тим, як розв'язати задачу в загальному вигляді, Ньютон ставить попередню задачу: на даних основі і висоті побудувати такий зрізаний конус, який зазнавав би найменшого опору при русі в напрямку осі, і одразу без доведення дає відповідь: «розділивши висоту *OD* в точці *Q* навпіл, продовжимо *OQ* до *S* так, щоб було *QS*=*QC*; *S* і буде вершиною шуканого конуса» (рис. 8).

Неважко показати, що це дійсно так. Покладемо $OD=2a$, $OS=x$, $OC=r$ і позначимо опір через R, тоді дістанемо

$$R=k\left[\frac{r^2(x-2a)^2}{x^2}+\left(r\ -\frac{r^2(x-2a)^2}{x^2}\right)\cdot\frac{r^2}{r^2+x^2}\right]=kr^2\cdot\frac{(x-2a)^2+r^2}{r^2+x^2}.$$

Умова мінімальності R:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=0,$$

або

$$x^2-2ax-r^2=0,$$

звідки

$$x=a+\sqrt{a^2+r^2},$$

і ми дістали твердження Ньютона.

Якщо $a\to 0$, то $x\to r$ і $\varphi\to 45^\circ$. Мабуть, спираючись на представлення тіл обертання у вигляді суми нескінченно великої кількості нескінченно тонких зрізаних конусів, Ньютон зробив друге зауваження, також без доведення: якщо тіло, що утворене обертанням еліпса або овалу *ADBE і* рухається у напрямі *AB* (точкою *B* вперед), замінити тілом обертання фігури *ADFGHIE* (рис. 9), де кути *FGH* і *GHI* дорівнюють 135°, то від цього опір рідини зменшиться.

«Я вважаю, що це зауваження – говорить Ньютон – може бути досить корисним при побудові суден». Нарешті, Ньютон формулює і саму теорему: «Коли фігура *DNG* (рис. 10) буде такою, що у разі коли з будь-якої її точки *N* опустити на вісь перпендикуляр *NM* і із заданої точки *G* провести пряму *GR*, яка паралельна дотичній до кривої в точці *N* і перетинає вісь в точці *R*, то має місце пропорція: $MN : GR = GR^3 : (4BR \cdot GB^2)$). Тоді тіло, що утворюється при обертанні цієї кривої навколо осі *CB* рухаючись у зазначеному середовищі від *C* до *B*, зазнаватиме менший опір, ніж будь-яке інше тіло обертання, описане на тій же довжині і тій же найбільшій ширині».

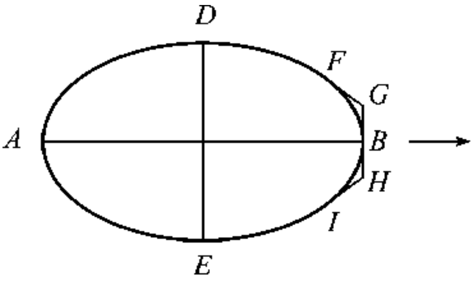


Рис. 9

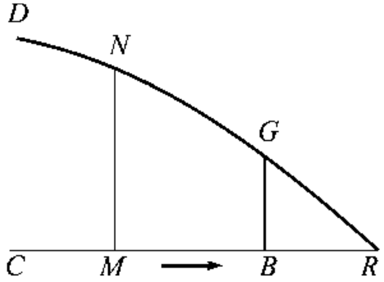


Рис. 10

Таким чином, Ньютон вивів по суті диференціальне рівняння, що визначає форму шуканої меридіональної кривої. Справді, якщо вісь *CB* прийняти за вісь абсцис, позначити $MN = y$, $BG = a$, то $\operatorname{tg} GRB = y'$, $BR = \frac{a}{y'}$ і $GR = \frac{a\sqrt{1+y'^2}}{y'}$.

Підставляючи ці позначення в пропорцію, вказану Ньютоном, дістанемо:

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2} = \frac{a}{4},$$

тобто диференціальне рівняння Ейлера для задачі Ньютона у прийнятій тепер формі.

Ньютон не дав жодної вказівки на метод, яким він отримав свою пропорцію. Згодом він передав своїм коментарям начерки виведення, але вони були опубліковані лише у 1727-1729 рр., коли вже завершувався перший етап варіаційного числення. Підготовчі матеріали Ньютона, опубліковані лише в наш час, показують, що він володів елементами багатьох конструкцій, згодом здійснених Ейлером і Лагранжем.

Задача Ньютона спочатку не привернула до себе уваги вчених і не стала об'єктом інших досліджень, безпосередньо наступних за роботою Ньютона. Лише у 1699 р. в журналі «Acta Eruditorum» з'явилися два розв'язання цієї задачі: Лопіталя в травневому зошиті і І. Бернуллі – у листопадовому. Були також деякі інші роботи.

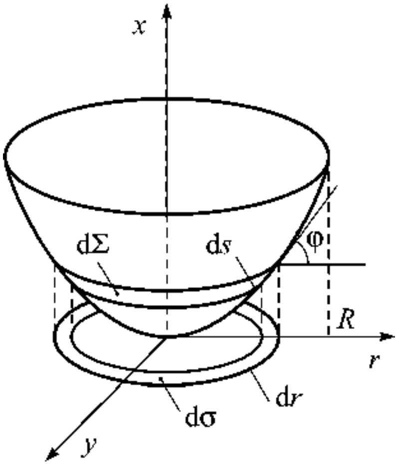


Рис. 11

Формалізація цієї задачі залежить, природно, від законів опору середовища. Ньютон уявляв собі середовище (він називав його «рідким») складеним з нерухомих частинок фіксованої маси *m*, які є абсолютно пружними кулями. Будемо далі спиратися на цю гіпотезу.

Нехай тіло обертання навколо осі *Ox* (рис. 11) рухається в напрямку, протилежному осі *x* («донизу») в описаному «рідкому» середовищі Ньютона зі швидкістю υ. Елемент d*r* на осі *r* при обертанні навколо осі *Ox* описує кільце площею $\mathrm{d}\sigma = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ і цьому кільцю відповідає шар $\mathrm{d}\Sigma$ на самому тілі обертання. За час d*t* цей шар «витіснить» об'єм $\mathrm{d}V = 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\upsilon\,\mathrm{d}t$. Нехай ρ - щільність середовища. Тоді число частинок, які стукаються об шар тіла, дорівнює $N = \frac{\rho}{m}\mathrm{d}V = \frac{\rho 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\upsilon}{m}\mathrm{d}t$, де m - маса частинки.

Обчислимо силу d*F*, що діє на шар тіла $\mathrm{d}\Sigma$ за час d*t*. Нехай ділянка d*s* нахилена до осі *r* під кутом φ. Відбиваючись від $\mathrm{d}\Sigma$ одна частинка отримує приріст імпульсу, що дорівнює

$$m(v_2 - v_1) = -2m\upsilon\cos\varphi\cdot n,$$

де $\upsilon = |v_1| = |v_2|$, n - одиничний вектор нормалі до $\mathrm{d}\Sigma$, а $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}$ - кут між d*s* і горизонталлю. В силу третього закону Ньютона тіло отримує протилежний приріст імпульсу $m2\upsilon\cos\varphi\cdot n$, а за час d*t* таких приростів буде *N*, причому в силу симетрії компоненти імпульсу, ортогональні осі обертання, в сумі дають нуль, а осьова компонента сумарного приросту імпульсу дорівнює

$$Nm2\upsilon\cos\varphi\cos\varphi = \frac{2\rho\pi r\,\mathrm{d}r\,\upsilon\,\mathrm{d}t}{m}m2\upsilon\cos^2\varphi = 4\rho\pi\upsilon^2 r\,\mathrm{d}r\,\cos^2\varphi.$$

В силу другого закону Ньютона цей вираз дорівнює d*F*dt_y, звідки $\mathrm{d}F = kr\mathrm{d}r\,\cos^2\varphi$, $k = 4\rho\pi\upsilon^2$, а загальна сила опору дорівнює

$$F = k\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{1+(\mathrm{d}x/\mathrm{d}r)^2}. \qquad (6)$$

Таким чином, замінюючи *r* на *t* і *R* на *T*, дістанемо екстремальну задачу

$$\int_0^T \frac{t}{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}t \to \inf,\ x(0)=0,\ x(T)=\xi\,. \qquad (7)$$

Легко збагнути, не розв'язуючи задачі (7) (вперше це відмітив Лежандр у 1788 р. посилаючись на Сен Жака де Сільвабелля (1722-1801), (див. нарис 5), що нижня межа в задачі дорівнює нулю. Дійсно, якщо вибрати ламану $x(\cdot)$ з дуже великою за модулем похідною (рис. 12), то інтеграл (7) буде дуже малим. З іншого боку, для будь-якої функції $x(\cdot)$ інтеграл в (7) є невід'ємним. Отже, нижня межа значень інтеграла дорівнює нулю.

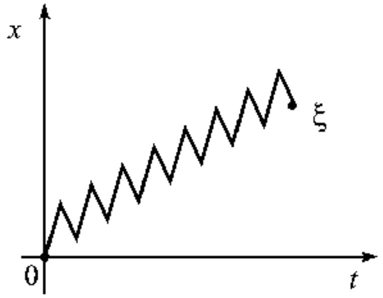


Рис. 12

У тому, що inf інтеграла (7) дорівнює нулю легко переконатися взявши, наприклад, послідовність функцій

$$y_n(x) = \frac{b}{a}x + \sin^2 n\frac{\pi}{a}x .$$

Дійсно, відповідні профілі при $n \to \infty$ стають все більш «зазубреними». На рис. 13 зображені функції $y_n(x)$ при $n=1,\ n=2,\ n=5$. На рис. 14 - зміна значення інтеграла зі збільшенням n.

Однак можна думати, що Ньютон мав на увазі тільки монотонні профілі, а з математичної точки зору це означає розв'язання задачі при додатковому обмеженні $y' \geq 0$. Така задача має єдиний розв'язок, притому негладкий:

$$y(x) \equiv 0,\ 0 \leq x \leq x_0,\ y' \geq 1 \text{ при } x_0 < x \leq T .$$

Це рішення виявилося корисним для сучасної надзвукової аеродинаміки.

Допущення про монотонність приводить до такої правильної формалізації задачі Ньютона:

$$\int_0^T \frac{t}{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}t \to \inf,\ x(0)=0, x(T)=\xi,\ \dot{x} \in \mathbf{R}_+ . \tag{8}$$

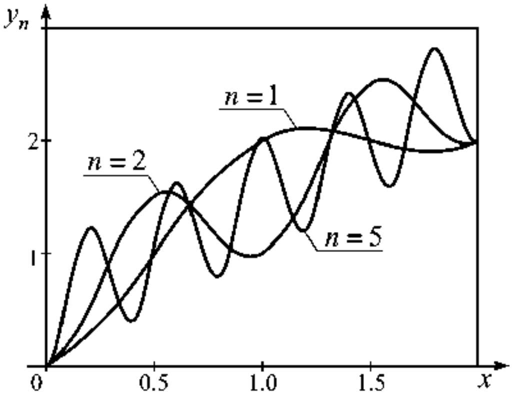


Рис. 13

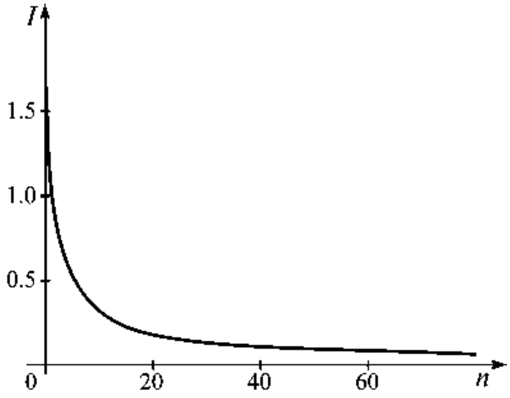


Рис. 14

Наведемо розв'язання задачі Ньютона з прийнятою зараз термінологією. Сформулюємо умову задачі в інших термінах і позначеннях.

Розглядатимемо плоскі криві Г, що з'єднують початок координат O з точкою $A(a,b)$. При обертанні навколо осі Ox вони утворюють сімейство поверхонь обертання із загальною віссю Ox, вершиною O і спираються на загальне коло, що утворюється обертанням ординати AA_1 точки A (рис. 15). Разом з колом ці поверхні обмежують деякі тіла обертання. Задача полягає у виборі серед цих тіл обертання такого тіла, що зазнає найменшого опору при поступальному русі зі швидкістю v в напрямі осі обертання в середовищі, що чинить опір (вода, повітря).

Розв'язання цієї задачі залежить, звичайно, від законів опору. Ньютон, ґрунтуючись на дуже грубих гіпотезах, дав такий закон опору. Середовище вважалося таким, що складається з нерухомих молекул. Кожен елемент поверхні $\mathrm{d}\omega$ при поступальному русі зустрічає на своєму шляху ці молекули. Абсолютно пружні удари їх об елемент $\mathrm{d}\omega$ визначають його опір. Нехай α − кут нахилу елемента до напряму руху осі Ox. Проекція елемента $\mathrm{d}\omega$ на площину, перпендикулярну напряму руху, дорівнює $\mathrm{d}\omega\cdot\sin\alpha$. Число ударів елемента $\mathrm{d}\omega$ об молекули за одиницю часу пропорційно $\mathrm{d}\omega\cdot\sin\alpha$. Відносна середня швидкість молекули дорівнює v. Розклавши v на швидкість, нормальну до $\mathrm{d}\omega$, рівну $v\cdot\sin\alpha$, і направлену по $\mathrm{d}\omega$, можна замінити удари молекули ударом тієї ж маси в нормальному напрямі із швидкістю $v\cdot\sin\alpha$. Жива сила ударів всіх молекул на елемент $\mathrm{d}\omega$ за одиницю часу пропорційна $v^2\sin^2\alpha\,\mathrm{d}\omega$.

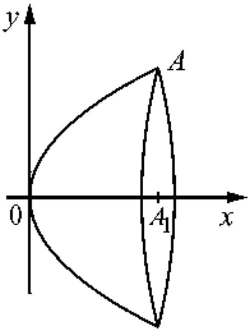


Рис. 15

На поверхні обертання кривої

$$\Gamma\colon\ x = x(t),\quad y = y(t)$$

при осі обертання, що збігається з напрямом руху, всі точки кожного нескінченно тонкого зрізаного конуса, отримуваного обертанням елемента довжини, мають загальний нахил α до напряму руху. Якщо він співпадає з віссю Ox, то

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

поверхня нескінченно тонкого зрізаного конуса дорівнює

$$\pi\cdot y\cdot \mathrm{d}s = \pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t,$$

його опір дорівнює

$$k\cdot\frac{yy'^3v^2}{x'^2 + y'^2}\mathrm{d}t,$$

де k − сталий коефіцієнт. Інтегруючи по t уздовж кривої Г, отримаємо опір R поверхні обертання:

$$R = kv^2 \int\limits_{\Gamma} \frac{yy'^3}{x'^2 + y'^2} \mathrm{d}t .$$

Розглянемо тепер всю поверхню в цілому. Нехай в напрямі, зворотному напряму руху, на поверхню падає пучок паралельних променів. Частина поверхні буде ними освітлена; назвемо її *освітленою частиною.* Частина поверхні буде в тіні, що відкидається рештою частин. У зіткненнях з молекулами при такій грубій схемі братиме участь тільки освітлена частина поверхні, отже, загальний опір виразиться інтегралом від опору елемента поверхні, узятим по освітленій його частині. Якщо вся поверхня у цій термінології освітлена, тобто кожна пряма, паралельна напряму руху, перетинає поверхню тільки в одній точці, то інтеграл береться по всій поверхні. Природно при прийнятих гіпотезах обмежитися повністю освітленими поверхнями обертання, оскільки неосвітлені не беруть участі у опорі.

Отже, за клас допустимих ліній приймаємо лінії

$$x = x(y) ,$$

де $x(y)$ − однозначна функція. Зважаючи на фізичний зміст задачі, припустимо ще додатково, що функції $x(y)$ класу допустимих ліній є неспадними. Дещо розширюючи клас допустимих ліній, можна аналітично формулювати задачу таким чином: *серед кривих* γ *класу* $\mathbf{D}_1$, *що з'єднують точки A і B і розташовані всередині прямокутника*

$$0 \le x \le a, \ \ 0 \le y \le b ,$$

визначити криву, уздовж якої інтеграл

$$J = \int\limits_{\gamma} \frac{yy'^3 \mathrm{d}t}{x'^2 + y'^2}$$

набирає найменшого значення.

Для розв'язання задачі спочатку запишемо для цієї задачі рівняння Ейлера. Підінтегральний вираз *F* не містить *x*. Отже, екстремаль задовольняє рівняння:

$$F_{x'} = C = \mathrm{const} .$$

Таким чином,

$$\frac{yy'^3 x'}{(x'^2 + y'^2)^2} = C . \tag{9}$$

Зауважимо, що у разі, коли хоч в одній точці екстремалі x' або y' рівні нулю, то $C = 0$ і, отже, вздовж всієї екстремалі $x' = 0$ або $y' = 0$; екстремаль вироджується в пряму $x = c$ або в пряму $y = c$. Прямі $y = c$, паралельні осі *Ox,* не є цікавими, оскільки при обертанні вони дають неосвітлені поверхні.

Нехай тепер $x'^2 \ne 0$, $y'^2 \ne 0$. Тоді при зроблених припущеннях, $x' > 0$, $y' > 0$. Позначимо

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x'}{y'} = q\ ;$$

із умови (9) дістанемо:

$$\frac{yq}{(1+q^2)^2} = C\ .$$

Звідси

$$y = \frac{C(1+q^2)^2}{q}. \tag{10}$$

Прийнявши q за параметр, із (10) матимемо

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q} = C\cdot\frac{-1+2q^2+3q^4}{q^2}\ ,$$

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q} = qy' = C\cdot\frac{-1+2q^2+3q^4}{q}\ ,$$

$$x = \int x'\mathrm{d}q = C\left(q^2+\frac{3}{4}q^4-\ln q\right)+C_1\ .$$

Отже, вважаючи q параметром, отримаємо рівняння екстремалі у параметричному вигляді:

$$\left.\begin{aligned} x &= C(q^2+\frac{3}{4}q^4-\ln q)+C_1, \\ y &= C\cdot\frac{(1+q^2)^2}{q}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

При $C=0$ $y=0$, тобто екстремаль вироджується в одну з прямолінійних екстремалей, розглянутих вище. Нові екстремальні криві отримаємо при $C\neq 0$. Для цих кривих y завжди відмінне від нуля і має один і той же знак, тобто ці екстремалі не перетинають вісь *Ox*. Але, очевидно, прямолінійні екстремалі не з'єднують початок координат з точкою *A*, що не лежить на координатних осях, а криволінійні не з'єднують початок координат з *A*, оскільки вони не перетинають вісь *Ox*, і, отже, не проходять через початок координат. У розглядуваній задачі мінімум не досягається на кривих з дотичною, що неперервно обертається, і його природно шукати серед кривих з точками переломлення.

Передусім дослідимо криві сімейства (11) при $q\neq 0$. Розглянемо одну з цих кривих при $C=1$, $C_1=0$; решту кривих при будь-яких C і C_1 можна отримати з неї подібним перетворенням (з центром у початку координат і знаменником перетворення *C*) і поступальним переміщенням (паралельним осі *Ox* на відстані C_1). Отже, обмежимося поки кривою

$$\left.\begin{aligned} x &= q^2 + \frac{3}{4}q^4 - \ln q, \\ y &= \frac{(1+q^2)^2}{q} = \frac{1}{q} + 2q + q^3. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

При $q \to \infty$, $y \to \infty$ і $x \to \infty$. Справді, $q^2 + \frac{3}{4}q^4$ зростає швидше, ніж $\ln q$, і тому їх різниця прямує до $+\infty$.

Отже, крива (12) йде двома гілками в нескінченність. При $q < 0$ логарифм стає комплексним, отже, крива (12) визначена тільки для додатних q. Оскільки $\frac{1}{q} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ є кутовий коефіцієнт дотичної, то, кожна з гілок y є монотонно зростаючою функцією від x. Очевидно, що x і y при деякому скінченному значенні q досягають свого мінімуму. Для значення q, що дає мінімум x, маємо

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{q}\left(3q^4 + 2q^2 - 1\right) = 0.$$

Для мінімального значення y

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{q^2}\left(3q^4 + 2q^2 - 1\right) = 0.$$

Оскільки мінімуми x і y досягаються напевно не для $q = 0$ і $q = \infty$, то $\frac{1}{q}$ і $\frac{1}{q^2}$ відмінні від нуля і від нескінченності, на них можна скоротити. Для визначення мінімуму x і y дістанемо одне і те ж біквадратне рівняння

$$3q^4 + 2q^2 - 1 = 0,$$

у якого треба шукати дійсний додатний корінь. Розв'язавши це рівняння, з'ясовуємо, що шуканий корінь єдиний і дорівнює

$$q = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином, коли q зростає від $\frac{1}{\sqrt{3}}$ до ∞, то x і y монотонно зростають; коли q спадає від $\frac{1}{\sqrt{3}}$ до нуля, x і y також монотонно зростають.

Зазначимо, що $\frac{1}{q}$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до досліджуваної кривої і тепер можна достатньо точно охарактеризувати поведінку кривої. При $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ маємо точку повернення; гілка кривої, що відповідає $q < \frac{1}{\sqrt{3}}$, і гілка кривої, що відповідає $q > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, увігнуті. У точці повернення кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\sqrt{3}$, кут дотичної з віссю Ox є 60°.

Із умови Лежандра для мінімуму

$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{x'^2} \geq 0 .$$

Внаслідок того, що $y > 0$ і $y' > 0$, маємо:

$$y'^2 - 3x'^2 = y'^2\left(1 - 3q^2\right) \geq 0 ,$$

тобто

$$q \leq \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Таким чином, крива, що дає мінімум, може складатися тільки з опуклих ділянок екстремалі і з відрізків, паралельних координатним осям.

Покажемо, що точка переломлення може знаходитися тільки на осі Oy (на границі прямокутника). Справді, в точці переломлення мають задовольнятися умови Ердмана:

$$\left.\begin{aligned} \left[F_{x'}\right]_{q_1} &= \left[F_{x'}\right]_{q_1} \\ \left[F_{y'}\right]_{q_1} &= \left[F_{y'}\right]_{q_1} \end{aligned}\right\} \quad \left(q_1 \neq q_2\right),$$

які для розглядуваної задачі набирають вигляду:

$$y\frac{q_1}{(1+{q_1}^2)^2} = y\frac{q_2}{(1+{q_2}^2)^2} , \tag{13}$$

$$y\frac{1+3{q_1}^2}{(1+{q_1}^2)^2} = y\frac{1+3{q_2}^2}{(1+{q_2}^2)^2} . \tag{14}$$

У точці переломлення при $y > 0$ можливі такі чотири випадки.

1. Точку переломлення утворюють відрізки паралелей осі Ox і осі Oy, ці відрізки відповідають значенням $q = 0$ і $q = \infty$; умова (14) не виконується.

2. Точку переломлення утворюють відрізок паралелі осі Ox і дуга кривої Ньютона.

3. Точку переломлення утворюють відрізок паралелі осі Oy і дуга кривої Ньютона.

У цих двох випадках буде, очевидно, не виконуватись умова (13).

4. Точку переломлення утворюють дві різні дуги кривої Ньютона. Оскільки через умову Лежандра обидві ці дуги відповідають значенням $q \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то легко бачити, що і в цьому випадку умова (13) не виконується ні при яких різних значеннях q_1 і q_2.

Залишається показати, що точки переломлення не лежать також на осі *Ox*. Оскільки крива Ньютона при будь-яких значеннях довільних сталих не перетинає вісь *Ox,* то наявність у екстремалі точки переломлення на цій осі (екстремаль в цьому випадку повинна включати ділянку осі *Ox,* ділянку паралелі осі *Oy*) спричинила б наявність у кривої точки переломлення при $y > 0$, що неможливо внаслідок доведеного вище. Звідси робимо висновок, що шукана крива має складатися з відрізка осі *Oy* (ділянка границі області) і з ділянки кривої Ньютона.

У точці переломлення на границі має виконуватися умова (14), яка в нашому випадку набирає вигляду:

$$\left[\frac{1+3q_1^{\,2}}{(1+q_1^{\,2})^2}\right]_{q=0} = \left[\frac{1+3q_2^{\,2}}{(1+q_2^{\,2})^2}\right]_{q=0}.$$

Звідси в точці переломлення для кривої Ньютона дістанемо

$$q = 1,$$

тобто в точці переломлення крива Ньютона утворює з віссю *Oy* кут 45°. Отже, шукана крива складається з відрізка осі *Oy* і опуклої ділянки кривої Ньютона, що виходить з точки *B* і перетинає вісь *Oy* під кутом 45°. Неважко бачити геометрично, що цими умовами шукана крива визначається єдиним чином.

Вище зазначалося, що постановка задачі і розв’язання Ньютона неодноразово викликали критику, іноді і зловтішну. Один з прикладів - в книзі Янга [Янг, 1974] говориться: «Ньютон сформулював варіаційну задачу про тіло обертання, що зазнає найменшого опору при русі в газі. Прийнятий ним закон опору фізично абсурдний, в результаті чого поставлена ним задача не має розв’язку (чим більше зазубреним є профіль, тим менший опір)... Якщо б висновки Ньютона хоча б приблизно були вірними, то ми не потребували б сьогодні дорогих експериментів в аеродинамічних трубах». Сказано із захопленням! Багатьох людей тішить думка, що і великі помиляються. Але чи насправді це так в даному випадку? Перш за все, зауважимо, що сам Ньютон не формалізував свою задачу - це за нього зробили (і не досить вдало) інші. Для правильної формалізації необхідно врахувати монотонність профілю, яка неявно припускалася (при зазубреному профілі частинки зазнають багаторазові відбиття, що спотворює всю картину). Вимога монотонності робить задачу фізично змістовною. З урахуванням цієї обставини розв’язання самого Ньютона є не тільки «приблизно» вірним, але є вражаюче вірним в деталях. Більш того, фізичні гіпотези, висунуті Ньютоном, і саме його розв’язання аеродинамічної задачі виявилися дуже актуальними в сучасній надзвуковій аеродинаміці, коли на порядку денному постало питання побудови надшвидкісних і висотних літаючих апаратів. Двісті п'ятдесят років здавалося правдоподібним, що задача Ньютона не має фізичного підгрунтя, а її рішення абсурдно. Але «помилка» генія на перевірку виявилася його прозрінням.

Чому ж крива Ньютона протягом майже трьохсот років не сприймалася належним чином і чому так довго задум Ньютона був не до кінця зрозумілий?

Задача про брахістохрону відкрила нову еру - еру варіаційного числення (див. нарис 3). Варіаційне числення бурхливо розвивалося протягом майже двох століть.

Багато технічних задач (в основному космічного змісту) виявили, що частина актуальних проблем не може бути досліджена методами варіаційного числення. Була розроблена нова теорія - теорія оптимального управління, яка включила в себе варіаційне числення і дозволила вирішувати задачі нового типу. В рамках цієї теорії задача Ньютона дістає природне і стандартне вирішення, отже задача Ньютона належить саме до задач оптимального управління. А в рамках варіаційного числення такого природного і стандартного вирішення ця задача не мала. Таким чином, Ньютон своєю задачею випередив час майже на 300 років.

А що це за рідке середовище і чи буває воно? Чи не є абсурдною та обставина, що тіло найменшого опору затуплене? Чи існують торпеди або ракети із затупленими оголовками? Дійсно, ні вода, ні повітря навколо нас, ні будь-яке інше звичне рідке або газоподібне середовище не мають властивостей рідкого середовища Ньютона. Так що розв’язання Ньютона не може бути використаним при будівництві моторних човнів, катерів і океанських лайнерів. Однак фізичні припущення Ньютона і сама його аеродинамічна задача виявилися на самому передньому краї науки в середині 50-х років XX ст. - в той момент, коли настала ера надзвукових і надвисотних літаючих апаратів. Там, «вгорі», середовище є «рідким». І зауваження Ньютона про затуплені конуси виявилося таки «недаремним» для побудови космічних і надзвукових апаратів.

НАРИС 3

ВИНИКНЕННЯ І СТАНОВЛЕННЯ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. РОДИНА БЕРНУЛЛІ, НЬЮТОН, ЛЕЙБНІЦ, ЕЙЛЕР, ЛАГРАНЖ, ПУАССОН, ГАУСС, ГАМІЛЬТОН, ОСТРОГРАДСЬКИЙ, ЯКОБІ

Числення варіацій – якісно нове, відмінне від диференціального числення ...

Л. Ейлер

Визначайте значення слів, і ви позбавите людство від половини його помилок

Р. Декарт

3.1. Перші варіаційні задачі

> *Розглянемо найпростішу задачу про максимум і мінімум, яка вказує нам шлях природного переходу від функцій скінченної кількості змінних до величин, що залежать від нескінченної кількості змінних.*
>
> Г. Вольтерра

Дослідження Ферма, Ньютона і Лейбніца сприяли появі методу знаходження екстремумів функцій однієї змінної. Здається було б природно далі досліджувати функції двох, трьох і більше змінних. Але сталося не так. Історія аналізу зробила своєрідний зигзаг і відразу почалося вивчення функцій нескінченної кількості змінних і тільки через кілька десятиліть сталося повернення до скінченновимірних задач. І в задачі Ньютона, і в класичній ізопериметричній задачі, і в задачі про брахістохрону, про яку йтиметься у цьому нарисі, досліджувалися «довільні криві». Ці криві не задаються за допомогою одного, двох або будь-якої скінченної кількості параметрів. В їх «довільності» є «нескінченно велика кількість змінних». Наприкінці XVII століття почалася розробка теорії задач, подібних трьом названим. Створювалося спеціальне "числення" таких задач, яке сформувалося у XVIII і XIX століттях в роботах Ейлера, Лагранжа, Веєрштрасса і інших Його назвали варіаційним численням.

Аналіз функцій скінченної кількості змінних розвивався дещо пізніше. А потім (порівняно недавно) було усвідомлено, що математичний аналіз нескінченної кількості змінних є принципово складнішим ніж скінченновимірний аналіз. Думка про створення нескінченновимірного аналізу відштовхувалася від необхідності розв'язання екстремальних задач. Г. Вольтерра, маючи на увазі класичну ізопериметричну задачу, писав: «Розглянемо найпростішу задачу про максимум і мінімум, яка вказує нам шлях природного переходу від функцій скінченної кількості змінних до величин, що залежать від нескінченної кількості змінних».

В нарисі 2 вже зазначалося, що задача Ньютона, на жаль, відразу не привернула до себе увагу математиків того часу. Загублена серед великої кількості задач, включених до «Математичних начал натуральної філософії» Ньютона, позбавлена яких би то не було вказівок на метод її розв'язання, вона не вплинула помітно на виникнення варіаційного числення. Останнє зазвичай датують 1696 р, коли Й. Бернуллі кинув виклик математикам на розв'язання поставленої ще Галілеєм задачі про брахістохрону.

3.1.1. Задача про брахістохрону

> *Якщо початкова та кінцева точки кількох рухів однакові та оскільки пряма є найкоротшою відстанню між ними, можна було б думати, що рух по прямій вимагає найменшого часу. Насправді це не так.*
>
> Г. Галілей

> *Велика книга природи написана математичними символами.*
>
> Г. Галілей

> *Я не можу утриматись від того, щоб ще раз не виразити свого подиву з приводу відміченої несподіваної тотожності між таутохроною Гюйгенса і нашою брахістохроною. Більш того, я вважаю за необхідне відзначити, що ця тотожність витікає із основного положення Галілея; вже з цього можна було б зробити висновок, що це положення знаходиться у погодженні із природою. Природа завжди діє найпростішим чином, як і у даному випадку вона за допомогою однієї і тієї ж лінії надає дві різні послуги*
>
> Й. Бернуллі

У 1696 р. в червневому зошиті книзі лейпцизького журналу «Acta Eruditorum» (стор. 269) Й. Бернуллі опублікував примітку «Нова задача, до розв’язання якої запрошуються математики». Це була задача про брахістохрону. Розв’язання цієї за словами Лейбніца «такої прекрасної досі нечуваної задачі» було дано самим Й. Бернуллі, Лейбніцем, Ньютоном, Я. Бернуллі і Лопіталем. Цікаво, що на розв’язання цієї задачі Й. Бернуллі дав піврічний термін, але за цей час розв’язання надіслав тільки Лейбніц. Тому за його пропозицією Й. Бернуллі подовжив термін до Великодня 1697 р. У цей термін задачу розв’язали Ньютон, Я. Бернуллі і Лопіталь.

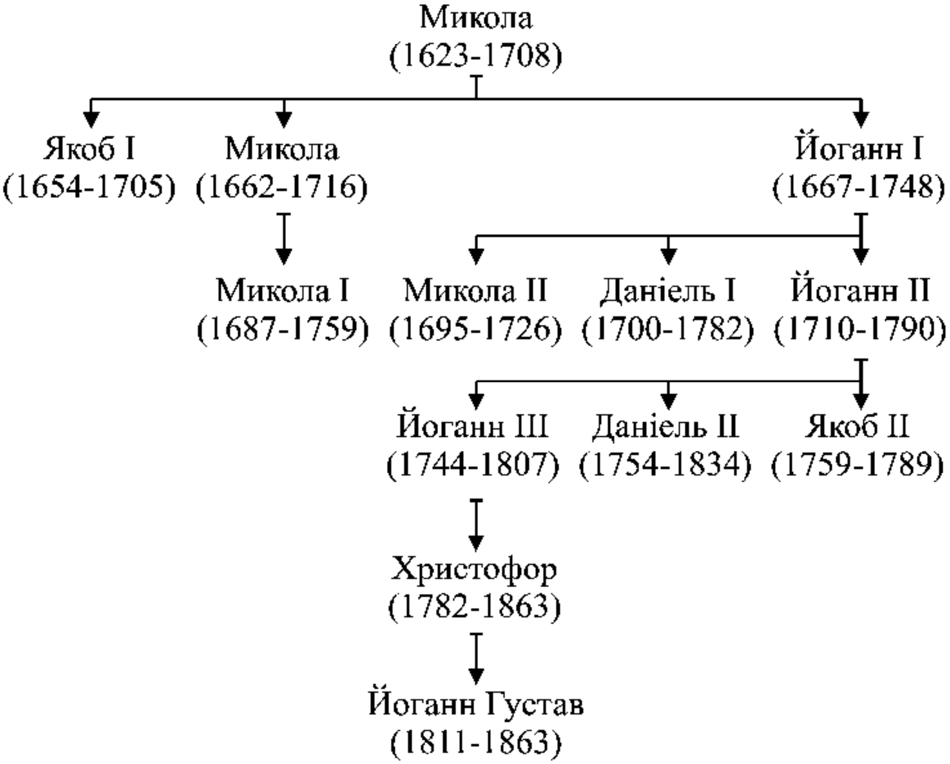

Готфрід Вільгельм Ле́йбніц,
нім. Gottfried Wilhelm
von Leibniz
(1646-1716)


Сер Ісаак Ньютон,
англ. Sir Isaac Newton
(1642 - 1727)


Гійом Франсуа Антуан де
Лопіталь,
фр. Guillaume François Antoine
de L'Hôpital (1661 – 1704)

Як бачимо, біля витоків варіаційного числення стоять відразу два представники сімейства Бернуллі – брати Йоганн та Якоб. Загалом три покоління цього славетного сімейства продовж XVII–XVIII століть дали світові дев'ять видатних математиків і фізиків. Цікаво, що серед представників сімейства Бернуллі четверо: Йоганн (1667-1748), його сини Даніель (1700-1782), Микола (молодший, 1695-1726) і племінник Даніеля – Якоб молодший (1759-1789), до речі, одружений на онуці Ейлера – були почесними членами і професорами математики і механіки Петербурзької Академії наук. Водночас представник родини Бернуллі протягом 105 років майже без перерви обіймав кафедру математики Базельського університету. Зазначимо, що з цієї родини походить Марія Бернуллі – перша дружина Германа Гессе.

Родинний зв'язок членів математичної сім'ї Бернуллі частково показаний на схемі.



Найвідомішими представниками сімейства Бернуллі є

- Бернуллі Якоб (1654—1708),
- Бернуллі Йоганн (1667—1748), молодший брат Якоба,
- Бернуллі Даніель (1700—1782), син Йоганна.

Якоб Бернуллі у 1683 р. почав читати лекції з фізики в Базельському університеті. У 1687 р. обраний професором фізики, а згодом і математики в цьому університеті. В тому ж році ознайомився з першим мемуаром Лейбніца (1684) з аналізу і почав освоєння нового числення. Звернувся з листом до Лейбніца із проханням пояснити кілька темних місць. Відповідь він отримав тільки через три роки, бо Лейбніц тоді був у відрядженні в Парижі. За цей час Якоб Бернуллі самостійно опанував диференціальне й інтегральне числення, а заодно долучив до нього брата Йоганна. Після повернення Лейбніц почав активно і плідно листуватися з обома. Сформований тріумвірат - Лейбніц і брати Бернуллі – 20 років очолював європейських математиків і надзвичайно збагатив новий аналіз.

Перший тріумфальний виступ молодого математика відноситься до 1690 р. Я. Бернуллі вирішив задачу Лейбніца про форму кривої, по якій важка точка опускається за рівні проміжки часу на рівні вертикальні відрізки. Лейбніц і Гюйгенс до того вже встановили, що це є напівкубічна парабола, але лише Я. Бернуллі опублікував доведення засобами нового аналізу, вивівши і проінтегрувавши диференціальне рівняння. При цьому вперше з'явився термін «інтеграл».

Я. Бернуллі зробив величезний внесок у розвиток аналітичної геометрії і зародження варіаційного числення. Його ім'ям названа лемніската Бернуллі. Він дослідив також циклоїду, ланцюгову лінію, логарифмічну спіраль. Я. Бернуллі мав також значні досягнення в теорії рядів, диференціальному численні, теорії ймовірностей та теорії чисел, де його ім'ям названі числа Бернуллі.

Він вивчив теорію ймовірностей за книгою Гюйгенса «Про розрахунки в азартній грі», в якій ще не було означення та поняття ймовірності (його замінює кількість сприятливих випадків). Я. Бернуллі ввів значну частину сучасних понять теорії ймовірностей і сформулював перший варіант закону великих чисел. Він підготував монографію в цій галузі, проте видати її не встиг. Монографія була надрукована посмертно у 1713 р. його братом Миколою, під назвою «Мистецтво припущень» (Ars conjectandi). Це є змістовний трактат з теорії ймовірностей, статистики та їхнього практичного застосування, підсумок комбінаторики і теорії ймовірностей XVII століття. Ім'ям Я. Бернуллі названий важливий в комбінаториці розподіл Бернуллі.

Окрім того, Я. Бернуллі розглядав задачу про форму кривої згину пружнього стержня. Якщо Галілей і Маріотт досліджували міцність балок, то Я. Бернуллі розв’язував задачу визначення їхніх прогинів[1]

Йоганн Бернуллі − найбільш знаний представник сім’ї Бернуллі, молодший брат і учень Якоба Бернуллі, провідний математик Європи XVIII ст., вчитель Г.Ф.А. Лопіталя, Даніеля Бернуллі і Л. Ейлера.

Після вивчення перших статей Лейбніца про методи диференціального та інтегрального числення, розпочав власні глибокі дослідження, результатом яких став змістовний конспект нового вчення, який складався з двох частин: числення нескінченно малих та інтегрального числення.

Й. Бернуллі сформулював три постулати (перша спроба обгрунтування аналізу):

---

[1] Первісний начерк підходу до цієї задачі був надрукований в журналі Лейбніца «Acta eruditorum Lipsiae» у 1694 р.; остаточне ж її трактування було поміщено автором в Histoire de l'Académie des sciences de Paris у 1705 р. Див. також [Собрание трудов И. Бернулли, т. 2., 1744, с. 976)].

1. Величина, зменшена або збільшена на нескінченно малу величину, не зменшується і не збільшується.

2. Будь-яка крива лінія складається з нескінченної кількості прямих, які самі є нескінченно малими.

3. Фігура, утворена двома ординатами, різницею абсцис і нескінченно малим куском будь-якої кривої, розглядається як паралелограм.

Пізніше Лопіталь при виданні свого підручника відкинув третій постулат як зайвий, що випливає з перших. У цьому ж 1691 р. з'явивилась перша друкована праця Й. Бернуллі в Acta Eruditorum. Він знайшов рівняння «ланцюгової лінії» (через відсутність у той час показникової функції побудова виконувалася через логарифмічну функцію). Одночасно докладне дослідження кривої дали Лейбніц і Гюйгенс.

У 1692 р. Й. Бернуллі отримав класичний вираз для радіуса кривизни кривої. У відповідь на лист Лопіталя повідомив йому метод розкриття невизначеностей, відомий зараз як «правило Лопіталя». Надрукував в Acta Eruditorum статтю «Загальний спосіб побудови всіх диференціальних рівнянь першого порядку». Тут з'явилися терміни «порядок рівняння» і «розділення змінних».

У 1696 р. Лопіталь видав у Парижі під своїм ім'ям перший в історії підручник з математичного аналізу «Аналіз нескінченно малих для дослідження кривих ліній» (французькою мовою), в основу якого була покладена перша частина конспекту Й. Бернуллі. Значення цієї книги для поширення нового вчення важко переоцінити не тільки тому, що вона була першою, але і завдяки ясному викладенню, прекрасному стилю, достатній кількості прикладів. Як і конспект Й. Бернуллі, підручник Лопіталя мав безліч додатків, власне, вони складали основну частину книги – 95%.

Практично весь викладений Лопіталем матеріал був взятий з робіт Лейбніца і Й. Бернуллі (авторство яких в загальній формі визнавалося в передмові). Втім Лопіталь додав і дещо зі своїх власних знахідок в галузі розв’язання диференціальних рівнянь.

Пояснення цієї незвичайної ситуації в матеріальних труднощах Й. Бернуллі після одруження. Двома роками раніше, у листі від 17 березня 1694 р. Лопіталь запропонував Й. Бернуллі щорічну пенсію в 300 ліврів, з обіцянкою потім її підвищити, за умови, що Й. Бернуллі візьме на себе розробку питань, які його цікавлять, і буде повідомляти йому і тільки йому свої нові відкриття, а також нікому не надаватиме копії своїх творів. Цей таємний контракт пунктуально дотримувався 2 роки, до видання книги Лопіталя. Пізніше Й. Бернуллі – спочатку в листах до друзів, а після смерті Лопіталя (1704) і в пресі – став захищати свої авторські права.

У 1696 році Й. Бернуллі опублікував задачу про брахістохрону, а у 1702 р. разом з Лейбніцем відкрив прийом розкладання раціональних дробів на суму найпростіших. Незадовго до смерті він опублікував свою переписку з Лейбніцем, яка представляє величезний історичний інтерес.

Інші наукові заслуги Й. Бернуллі полягають у постановці класичної задачі про геодезичні лінії і у знаходженні характерної геометричної властивості цих ліній, для яких пізніше він вивів диференціальне рівняння. У 1743 р. опублікував монографію «Гідравліка», де у дослідженнях успішно застосував закон збереження енергії.

Даніель Бернуллі, син і учень Й. Бернуллі, продовж багатьох років вів жваве корисне для обох листування з Ейлером. Опублікував серію важливих робіт про коливання струни. Д. Бернуллі, виходячи з фізичних міркувань, здогадався розкласти розв'язок у тригонометричний ряд. Він відзначив, що цей ряд не менш загальний, ніж степеневий. Одружений Д. Бернуллі не був. Його стосунки з батьком коливалися від натягнутих до ворожих, між ними не вщухали суперечки щодо пріорітету у дослідженях.

Найбільше Д. Бернуллі прославився працями в галузі математичної фізики і теорії диференціальних рівнянь – його вважають, поряд із Д'Аламбером і Л. Ейлером, засновником математичної фізики. Фізик-універсал, він грунтовно збагатив кінетичну теорію газів, гідродинаміку і аеродинаміку, теорію пружності. Він перший виступив з твердженням, що причиною тиску газу є тепловий рух молекул. У своїй класичній праці «Гідродинаміка» він вивів рівняння стаціонарного течії нестисливої рідини (рівняння Бернуллі), що лежить в основі динаміки рідин і газів. Д. Бернуллі пояснив з точки зору молекулярної теорії закон Бойля-Маріотта.

Д. Бернуллі належить одне з перших формулювань закону збереження енергії, а також (одночасно з Л. Ейлером) перше формулювання закону збереження моменту кількості руху (1746). Він багато років вивчав і математично моделював пружні коливання, ввів поняття гармонійного коливання, сформулював принцип суперпозиції коливань.

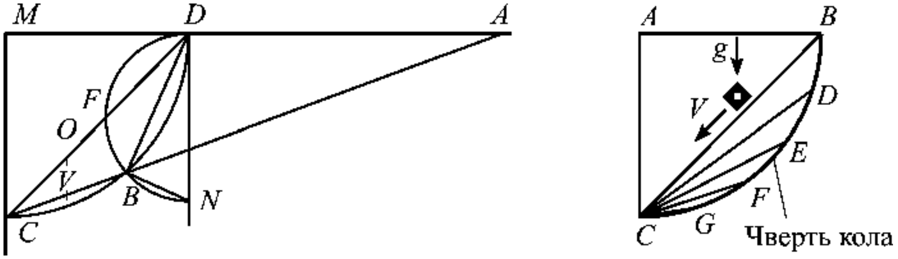
У математиці Д. Бернуллі опублікував низку досліджень з теорії ймовірностей, теорії рядів, чисельних методів і диференціальних рівнянь. Він перший застосував математичний аналіз до задач теорії ймовірностей (1768), до цього використовувався тільки комбінаторний підхід. Д. Бернуллі розвинув також математичну статистику, розглянувши низку практично важливих задач із застосуванням імовірносних методів.

Я́коб Берну́ллі,
нім. Jakob Bernoulli
(1655 - 1705)

Йоганн Бернуллі,
нім. Johann Bernoulli
(1667 - 1748)

Даніель Бернуллі,
нім. Daniel Bernoulli
(1700 - 1782)

Ще Галілей розглядав задачу, яка передує задачі про брахістохрону. Він вперше поставив цю відому задачу оптимізації і варіаційного числення про криву спуску в книзі «Бесіди і математичні доведення, які стосуються двох нових галузей науки, що відносяться до механіки і місцевого руху» у 1638 р. [Галилей, 1934]. Задача полягає у знаходженні не тільки екстремального значення функції і місця, де воно досягається, а й самої функції з умови екстремуму інтеграла від цієї функції і її похідних в межах даної області.



а *б*

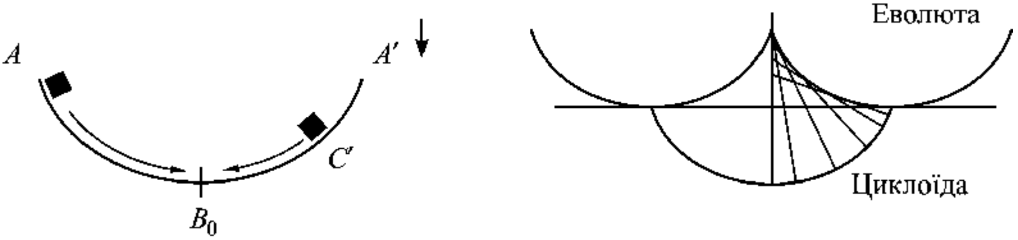
Рис. 1. *а* - знаходження точки *B* багатокутника для маси, яка ковзає вниз за припущення, що оптимальною кривою є чверть кола; *б* - порівняльні багатокутники в разі, коли наближеним оптимальним розв'язком є чверть кола

Галілей отримав експериментальні результати для часу ковзання: $t(BC) >$ $> t(BDC) > t(BDEC) > t(BDEFC) > t(BDEFGC)$, коли жолоб мав форму чверті кола (рис. 1). «Теорема XXII, пропозиція XXXVI: якщо з нижньої точки круга, розташованого над горизонтом, провести площину, яка відсікає дугу, меншу квадранта, і із кінцевих точок цієї площини провести до деякої проміжної точки дуги дві будь-які площини, то час падіння по цих двох останніх площинах буде меншим, ніж по одній первинній площині, і меншим, ніж по нижній із двох останніх площин». Тобто теорема Галілея стверджує лише те, що рух по дузі кола відбувається швидше, ніж по відповідній хорді або будь-якій вписаній ламаній лінії.

Галіле́о ді Вінче́нцо Бонаю́ті де Галіле́й.
італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei
(1564 – 1642)

Десь за 60 років проблема була вирішена аналітично різними методами Й. Бернуллі та іншими вченими, а шуканою кривою виявилась циклоїда загального вигляду.

Інші екстремальні властивості циклоїди (так звані таутохронні або ізохронні властивості) були встановлені Гюйгенсом і Ньютоном [Huygens, 1673] (рис. 2).



а б

Рис. 2. *а* - Таутохронна властивість циклоїди для маси, яка ковзає під дією сили тяжіння: проміжки часу T_{AB_0} і $T_{C'B_0}$ є рівними; *б* - Розгортка циклоїди є конгруентною циклоїдою

Христия́н Гю́йгенс,
нід. Christiaan Huygens
(1629 – 1695)

Ще однією дивовижною властивістю циклоїди є однаковість проміжків часу T_{AB_0} і $T_{C'B_0}$, необхідних для спуску маси з довільної початкової точки A і C' до точки B_0. Ця властивість була використана Гюйгенсом у його знаменитому фізичному циклоїдальному маятнику, який має сталу частоту при довільних амплітудах, і який реалізується за допомогою двох арок циклоїди, розташованих по різні боки від маятника (рис. 2, *б*). Нитка маятника при коливаннях торкається арок, в результаті чого зменшується її вільна довжина і забезпечується рух маси по циклоїді. Доведення можна знайти в [Huygens, 1673]; при цьому використовується рівність площ двох сегментів (рис. 3)

$$A_{ADE} = A_{ABH}\text{, оскільки } \mathrm{tg}\alpha = HB/GH = AF/FE. \qquad (1)$$

Для кращого розуміння викладеного корисно спочатку зробити стислий аналіз циклоїди (рис. 3 і 4).

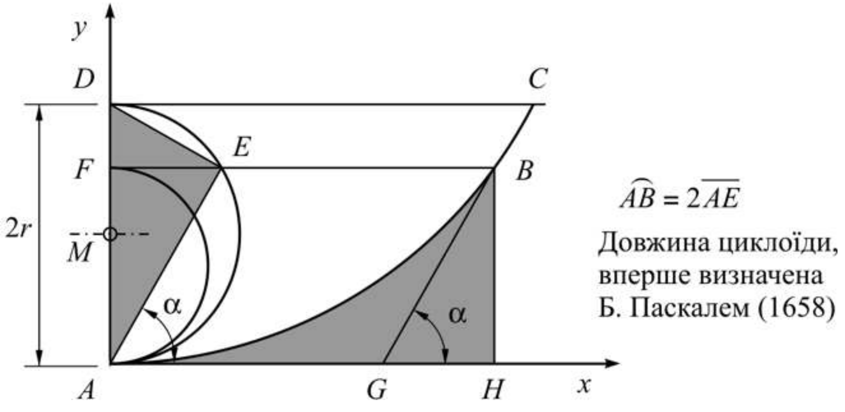


Рис. 3. Доведення таутохронності циклоїди з використанням сегментів рівної площі

Перші розрахунки площі і довжини дуги циклоїди були опубліковані Кавальєрі (1629).

Бонавентура Франческо Кавальєрі, італ. Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 – 1647)

Параметричне представлення:

координати	нормаль і радіус кривизни	1-а похідна
$x = r(\alpha - \sin\alpha)$	$\overline{PN} = n$	$\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ (2)
$y = r(1 - \cos\alpha)$	$\overline{PK} = \rho = 2n$	

Звичайне диференціальне рівняння циклоїди, Лейбніц (1686):

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sqrt{\frac{x}{c-x}};\ c = 2r;\ n = 2r\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\rho = 2n = 4r\sin\frac{\alpha}{2};\ \overset{\frown}{OS} = 4r. \qquad (3)$$

Подвоїна площа фігури OSR визначається за формулою (Паскаль):

$$2 \cdot A_{OSR} = \int\limits_{x=0}^{x=2\pi r} y\,dx = \int\limits_{0}^{t=2\pi} y\dot{x}\,dt = r^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = 3\pi r^2. \qquad (4)$$

Час ковзання до найнижчої точки циклоїди

$$T_{OS} = \int\limits_{0}^{L_S} \frac{dL}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_{\alpha_O=0}^{\alpha_S=\pi} \left(\frac{\sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{r(1-\cos\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} r\,d\alpha = \sqrt{\frac{r}{g}}\pi. \qquad (5)$$

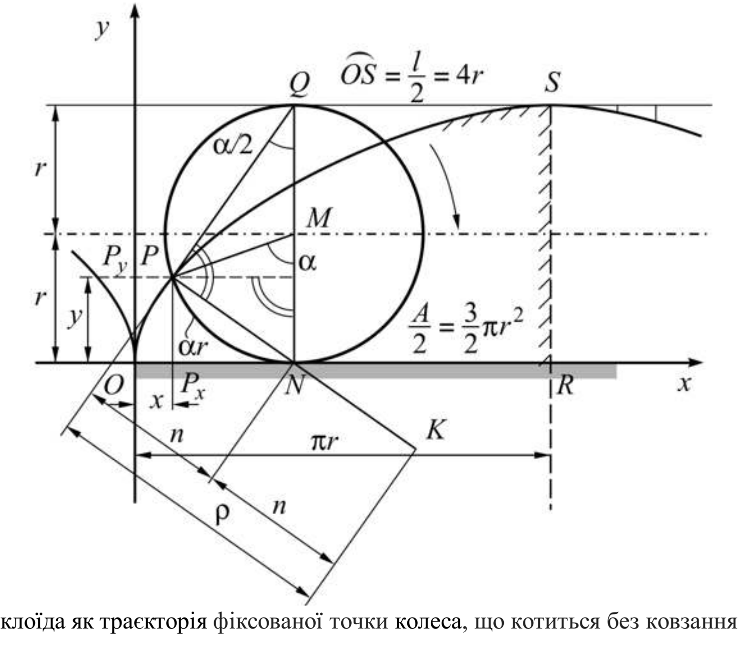


Рис. 4. Циклоїда як траєкторія фіксованої точки колеса, що котиться без ковзання по прямій

Наведемо сучасне варіаційне формулювання задачі про брахістохрону. У зв'язку з особливістю в точці $y=0$ при $t=0$ зручнішим є подання $x=f(y)$. Умова стаціонарності для шуканої екстремальної функції записується у вигляді (рис. 5)

$$T_{AB}=\int\limits_{t_A=0}^{t_B}\mathrm{d}t(y)=\min\,. \tag{6}$$

Оскільки швидкість змінюється за законом, (Галілей, 1638),

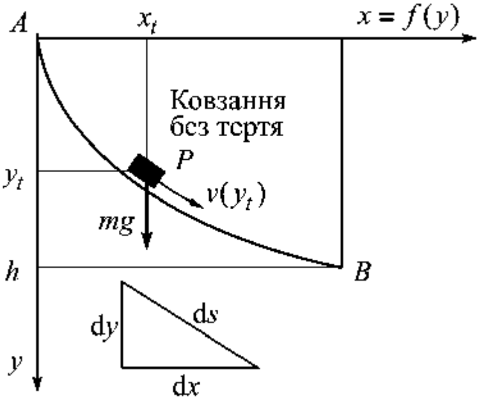


Рис. 5. Задача про брахістохрону

$$v(y)=\sqrt{2gy}\,, \tag{7}$$

то після використання співвідношень

$$v(y)=\frac{\mathrm{d}s(y)}{\mathrm{d}t},\ \ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s(y)}{v(y)},$$

$$\mathrm{d}s(y)=\sqrt{1+(x'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{8}$$

екстремальний принцип для нелінійного функціоналу, який неявно містить час, записується у вигляді

$$T_{AB}=\int\limits_{t_A=0}^{t_B}\frac{\sqrt{1+(x'(y))^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}y\rightarrow\min. \tag{9}$$

Його перша варіація має дорівнювати нулю згідно з умовою стаціонарності:

$$\delta T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_{y_0}^{y_1}\frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}}\delta x'\mathrm{d}y=0 \tag{10}$$

і визначає звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) циклоїди. Друга варіація, матриця Гессе, є основою для розв'язання за методом скінченних елементів з використанням, наприклад, лінійних пробних функцій для вертикальних координат $\eta=y/h$

$$\delta^2T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_{y_0}^{y_1}\delta\bar{x}'\left[\frac{1}{\sqrt{y(1+(x')^2)}}-\frac{(x')^2}{\sqrt{y(1+(x')^2)^3}}\right]\delta x'\mathrm{d}y. \tag{11}$$

Додатно визначена матриця Гессе обумовлює мінімум функціоналу T_{AB}.

Зазначимо, що заміна незалежної змінної, тобто $y=\tilde{f}(x)$ замість $x=f(y)$, через особливість у нулі призводить до варіаційної задачі зі складнішим диференціальним рівнянням.

Після цієї попередньої інформації з погляду сучасного варіаційного числення звернемося до перших розв'язань наприкінці XVII-го століття.

Як зазначалося, Йоганн Бернуллі ввів назву «брахістохрона» (що грецькою значить крива найкоротшого часу) для задачі Галілея і закликав у 1696 р. в Acta Eruditorum до її розв'язання впродовж одного року. В цілому було представлено і опубліковано в травні 1697 р. в Acta Eruditorum [Leibniz, 1697] сім рішень. В [Leibniz, 1697] і [Bernoulli, 1697] (див. також [Funk, 1970], [Stein, Wiechmann 2003]) були опубліковані такі 7 розв'язань:

- розв'язання Якоба Бернуллі – математично найважливіше, в якому вперше розвивалося варіаційне числення;
- два розв'язання самого Йоганна Бернуллі, в яких була проявлена неабияка геометрична і аналітична проникливість;
- два розв'язання Лейбніца, де введене поняття наближеного дискретного розв'язку і геометричне інтегрування ЗДР циклоїди;
- анонімне розв'язання Ньютона без доведення, яке було надане лише у 1724 р.;
- аналітичне розв'язання Лопіталя і Чірнхауса з неповним доведенням.

Йоганн і Якоб Бернуллі збагнули, що після розвитку числення нескінченно малих ця задача вимагає розвитку нового розділу аналізу. Якоб Бернуллі отримав ЗДР циклоїди за допомогою варіаційної задачі. Наче передбачаючи ідеї Ейлера про кусково-дискретні трикутні тестові функції для виведення першої варіації функціоналу, Я. Бернуллі представив подібний підхід ще у 1696/97 р. Відштовхуючись від відомої умови екстремуму функції $y=f(x)$ в деякій точці, тобто $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$, він реалізував цю ідею, досліджуючи екстремум функціоналу $T_{AB}=\int F[y,y']\mathrm{d}x=\min$ шляхом ділення часової області, параметризованої координатами $y_A=0$ і $y_B=2r$, набором рівновіддалених опорних точок y_i-h, y_i, y_i+h. Для апроксимації шуканої екстремальної функціїі, Я. Бернуллі застосував трикутні тестові функції, рис. 6.

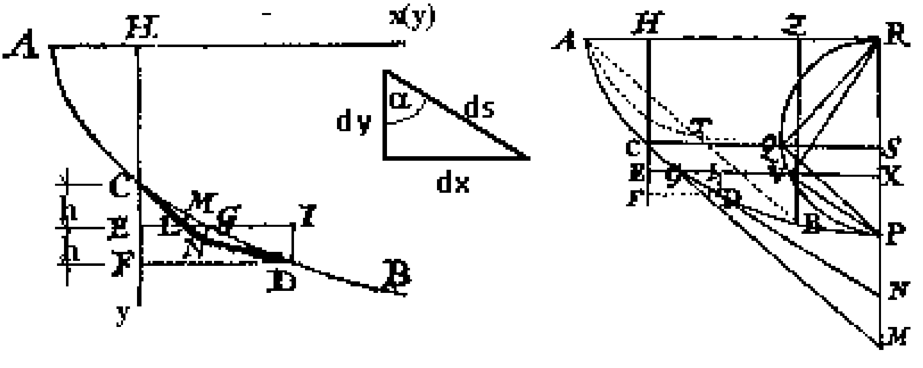


Рис. 6. Оригінальні рисунки Я. Бернуллі для варіаційного виведення циклоїди, опубліковані в Acta Eruditorum, травень 1697 р.

Очевидна дискретна умова стаціонарності для екстремального часу, яка полягає в рівності часу ковзання для шуканої екстремальної кривої і сусідніх тестових кривих для всіх інтервалів

$$t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}, \tag{12}$$

дає диференціальне рівняння циклоїди для граничного випадку $h \to 0$ оскільки

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \sim \frac{k}{\sqrt{y}}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\frac{y}{k^2 - y}}, \quad k^2 = 2r, \tag{13}$$

де r – це радіус кола, що котиться.

Ейлер при виведенні свого диференціального рівняння для екстремальної функції ізопериметричної варіаційної задачі у 1744 р. [Euler, 1744] використовував такий самий дискретний метод з рівновіддаленими опорними точками для знаходження екстремальної функції $y = f(x)$, яка надає мінімум функціоналу

$$\int\limits_{x=A}^{Z} F\left[y(x), y'(x), x\right]\mathrm{d}x = \min. \tag{14}$$

Ейлер отримав таке відоме ЗДР для загального випадку

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0 \text{ або } F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{y'} = 0 \text{ при } x = f(y) \tag{15}$$

в той час як Я. Бернуллі безпосередньо вивів диференціальне рівняння циклоїди як екстремальної функції задачі про брахістохрону.

Йоганн Бернуллі представив два дуже складних розв'язання, що поєднували геометричний та аналітичний досвід і глибоке знання теорії функцій. Обидва розв'язання наведені в роботі [Leibniz, 1697], див. також [Huygens, 1673], [Funk, 1970]. Перше розв'язання отримано за аналогією із задачею про найкоротший час проходження світла крізь середовище, щільність якого змінюється лінійно. З відповідної умови стаціонарності отримуємо закон Снеліуса

$$\frac{\sin\varphi(x)}{v(x)} = \mathrm{const}, \tag{16}$$

де $\varphi(x)$ - це кут між дотичною до кривої і віссю Oy (рис. 7), а v - це швидкість. Оскільки

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

то з урахуванням (7) вираз (16) можна подати у вигляді

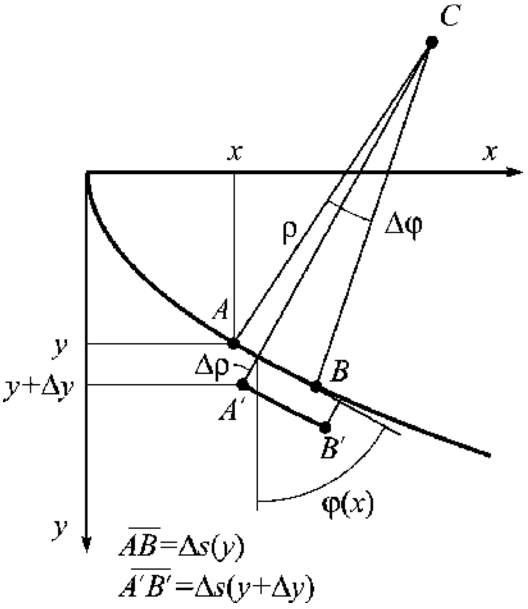


Рис. 7

$$\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}=C,$$

або

$$y'=\sqrt{\frac{C-y}{y}},$$

що є диференціальним рівнянням циклоїди.

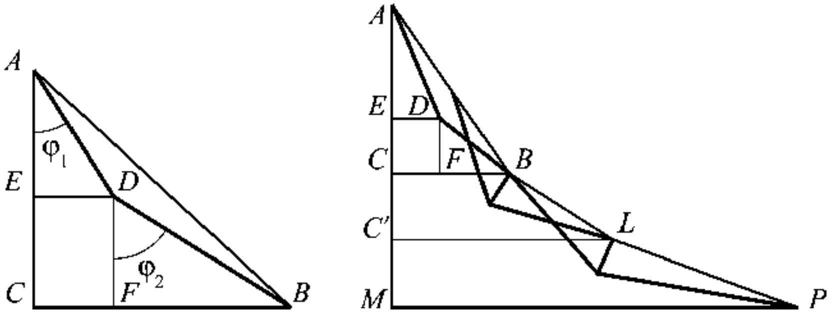
Друге розв’язання розглядає проблему брахістохрони, вводячи умову стаціонарності таким чином: час ковзання по ділянці шляху стаціонарного розв'язку має дорівнювати нескінченно малому приросту шляху (рис. 7), що в принципі збігається з критерієм Я. Бернуллі. Із умови стаціонарності дістанемо

$$\rho=\frac{2y}{\sin\varphi}\ \text{і}\ n=\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{\rho}{2}\ \text{при}\ \varphi=\frac{\alpha}{2}, \qquad (17)$$

що є характерною властивістю циклоїди. Таким чином, шуканий розв’язок визначено.

Лейбніц запропонував два дуже різні шляхи вирішення проблеми про брахістохрону [Leibniz, 1697]. Перший з них є дискретним геометричним інтегруванням ЗДР циклоїди за рахунок так званого «квадратріса», [Leibniz, 1676], на підставі його теореми трансмутації.

Друге розв’язання, викладене тут докладніше, є ескізом прямого чисельного методу, який являє значний інтерес як попередник методу скінченних елементів (рис. 8).



а *б*

Рис. 8. *а*) Дискретна умова стаціонарності: відрізки часу ковзання t_{AB} і t_{ADB} мають бути рівними, подібно до виведення Я. Бернуллі з дискретними опорними точками; *б*) ескіз Лейбніца дискретного варіаційного методу з рівновіддаленими опорними точками E, C, C' і трикутними (локальними) пробними функціями між цими точками

Лейбніц не надав деталей алгоритму розв’язання дискретної задачі (рис. 8, *б*), хоча Й. Бернуллі в листі просив його про це.

Дискретне розв’язання, отримане з використанням лише двох рівновіддалених «скінченних елементів», можна проілюструвати таким чином (рис. 9).

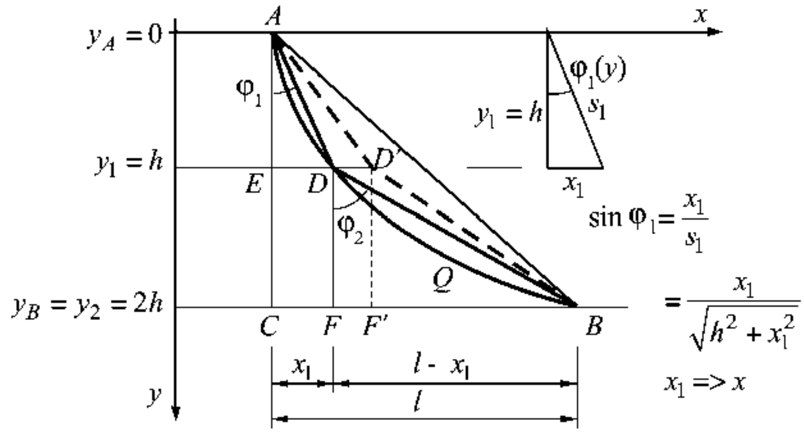


Рис. 9. Дискретний варіаційний алгоритм для задачі про брахістохрону з одним невідомим положенням вузла x_1, тобто двома рівновіддаленими «елементами» довжиною h

Неперервна задача на мінімум записується так:

$$T_{AB}=\int_A^B \mathrm{d}t=\int_{y_A}^{y_B}\frac{\mathrm{d}s(y)}{v(y)}=\int_{y_A}^{y_B}\frac{\sqrt{1+(x'(y))^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}y=\min_{x(y)}. \tag{18}$$

Тоді дискретна апроксимація з одним невідомим $x_1(y_1)$ має вигляд

$$T_{AB}=\frac{\overline{AD}}{v_{AD}}+\frac{\overline{DB}}{v_{DB}}=\frac{s_1}{v(h)}+\frac{s_2}{v(2h)}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{\sqrt{2gh}}+\frac{\sqrt{h^2(l-x)^2}}{\sqrt{2g\cdot 2h}}=\min_{x_h(y)}. \tag{19}$$

Із дискретної умови стаціонарності, яку Лейбніц не навів, можна отримати

$$\frac{\partial T_{AB}}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2gh}}-\frac{l-x}{\sqrt{h^2(l-x)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g\cdot 2h}}=0, \tag{20}$$

або

$$\frac{\sin\varphi_1}{v_1}-\frac{\sin\varphi_2}{v_2}=0. \tag{21}$$

Тобто маємо ті ж умови, що і в задачі оптики про найшвидший шлях світла.

З цієї умови отримуємо поліном 4-го степеня

$$f(x)=x^4-2lx^3+x^2(l^2+h^2)+2h^2lx-h^2l^2=0, \tag{22}$$

або враховуючи $\xi:=\frac{x}{l};\ \left(\frac{h}{l}\right)^2=\frac{1}{4}$, матимемо

$$f(\xi)=\xi^4-2\xi^3+\frac{5}{4}\xi^2+\frac{1}{8}\xi-\frac{1}{4}=0. \tag{23}$$

Лінійне наближення $x_{1,\mathrm{lin}}=0.5l$, а результати точного розв’язання

$$x_1=0.69l \tag{24}$$

Карл Генріх Шеллбах,
нім. Karl Heinrich
Schellbach
(1805 – 1892)

як першої апроксимації тільки двома елементами.

У 1851 р. К. Шелбах представив 12 дискретних розв’язань варіаційних задач в сенсі Лейбніца для задачі про брахістохрону з різними граничними умовами і для пов'язаних з нею задач в аналітичній формі, також за допомогою еквідистантних опорних точок [Schellbach, 1851], рис. 10. У цій статті під назвою «Probleme der Variationsrechnung», Шеллбах у вступі вказує: «Підстави для методів варіаційного числення Бернуллі, Ейлера і Лагранжа не можна поки що чітко зрозуміти», а також: «варіаційне числення є найабстрактнішою областю всієї математики».

З цього можна зрозуміти, що варіаційне числення і, зокрема, дискретне варіаційне числення ще не було добре відомо в математичному середовищі в середині XIX століття.

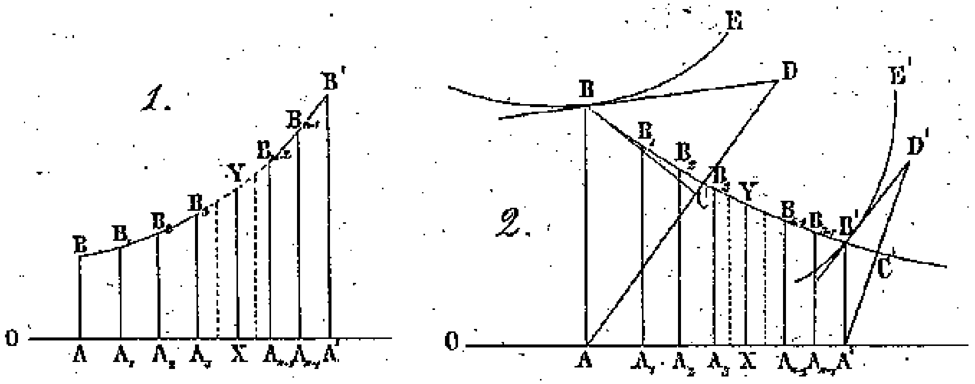


Рис. 10.1 і 10.2. Побудови з дискретного формулювання і варіаційної постановки задачі про брахістохрону К.Г. Шеллбаха з системою алгебраїчних рівнянь в рівновіддалених точках A, A_1, A_2, … , A' в аналітичній формі

У названій статті Шеллбаха розглядаються такі дискретні задачі.

1. Знаходження мінімальної площі багатокутника з фіксованими кінцями заданої довжини і ширини (рис. 10.1).

2. Знаходження мінімальної площі поверхні обертання з заданою довжиною дуги меридіана (рис. 10.1).

3. Задача про брахістохрону з узагальненими граничними умовами в B і B' (рис. 10.2).

4. Задача про брахістохрону в середовищі, що чинить опір (рис. 10.2).

5. Задача аналогічна 3 та 4, але за умови найбільшої або найменшої швидкості в кінцевій точці B'.

6.-12. Додаткові проблеми цього типу.

Чисельне розв’язання рівнянь Шеллбах приводить до систем нелінійних алгебраїчних рівнянь для розглядуваних задач. Це може вважатися першою спеціальною аналітичною версією методу скінченних елементів.

Наведемо розв’язання задачі про брахістохрону методом скінченних елементів.

Варіаційна задача про брахістохрону полягає в тому, щоб використовуючи подання $y = f(x)$, де y вертикальна координата, (рис. 11), знайти

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{\frac{1+(x')^2}{y}} \mathrm{d}y \to \min. \quad (25)$$

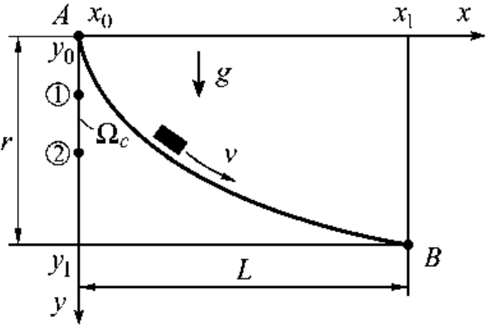


Рис. 11. Скінченноелементний аналіз задачі про брахістохрону

Перша варіація (умова стаціонарності) функціоналу має вигляд

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} \delta x' \mathrm{d}y = 0; \qquad x' = \frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}. \qquad (26)$$

Дискретизація лінійними скінченними елементами безрозмірної вертикальної координати $\eta = y / l_e$, яка відповідає параметризованій часовій змінній, реалізує оригінальну ідею Якоба Бернуллі і Лейбніца (рис. 12).

Лінійне скінченноелементне подання горизонтальної залежної від часу координати $x(\eta)$, $\eta = f(t)$ має вигляд

$$x_h = \sum_{I=1}^{2} N_I(\eta) x_I \quad \forall \Omega_e \subset \Omega \qquad (27)$$

із функціями форми

$$N_I(\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta_I \eta); \quad -1 \le \eta \le 1. \quad (28)$$

Перша варіація δx_h координати x_h записується таким чином

$$\delta x_h = \sum_{I=1}^{2} N_I(\eta) \delta x_I \quad \forall \Omega_e \subset \Omega. \quad (29)$$

Якщо підставити це в загальну умову стаціонарності часу ковзання (26) тепер вже дискретизованої нелінійної задачі з

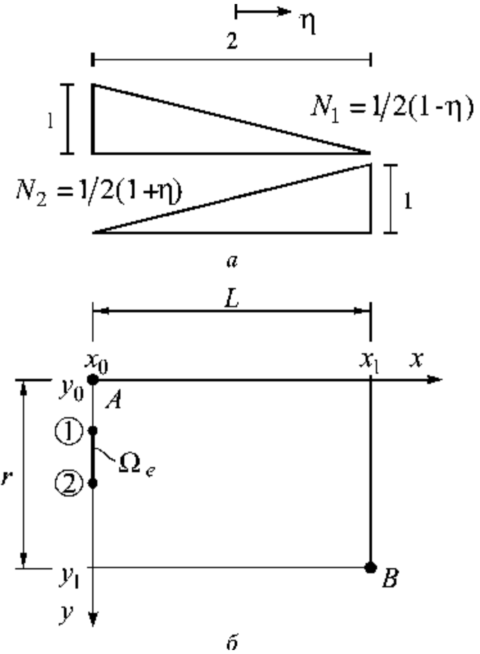


Рис. 12. Лінійні функції форми для скінченноелементної дискретизації задачі про брахістохрону

n_e скінченними елементами, $e=1,2,\ldots,n_e$, то треба провести ітераційне розв’язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для i-ї ітерації в матричному записі справедливо

$$\delta T_{h,i} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left[\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} N_{1,y} \mathrm{d}y \left| \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}} N_{2,y} \mathrm{d}y \right. \right] \times \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

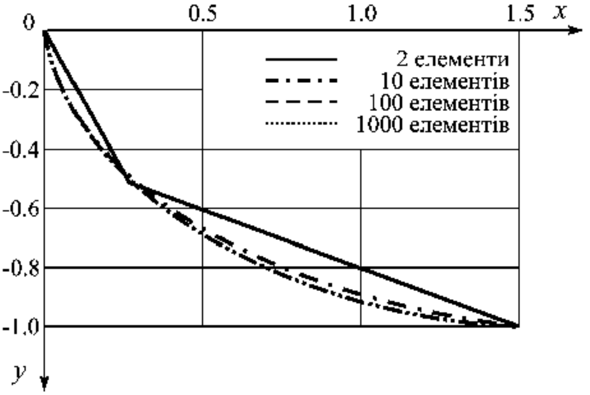


Рис. 13. Скінченноелементний розв’язок задачі про брахістохрону при чотирьох регулярних сітках елементів

З (30) знаходимо шукані вузлові координати $x_{h,k}(y_k)$ у рівновіддалених вузлових точках y_k шляхом поелементного чисельного інтегрування, а потім складання системи. Квадратична збіжність досягається із використанням другої варіації (матриці Гессе).

Результати при згущенні регулярної сітки елементів до $n_e = 1000$ елементів наведені на рис. 13. Для досягнення помилки в нормі L_2 меншої 1% необхідно близько 100 елементів.

Зазначимо, що у розв’язанні задачі про брахістохрону Й. Бернуллі (1697) йдеться одночасно про оптику і механіку, тобто про рух променя і важкої матеріальної точки. Вказавши на те, що Ферма отримав закон переломлення світла з принципу найкоротшого часу (при $v = \mathrm{const}$ принцип найкоротшого часу Ферма переходить в принцип найкоротшого шляху), Й. Бернуллі розглядає задачу про кривизну променя у неоднорідних прозорих середовищах. Й. Бернуллі відзначає, що «я, таким чином, одночасно розв’язав дві задачі – одну оптичну, іншу механічну, тобто я зробив більше того, що вимагав від інших... Раніше ніж закінчити, я не можу утриматись від того, щоб ще раз не висловити свого подиву з приводу відміченої несподіваної тотожності між таутохроною Гюйгенса і нашою брахістохроною. Більше того, я вважаю за необхідне зауважити, що ця тотожність витікає із основного положення Галілея; вже з цього можна було б зробити висновок, що це положення знаходиться у погодженні із природою. Природа завжди діє найпростішим чином, як і у даному випадку вона за допомогою однієї і тієї ж лінії надає дві різні послуги». Й. Бернуллі у даному разі має на увазі те, що як показав Гюйгенс, циклоїда, яка знаходиться у вертикальній площині так, щоб лінія її основи була горизонтальною і лежала вище діючого кола, має ту властивість, що з якої б точки на цій кривій тіло не почало спускатись, воно прийде у найнижче положення за один і той же час (таутохрона).

У 1907 р. Кнезер [Kneser, 1907.] заявив, що він виявив у листуванні Й. Бернуллі з Лейбніцем факти, які змінюють, на його думку, погляд на питання про виникнення варіаційного числення і змушують вважати Лейбніца, поряд з Й. Бернуллі, його творцем і навіть більше – творцем основ методу, розвиненого в перших роботах Ейлера з варіаційного числення і особливо в його «Methodus inveniendi».

Але подальше вивчення джерел показує, що твердження Кнезера явно перебільшені, особливо щодо випередження Лейбніцем робіт Ейлера. Дійсно, у листуванні Лейбніца з Й. Бернуллі поряд зі звичайними екстремальними задачами обговорювалися і задачі складнішого характеру. У листі до Й. Бернуллі від 6/16 травня 1695 р. [Leibnizens Mathematischen Schriften, herausgegeben von Gerhardt, I Abt., том 3, 1855, с. 175.] він з приводу ізопериметричної задачі і задачі про ланцюгову лінію пише: «Я бачу, що з'явилося і нове міркування щодо максимуму і мінімуму, цієї ще невичерпаної матерії». А в листі від 24 червня 1695 р.: «Задачі, в яких з усіх ліній вибирають одну, що має який-небудь максимум залежно від заданих умов, не повинні бути для тебе новими». З цих листів Лейбніца видно, що в них йдеться не про екстремальні задачі звичайного типу, коли потрібно визначити найбільшу або найменшу ординату даної кривої. Але більше того, потрібно виділити з сімейства кривих таку, яка обумовила б екстремум деякої величини, що задовольняє задану умову.

Лейбніц, мабуть, намагався застосувати методи диференціального числення до розв'язання варіаційних задач, але розв'язав він тільки задачу про брахістохрону, запропоновану йому Й. Бернуллі. Викладення застосованого ним методу можна знайти в одному з листів Лейбніца до Й. Бернуллі, в якому у відповідь на прохання останнього пояснити метод свого розв'язання він писав (31 липня 1696 р.) [Leibnizens Mathematischen Schriften, III, с. 310]: «Мій метод дещо відмінний від твого, але, проте, приводить до того ж; для того щоб, як вимагає справедливість, відповісти на твою відвертість тим же, то ось він в небагатьох словах.

Замінивши криву багатокутником з нескінченно великою кількістю сторін, я бачу, що з усіх можливих випадків (кривою) найлегшого скочування буде, якщо взяти на ламаній три які-небудь точки, або вершини *A*, *B*, *C*, причому точка *C* буде такою, що із всіх точок, розташованих на горизонтальній прямій *DE*, ця єдина дає найлегший шлях від *A* до *C*. Таким чином, справа зводиться до розв'язання легкої задачі: дано дві точки *A* і *C* і між ними проходить горизонтальна пряма *DE*, знайти на цій прямій таку точку *B*, щоб шлях *ABC* був найлегшим».

Отже, запропонований Лейбніцем метод полягає в тому, що крива на даному відрізку замінюється ламаною. Потім вибираються три суміжні вершини ламаної і розглядається, як має бути розташована на прямій *DE* (рис. 14) вершина *B* при нерухомо закріплених *A* і *C*, щоб падіння по ламаній *ABC* відбувалося за найкоротший час. Таким чином, варіаційна задача зведена до задачі на знаходження звичайного екстремуму. Інших варіаційних

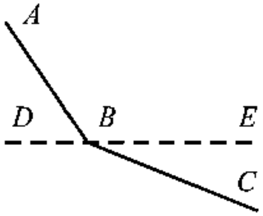


Рис. 14

задач Лейбніц не вирішував. Отже, Лейбніц ясно усвідомлював особливий характер варіаційних задач. Одну з простіших варіаційних задач – задачу про брахістохрону – він розв'язав і сформулював прийом, що зводить її до задачі на знаходження звичайного екстремуму функції. У неявному вигляді він застосував при цьому принцип, який зазвичай приписується Я. Бернуллі, що крива, яка має деяку екстремальну властивість, зберігає її і в будь-якій як завгодно малій своїй частині. Але в роботах Лейбніца немає методу розв'язання варіаційних задач, поставлених у загальному вигляді, в них немає навіть застосування загальних зауважень Лейбніца до скільки-небуть значного класу задач. Тому висновок Кнезера про те, що Лейбніц створив основи методу розв'язання варіаційних задач, є безпідставним.


П'єр Ферма́,
фр. Pierre de Fermat
(1601 — 1665)

Що ж стосується задачі про брахістохрону, то перше ж опубліковане її розв'язання, що належить Й. Бернуллі, не носило характеру розвитку ідей Лейбніца. Вона виникла як конкретна механічна задача і вирішувалася ще за допомогою фізичних і механічних аналогій. Ставлячи задачу про брахістохрону: «Визначити криву лінію, що з'єднує дві дані точки, розташовані на різних відстанях від горизонту, які не лежать на одній вертикальній лінії, і таку, що тіло, яке рухається по ній під впливом власної ваги і починає свій рух з верхньої точки, досягає нижньої точки в найкоротший час» [Бернулли, 1937, с. 23], Й. Бернуллі починає з того ж, про що говорив і Лейбніц. А саме, він справедливо зауважує, що ця задача, хоча і екстремальна, але особливого роду, і що до неї не застосовні звичайні методи знаходження екстремумів. Треба, втім, зауважити, що він тут же вельми невдало заявив, що було б марно шукати загальні шляхи вирішення подібного роду задач. Вперше задача була опублікована Й. Бернуллі в червневому числі Acta Eruditerum за 1696 р.

Керівною ідеєю в доведенні Й. Бернуллі є ідея оптико-механічної аналогії, яка грунтується на оптичному мінімум-принципі Ферма, висловленому останнім в 1657 р. у листі до Ляшамбра (1594–1669) [Oeuvres de Fermat, II, 354]. Й. Бернуллі уявляє собі, що промінь рухається від однієї точки до іншої в деякому середовищі зі щільністю, що неперервно змінюється. В такому разі шлях променя матиме вигляд не ламаної, а деякої кривої. Ця крива, яка в силу принципу Ферма є брахістохроною – кривою найшвидшого проходження променів, водночас є такою, що синуси кутів нахилу її до вертикальної лінії всюди знаходяться у відношенні швидкостей. Міркування так само повторюються, якщо йдеться не про промені світла, а про кульку, що падає по брахістохроні, і щойно згадана властивість брахістохрони не залежить від тієї чи іншої фізичної інтерпретації задачі. Отже, ця задача може бути вирішена у більш загальному вигляді, ніж поставлена.

Цю властивість брахістохрони Й. Бернуллі виражає диференціальним рівнянням таким чином. Нехай $M(x, y)$ (рис. 15) – довільна точка брахістохрони, крива *OHE* – «крива швидкостей», тобто така крива, ординати t якої визначають швидкості, що відповідають даній висоті. «Крива швидкостей» потрібна Й. Бернуллі на рисунку тому, що він розв'язував задачу в загальному вигляді, але в той час ще не мав інших засобів для вираження довільної функціональної залежності, крім як за допомогою довільної кривої. Тоді в характеристичному трикутнику $\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ і із властивості брахістохрони

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{t}{\alpha},$$

де $\alpha = \mathrm{const}$. Звідси (після підстановки $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$) дістанемо

$$\mathrm{d}y = \frac{t\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Для частинного випадку – падіння кульки, коли $t^2 = ax$, як рівняння брахістохронної кривої маємо диференціальне рівняння циклоїди:

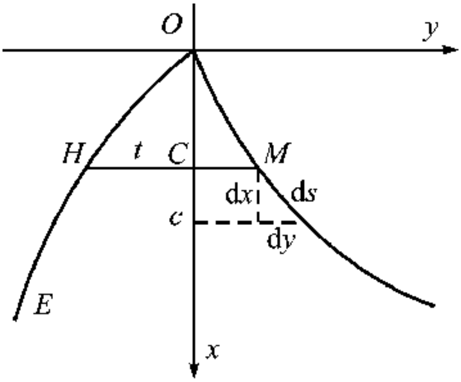


Рис. 15

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Інтегрування цього рівняння, яке доводить, що шукана крива дійсно є циклоїдою, Й. Бернуллі виконував за допомогою дуже наочних геометричних прийомів, які тут не наводитимемо.

З листа Й. Бернуллі до Базнажу, написаного у 1697 р. [Bernoulli, Opera omnia, 1742, I, с. 194.], видно, що одночасно з цим методом він знайшов і інший; перший метод публікувався тому, що він виявляв зв'язок між оптикою і механікою. Зауважимо, що ідея оптико-механічною аналогії в подальшому не мала розвитку аж до робіт Гамільтона у XIX ст. У цьому ж листі Й. Бернуллі згадує і іншу причину: другий відкритий ним метод «вів до важливих наслідків, якими деякі, які звикли хизуватися за рахунок інших, могли б тонко скористатися, щоб витягти з них якісь невеликі нові відкриття, чого було б для них цілком достатньо, щоб приписати собі володіння і всю славу відкриття». Цей інший метод був опублікований тільки у 1718 р.

Вже відмічалося, шо розв'язання задачі про брахістохрону в термін, запропонований Й. Бернуллі, представили Ньютон, Лопиталь і Я. Бернуллі. Слід вказати, що Ньютон дав відповідь анонімно і до того ж не наводячи самого доведення. Розв'язання Лопіталя (поміщене в тому ж зошиті «Acta Eruditorum», Mai 1697 р. де знаходяться і розв'язання обох братів) має ознаки знайомства з розв'язанням Й. Бернуллі (див., наприклад, зауваження Й. Бернуллі в його Opera omnia, I, с. 199-200).

Розв'язання Я. Бернуллі цікаве з погляду того, що воно є першою спробою застосування загальних ідей Лейбніца до вирішення конкретної варіаційної задачі. У ньому Я. Бернуллі дає по суті доведення тієї властивості брахістохрони, яким Й. Бернуллі скористався як готовим, запозичивши його з праць Гюйгенса і Ферма. Нарешті, в цьому розв'язанні вперше в явній формі висловлений вже згадуваний вище принцип, що крива, яка є екстремаллю вцілому, має бути екстремаллю і в кожній нескінченно малій своїй частині.

Наведемо розв'язання задачі про брахістохрону у сучасному формулюванні. Необхідно визначити криву, що з'єднує задані точки *A* і *B*, по якій матеріальна точка переміститься із *A* у *B* за найкоротший час (тертям і опором середовища нехтуємо).

Вважатимемо, що початок координат знаходиться в точці *A*, вісь *Ox* спрямована горизонтально, вісь *Oy* − вертикально донизу. Швидкість руху матеріальної точки $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2gy}$. Час, що витрачається на переміщення точки з положення $A(0,0)$ в положення $B(x_1,y_1)$, визначається за формулою

$$t[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x,\ y(0)=0,\ y(x_1)=y_1.$$

Оскільки цей функціонал належить до найпростішого виду і його підінтегральна функція не містить явно x, то рівняння Ейлера має перший інтеграл $F-y'F_{y'}=C_1$, або в даному разі

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C.$$

Після спрощень маємо $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C$ або $y(1+y'^2)=C_1$. Введемо параметр t, вважаючи $y'=\cot t$, і дістанемо

$$y=\frac{C_1}{1+\cot^2 t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t);$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{\cot t}=2C_1\sin^2 t\,\mathrm{d}t=C_1(1-\cos 2t)\mathrm{d}t;$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t)+C_2.$$

Отже, в параметричній формі рівняння шуканої лінії має вигляд

$$x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t),\ y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Змінюючи параметр за допомогою підстановки $2t = t_1$ і враховуючи, що $C_2 = 0$, оскільки при $y = 0$ маємо $x = 0$, дістанемо рівняння сімейства циклоїд у звичайній формі:

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \sin t_1),\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t_2),$$

де $\frac{C_1}{2}$ − радіус круга, що котиться. Радіус визначається з умови проходження циклоїди через точку $B(x_1, y_1)$. Отже, брахістохроною є циклоїда.

Й. Бернуллі ясно усвідомлював значення свого методу, який він знайшов одночасно з непрямим методом (заснованим на оптико-механічній аналогії) і про який він згадував у листі до Базнажу. Цей метод, на його думку, «вів до важливих наслідків». Особливо цікаво, що він вважав за необхідне довести синтетично, «як у стародавніх, що існує тільки одна крива, проведена з деякої точки в іншу, по якій важке тіло спускається в найкоротший час, і що ця крива є *звичайна циклоїда*[1] або, як називають її деякі, *рулетта*[1], що повністю спростовує думку одного математика першого рангу[2], який думав, що існує кілька кривих ліній, які можуть задовольнити необхідне»[3].

Наведені слова Й. Бернуллі певною мірою прояснюють одне зауваження Каратеодорі, який говорить, що в цій роботі Й. Бернуллі вперше зустрічається «дещо з теорії поля Вейєрштрасса». І дійсно, ідеї, закладені в ній, набагато випередили свій час. По-перше, ясно, що Й. Бернуллі ставить проблему єдиності і достатності отриманого розв'язку, що суперечить широко поширеній думці, ніби питання про достатність розв'язку і про розрізнення між максимумом і мінімумом аж до робіт Лежандра взагалі не цікавило математиків.

Крім того, можна вказати і на інші риси, що поріднюють розглядувану роботу Й. Бернуллі із сучасною теорією поля. Екстремаль-циклоїда представлена оточеною сімейством кривих, тобто по суті полем; а в разі заміни в синтетичному доведенні перпендикулярів до циклоїді синхронними[4] лініями, введеними самим Й. Бернуллі, ми мали б перший випадок розгляду трансверсалей.

К. Каратеодорі у 1904 р. в додатку до своєї докторської дисертації [Caratheodory, 1904] розглянув цей

Костянтин Каратеодори,
greek Κωνσταντίνος
Καραθεοδωρή
(1873 – 1950)

---

[1] Підкреслено Й. Бернуллі

[2] Чирнгаузен. Див. Acta Eruditorum, Mai 1967, стор. 221.

[3] Цит. по згадуваному листу Й. Бернуллі до Базнажу від 1697 р.

[4] Якщо з точки *A* по всіх можливих циклоїдах падає кулька, то геометричне місце точок, що досягаються кулькою за однаковий час, утворює криву, яку Й. Бернулли назвав *синхроною*.

метод Й. Бернуллі і застосував його до вирішення найпростіших задач варіаційного числення, вивівши за його допомогою диференціальне рівняння, відповідне рівнянню Якобі-Гамільтона. У 1937 р. він знову [Caratheodory, 1937] повернувся до цього чудового методу Й. Бернуллі, який «не привернув уваги його сучасників і залишався абсолютно невідомим протягом майже двох століть».

Останнє зауваження Каратеодорі про цілковиту невідомість розв'язання Й. Бернуллі протягом двох століть потребує уточнення. В одній роботі, що вийшла у 1856 р. в Парижі [Guiraudet, 1856.], з приводу цього методу Й. Бернуллі говориться: «Пізніше Й. Бернуллі опублікував інший розв'язок, який, як він казав, був методом відкриття. Це геометричний метод, чудовий за своєю витонченою простотою, який розглядає природу брахістохрони за способом її утворення. Я його не розглядаю, тому що він ніяк не стосувався загальних методів і не міг сприяти прогресу науки».

Така дивна на перший погляд точка зору стає зрозумілою, якщо взяти до уваги, що в той час Вейерштрасс ще не створив своєї теорії, що загальними методами тоді вважалися методи Лагранжа, які пізніше стали своєю чергою недосконалими і недостатньо загальними. З розвитком науки змінюються погляди на ті чи інші факти її історії, і геніальні думки великих вчених, що випереджають свій час, отримують гідну оцінку і подальший розвиток.

Вже зазначалося, що розв'язання задачі про брахістохрону, дане Я. Бернуллі, відрізнялося від непрямого розв'язання його брата Й. Бернуллі тільки тим, що Якоб вивів для нескінченно малої дуги брахістохрони закон, який Йоганн взяв як уже готовий із оптики.

Розгляд методів розв’язання задачі про брахістохрону обома братами Якобом і Йоганном Бернуллі, дозволяє зробити деякі зауваження щодо порівняльної характеристики їхньої творчості. Їхні наукові дослідження, особливо в частині розв'язання варіаційних задач, проходили в обстановці безперервного суперництва і пристрасних суперечок. Цим зовнішнім факторам, що сприятливо впливали на інтенсивність наукової творчості обох братів, часто приділялася непропорційно велика увага на шкоду аналізу змісту і методів їхніх досліджень. Один із прикладів такого ненаукового підходу до цього питання можна знайти в «Механіці» Маха [Мах, Механика, 1909, с. 362–363.]. «Без всякого ще методу, - пише Мах - за допомогою однієї своєї геометричної фантазії Йоганн Бернуллі одним поглядом вирішує задачу, вміло користуючись при цьому тим, що випадково вже відомо – картина справді чудова і напрочуд гарна. Ми повинні визнати в Йоганні Бернуллі справжню художню натуру, що діє в галузі природознавства. Брат його, Якоб Бернуллі, був науковим характером зовсім іншого роду. Йому було притаманно набагато більше критики, але набагато менше творчої фантазії. І він вирішив ту ж задачу, але набагато більш значущим способом. Але він скористався нагодою грунтовніше розвинути загальний метод вирішення задач цього роду. Отже, ми знаходимо в обох братів розділеними ті дві сторони наукового таланту, які в найбільших дослідників природи, яким був, наприклад, Ньютон, бувають поєднані з надзвичайною силою. Ці дві здібності, будучи пов'язані з двома різними особами, вступають одна з одною в запеклу боротьбу, яка за інших обставин могла б бути непомітно зжита в одній особистості».

Таке пояснення причин суперечки між братами Бернуллі навіть на перший погляд видається досить сумнівним. Перш за все, як вже зазначалося, розв'язання Якоба по суті зовсім не є в простому співвідношенні більшої важкості до розв'язання Йоганна. Зауважимо далі, що, з одного боку, як видно на прикладі синтетичного розв'язання Й. Бернуллі, він аж ніяк не чужий «критики» і пов'язаної з нею «важкості», з іншого боку, його брат Я. Бернуллі був зовсім не чужий наукової фантазії (як буде видно з подальшого), яку Мах вважає характерною для Й. Бернуллі. «Пояснення» Маха постає тому дуже поверхневим, як і сама його порівняльна характеристика творчості обох братів.

3.1.2. Ізопериметрична задача

Найпрекраснішим тілом є куля, а найкращою плоскою фігурою – коло.
Піфагор

Приклад наукової фантазії Я. Бернуллі, про який йдеться, стосується не задачі про брахістохрону, а складнішої варіаційної задачі – ізопериметричної. Ця задача вперше з'явилася в травневому зошиті «Acta Eruditorum» 1697 р. Поставив її Я. Бернуллі, який тільки но розв'язав задачу Й. Бернуллі про брахістохрону. Вихідний текст цієї задачі такий ([Ostwalds Rlassiker, № 46, 1894, с. 19.]) :

«З усіх ізопериметричних фігур з однією і тією ж основою *BN* треба визначити криву *BFN*, яка, хоча і не охоплює сама найбільшу площу, але сприяє тому, щоб цю властивість мала інша крива, ординати якої *PZ* як-небудь пропорційні степеням або кореням відрізка *PF* або дуги *BF*» (рис. 16).

Цю задачу крім деякої спільності теми мало що пов'язує з тим її елементарно-геометричним трактуванням, що зустрічалося у Зенодора. Вона з'явилася на шляху узагальнення екстремальних задач, яких багато розглядалося тоді в аналізі нескінченно малих. Сам Я. Бернуллі ясно говорить: «через ці дослідження я отримав доступ до розгляду інших, важливіших задач, якими є задачі про ізопериметричні фігури». Тут йдеться про розв'язання задач, в яких, за визначенням Я. Бернуллі, даним ним кількома рядками вище, треба «визначити із нескінченної множини незаданих кривих криву, що має властивість максимума або мінімума».

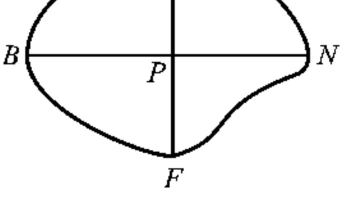


Рис. 16

Таким чином, безпосередньо після розв'язання найпростішої варіаційної задачі, в якому вже виявилася низка основних рис загального методу, згодом розвиненого Ейлером, була поставлена складніша варіаційна задача – ізопериметрична.

Спроби Й. Бернуллі розв'язати запропоновану йому задачу виявилися марними. Опублікована ним у вигляді листа до Варіньона [Bernoulli, Opera omnia, 1742, I, с. 206.] відповідь на задачу піддалася справедливій критиці Я. Бернуллі, що призвело до запеклої сварки між братами, яка тривала аж до смерті Я. Бернуллі у 1705 р.

Історики математики зазвичай не зупиняються на помилках великих математиків, хоча помилки в розвитку науки відіграють іноді не меншу роль, ніж отримані тими ж методами правильні результати. Вони змушують замислюватися над сутністю самих цих методів і визначати межі їх застосовуваності. Зокрема, хоча Й. Бернуллі визнав потім помилку, якої він припустився при розв'язанні ізопериметричної задачі, лише в дуже невизначеному і неконкретному вигляді, але із запропонованого ним потім удосконалення розв'язання, даного Я. Бернуллі, ясно, що він визнав висловлений його братом для задач цього типу принцип, згідно з яким, щоби задовольнити і додаткову – порівняно з найпростішою задачею – умову, треба варіювати не одну, а дві нескінченно близькі ординати шуканої кривої.

Полеміку між братами Бернуллі, наскільки вона стосувалася ізопериметричної задачі, по суті припинила поява у травневому зошиті 1701р. «Acta Eruditorum» розв'язання Я. Бернуллі.

У теперішній час ізопериметричними задачами у вузькому розумінні цього слова називаються задачі знаходження геометричної фігури максимальної площі при заданому периметрі. Серед таких екстремальних задач є і варіаційні задачі, наприклад, задача про знаходження замкненої кривої заданої довжини, що обмежує максимальну площу. Задаючи криву у параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, можна цю задачу сформулювати так: знайти екстремум функціонала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}\,\mathrm{d}t \quad \text{або} \quad S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\mathrm{d}t$$

за умови, що функціонал

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

зберігає стале значення:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = l\,.$$

Отже, ми маємо варіаційну задачу на умовний екстремум із своєрідною умовою: інтеграл $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$ не змінюється.

Останнім часом ізопериметричними називаються задачі значно ширшого класу, а саме задачі знаходження екстремуму функціоналу

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\mathrm{d}x$$

за умови виконання так званих ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\mathrm{d}x = l_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\ ,$$

де l_i – сталі, m може бути більше, менше, або дорівнювати n, а також аналогічні задачі для складніших функцій.

Ізопериметричні задачі шляхом введення нових невідомих функцій можна звести до задач на умовний екстремум. Позначимо

$$\int_{x_0}^{x} F_i\,\mathrm{d}x = z_i(x)\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\ ,$$

звідки $z_i(x_0) = 0$ і з умови $\int_{x_0}^{x_1} F_i\,\mathrm{d}x = l_i$ маємо $z_i(x_1) = l_i$. Диференціюючи z_i по x, дістанемо

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\ .$$

Тим самим інтегральні ізопериметричні в’язі $\int_{x_0}^{x_1} F_i\,\mathrm{d}x = l_i$ замінюються диференціальними в’язями

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, m\ .$$

Застосовуючи правило множників, можна замість дослідження на умовний екстремум функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F\,\mathrm{d}x$ за наявності в’язей $F_i - z_i' = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) досліджувати на безумовний екстремум функціонал

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\left(F_i - z_i'\right) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^*\mathrm{d}x\,,$$

де

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\left(F_i - z_i'\right).$$

Рівняння Ейлера для функціонала v^* мають вигляд

$$F_{y_j}^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_j'}^* = 0\,,\ j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$F^*_{z_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F^*_{z'_i} = 0\,,\ i = 1,2,\ldots,m\,,$$

або

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) F_{iy_j} - \frac{d}{dx}\left(F_{y'_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) F_{iy'_j} \right) = 0\,,\ j = 1,2,\ldots,n\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lambda_i(x) = 0\,,\ i = 1,2,\ldots,m\ .$$

Із останніх m рівнянь випливає, що всі λ_i є сталими, а перші n рівнянь співпадають з рівняннями Ейлера для функціонала

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i \right) \mathrm{d}x\,.$$

Отже, маємо таке правило: для визначення основної необхідної умови у ізопериметричній задачі про знаходження екстремуму функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F\,\mathrm{d}x$ за наявності в'язей $\int_{x_0}^{x_1} F_i\,\mathrm{d}x = l_i$ ($i = 1,2,\ldots,m$) треба розглянути допоміжний функціонал

$$v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i \right) \mathrm{d}x\,,$$

де λ_i − сталі, і записати для нього рівняння Ейлера. Довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера і сталі, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ визначаються із граничних умов

$$y_j(x_0) = y_{j0}\ \ y_j(x_1) = y_{j1}\,,\ j = 1,2,\ldots,n$$

та із ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i\,\mathrm{d}x = l_i\,,\ i = 1,2,\ldots,m\ .$$

Система рівнянь Ейлера для функціонала v^{**} не змінюється, якщо v^{**} помножити на деякий сталий множник μ_0 і подати його у вигляді

$$\mu_0 v^{**} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{m} \mu_i F_i\,\mathrm{d}x\,,$$

де введені позначення $F_0 = F$, $\mu_j = \lambda_j \mu_0$, $j = 1,2,\ldots,m$. Тепер всі функції F_i входять у підінтегральний вираз симетрично, тому екстремалі у вихідній варіаційній задачі і у задачі про знаходження екстремуму функціонала $\int\limits_{x_0}^{x_1} F_s \, \mathrm{d}x$ за наявності ізопериметричних умов $\int\limits_{x_0}^{x_1} F_i \, \mathrm{d}x = l_i$ $(i{=}1, 2, \ldots, s{-}1, s{+}1, \ldots, m)$ збігаються.

Ця властивість має назву *принципу взаємності*. Наприклад, задача про максимум площі, обмеженої замкненою кривою певної довжини, і задача про мінімум довжини замкненої кривої, що обмежує певну площу, взаємні і мають однакові екстремалі.

Наведене правило розв’язання ізопериметричних задач поширюється і на складніші функціонали.

Докладніше про задачі на умовний екстремум йдеться у нарисі 7.

3.1.3. Задача про геодезичні лінії

Геодезична – це крива нульової геодезичної кривизни.
П.О. Бонне

У листуванні Й. Бернуллі з Лейбніцем обговорювалося питання ще про одну екстремальну задачу, яка започаткувала вивчення геодезичних кривих. Крім того, що ця задача є задачею варіаційною і тому має згадуватися при викладенні історії варіаційного числення, вона становить неабиякий інтерес і з інших точок зору. З нею пов'язані остаточно ще не вирішені питання: про ранній метод знаходження основної властивості геодезичних Й. Бернуллі і про те, як могла бути розв'язана ця історично перша задача диференціальної геометрії в просторі ще до створення елементів аналітичної геометрії трьох вимірів. Задачу про геодезичні вперше поставив Й. Бернуллі, опублікувавши її 26 серпня 1697 року в «Journal desSavants» [Bernoulli, Opera omnia, 1742, I, с. 204]. За умовою задачі треба було геометрично знайти найкоротшу лінію між двома точками на опуклій поверхні. Як з'ясувалося в подальшому, вимогу «геометричності» Й. Бернуллі розумів в розширеному лейбніцевому сенсі, відповідно до якого достатнім для розв'язання задачі є зведення її до квадратур. Виставив же він цю вимогу з метою виключити можливе чисто механічне розв'язання шляхом натягування нитки між двома заданими точками поверхні. Інші додаткові зауваження Й. Бернуллі виключають з розгляду найпростіші випадки: випадок поверхні кулі (на якій геодезичними лініями є дуги великих кіл) і випадок, коли обидві дані точки розташовані на одному і тому ж меридіані поверхні обертання (бо відрізок меридіана між заданими точками і буде найкоротшою лінією, що їх з'єднує).

На жаль, зовсім не відомі ні той шлях, яким Й. Бернуллі вперше розв'язував задачу про геодезичні, ні отримане ним тоді диференціальне рівняння. Відомо достовірно лише, що він [Bernoulli, Opera omnia, 1742, I, с. 265] дорікав брату, який розв'язав задачу про геодезичні лінії для тіл обертання [Bernoulli, Opera omnia,

Рене Декарт,
фр. René Descartes
(1596 - 1650)

Філіпп де Лагір,
фр. Philippe de La Hire
(1640 – 1718)

1742, I, c. 257], за недостатню загальність результату і підкреслював, що сам має розв'язання з необхідним ступенем загальності.

Не зовсім зрозуміло, яким шляхом Й. Бернуллі виявив ту основну властивість геодезичних ліній, що їх дотична площина перпендикулярна до дотичної площини в тій же точці поверхні. Це питання пов'язане з питанням про те, чи вмів Й. Бернуллі, коли він вирішував задачу про геодезичні, писати рівняння поверхонь, чи були у нього хоча б елементи аналітичної геометрії в просторі.

Декарт в своїй «Геометрії», як відомо, обмежився по суті вивченням плоских кривих, і аналітичну геометрію в просторі довелося будувати абсолютно заново. Вперше рівняння поверхні з'явилося в одній роботі Ф. Лагіра 1679 р. Однак Лагір не зазначає, що отримане рівняння є рівняння поверхні, і просто вказує, що задача, яка привела до цього рівняння, невизначена. Наступна робота з цього питання відноситься до 1700 р. і належить вона А. Парану (1666 - 1716). Але справжні основи аналітичної геометрії у просторі були закладені роботами Ейлера у 1728 р. і Клеро у 1731 р. (див. [Декарт, Геометрия, 1938], там же – стаття А.П. Юшкевича «Декарт и математика»).

За таких обставин видається малоймовірним, що наприкінці XVII ст. Й. Бернуллі володів аналітичними методами вивчення поверхонь. Невідомо також, як Й. Бернуллі отримав диференціальне рівняння, про яке він писав Лейбніцу. З першоджерел ж існує лише одна робота Й. Бернуллі, опублікована у 1742 р. [Bernoulli, Opera omnia, IV, c. 108.], через 15 років після роботи Ейлера, який вирішив цю задачу. Автор, однак, стверджує, що це рішення у 1728 р. він повідомив Клінгенштірну, професору математики в Упсала, і що той лише виклав його. Листування Й. Бернуллі з Ейлером, зокрема, лист першого від 18 квітня 1729 р. дійсно містить в готовому і досить загальному вигляді рівняння геодезичних ліній, так що даний мемуар можна віднести в усякому разі до 1729 р.

Починається він прямо з виразу поверхні одним рівнянням між трьома координатами (et datur aequatio quaevis exprimens relationem trium coordinatarum x, y, z, qua relatione natura superficiei detenninatur). Все розв'язання спирається на висловлену (знову без доведення!) властивість геодезичних ліній поверхні (Fundamentum solutionis sequentis in eo consistit, quod planum per tria curvae quaesitae puncta infinite propinqua transiens, rectum sit ad planum quod superficiem curvam tangit). Полягає розв'язання в тому, що елемент кривої, який містить три нескінченно близькі послідовні точки, проектується на горизонтальну координатну площину *xOy*. Потім по черзі знаходяться у вигляді співвідношень між координатами і їхніми диференціалами тангенси двох кутів: а) кута між дотичною до поверхні площиною і проектуючою вертикальною площиною і б) кута цієї останньої з дотичною площиною геодезичної кривої. Оскільки внаслідок основної властивості геодезичних сума цих двох кутів дорівнює 90°, то добуток їхніх тангенсів має дорівнювати одиниці. Так виходить диференціальне рівняння, яке мають задовольняти геодезичні лінії на будь-якій поверхні. Потім Й. Бернуллі застосовує отримане рівняння до різних частинних видів поверхонь.

Якщо цей метод і є тим самим невідомим методом Й. Бернуллі, що відноситься до 1697-1698 рр., то виявляється значно раніше ніж вважається у Й. Бернуллі були початкові ідеї тривимірної аналітичної геометрії: представлення поверхні рівнянням з 3-ма невідомими, ідея координатної трійки осей для простору і т.д. Цьому хочеться вірити: Й. Бернуллі був оригінальним мислителем, блискучі ідеї якого часто випереджали свій час. Його творчий доробок ще не оцінений належною мірою; часто уявлення про нього вичерпується відомостями про сумнівну суперечку між братами.

Як би там не було, вивчення геодезичних кривих поповнило клас екстремальних задач, на основі розв'язання яких виникло варіаційне числення, і водночас сприяло розвитку аналітичної геометрії в просторі. Про значення задачі про геодезичні лінії для розвитку теорії достатніх умов екстремуму Якобі у варіаційних задачах йтиметься у нарисі 5

3.2. Прямий метод Ейлера

> *... став би думати будь-який натураліст, що він достатньо знає слона, якби він завжди вивчав цю тварину під мікроскопом.*
>
> А. Пуанкаре

Наприкінці XVII ст. варіаційні задачі отримали принципово нову постановку. До цього часу вже завершився поворот в математиці, пов`язаний з виникненням і становленням диференціального й інтегрального числення. Зокрема, диференціальне числення і його геометричні додатки набули такого розвитку, що в 1696 р. вже вийшла праця із загальним викладенням предмета: «Аналіз нескінченно малих» Лопіталя. Так само значними були успіхи у створенні інтегрального числення, у розв'язанні диференціальних рівнянь і т.д. В той же час формується загальне поняття функціональної залежності і з'являється термін «функція».

Настільки швидкий розвиток нових тоді методів диференціального й інтегрального числення обумовлювався, в першу чергу, їх тісним зв'язком з механічними, фізичними і геометричними задачами, які ставилися перед математикою бурхливо зростаючим виробництвом. Ці задачі вирішувалися не завжди за допомогою нових числень; наприклад, Гюйгенс і Ньютон вирішили низку задач, не дотримуючись форми і символіки числення флюксій або диференціалів. Але із розвитком і успішним застосуванням нових методів до розв'язання практичних задач їхня величезна перевага виявлялася все яскравіше.

Також з'явилися і утворили окремий клас екстремальні задачі особливої природи, які не вирішувалися методами аналізу нескінченно малих, що тільки з'явився. Виникли спеціальні методи розв'язання таких задач, які були ще індивідуальними і по суті не могли складати окремого числення. До таких задач належить насамперед задача Ньютона, поставлена і розв'язана ним в «Математичних началах натуральної філософії» (1687). Це задача знаходження кривої, що проходить через дві дані точки і при обертанні навколо даної осі утворює тіло обертання, яке зазнає найменшого опору рухаючись вздовж осі. Іншими варіаційними задачами були: задача про брахістохрону (1696) – криву найшвидшого спуску матеріальної точки із однієї точки простору в іншу; ізопериметрична задача (1697); задача про геодезичні лінії на поверхнях (1697). По суті в той час вже розглядалися і вирішувалися всі основні типи варіаційних задач, а в методах їхнього розв'язання проявлялися як загальні так і індивідуальні риси в залежності від характеру задачі.

Поставлені задачі були поступово розв'язані наприкінці XVII ст. – початку XVIII ст. Ньютон для поставленої ним задачі знайшов еквівалент диференціального рівняння в формі пропорції. Задача про брахістохрону була розв'язана Й. Бернуллі, а потім Ньютоном, Лейбніцем і Я. Бернуллі. Ізопериметрична задача і задача про геодезичні були розв'язані також одночасно кількома вченими. Методи розв'язання були недостатньо загальними, але в них з часом проявлялися загальні риси. За таких обставин задача систематизації отриманих наукових результатів і їх узагальнення стала не тільки актуальною, але й можливою. Для вирішення таких екстремальних задач складнішої природи необхідним було створення спеціальної дисципліни, вони потребували для свого загального розв'язання подальшого розвитку математичного апарату, створення нового числення – варіаційного. Варіаційні задачі з'явилися як конкретні фізичні і технічні задачі. Передовими вченими того часу ясно усвідомлювалася особливість їх математичної трактування, як екстремальних задач загальнішої природи, в яких шукаються екстремуми функціоналів (за сучасною термінологією). Із накопиченням розв'язаних варіаційних задач, все більше виявлялося і щось спільне, що об'єднувало ці різні за змістом задачі, і щось особливе, що виділяло їх з класу всіх взагалі екстремальних задач математичного аналізу. Складалося все більше передумов для створення варіаційного числення. І воно було


Леонард Ейлер,
нім. Leonhard Euler
(1707-1783)

створено на початку XVIII ст. Леонардом Ейлером (1707-1783), – швейцарським вченим, який провів більшу частину свого життя в Росії та Німеччині.

Ейлеру було дев'ятнадцять років, коли його вчитель Й. Бернуллі поставив йому задачу про брахістохрону в середовищі з опором. Потім ще додалася задача про найкоротші («геодезичні») лінії на поверхнях. Варіаційні задачі постійно були в полі зору Ейлера, і до 1732 р. у нього викристалізувався загальний метод розв'язання таких задач. Ще дванадцять років пішло на вдосконалення методу, і в 1744 р. з'явився підсумковий мемуар про розв'язання «ізопериметричної задачі в найширшому сенсі».

Загальний метод розв'язання варіаційних задач був вироблений в серії робіт Ейлера у 1726-1744 рр. Спочатку він, розглянувши методи розв'язання задачі про брахістохрону, поставив (1726) цю ж задачу за умови опору, що чиниться середовищем. У 1728 р. Й. Бернуллі, розуміючи всю важливість задачі про геодезичні лінії, запропонував йому зайнятися і цією проблемою.

У тому ж 1728 р. Ейлер знайшов загальне розв'язання цієї задачі - вивів диференціальне рівняння геодезичної лінії на поверхні. Незадовільна загальність і недостатність прийомів, застосовуваних при розв'язанні задач вже усвідомленого в своїй своєрідності класу, не задовольняли Ейлера. Він почав пошук загального методу і до 1732 р. знайшов його. У відповідній статті Ейлера «Загальне розв'язання ізопериметричної задачі, поставленої в найширшому сенсі» (Prohlematis isoperi-metrici in latissimo sensu accopti solutio generalis. Commentarii, (1732-1733) вперше з'являється загальна постановка варіаційної задачі. З перших же слів трактату видно, що Ейлер виділяє як предмет дослідження не окремі конкретні задачі, а побудову загальної теорії. В роботі вперше дається загальний метод розв'язання варіаційних задач, який потім протягом 12 років Ейлер тільки удосконалював, не торкаючись його принципових засад.

Ця робота Ейлера особливо цікава тим, що вона знаменує початок характерного для розвитку математичних числень діалектичного перевороту, коли розв'язання окремих задач починають розглядатися як додатки до загального методу. Останній же стає предметом числення.

Ейлер класифікує задачі, де шукаються, за його словами, криві, що мають екстремальні властивості. При цьому як екстремальну обрано властивість інтегралів частинних видів, взятих уздовж кривої, приймати максимальні або мінімальні значення.

Класифікація Ейлера:

а) з усіх взагалі кривих визначити таку, яка має екстремальну властивість A;

б) із сімейства кривих, що мають загальну властивість A, вибрати екстремаль відносно властивості B;

в) із сукупності кривих, що мають обидві властивості A і B, виділити екстремаль відносно властивості C і т.д.

Властивостями, або, як ми тепер кажемо, функціоналами, у Ейлера є інтеграли. Майже всі вони мають вигляд

$$\int f(x,y,y')\mathrm{d}x.$$

Метод грунтується на:

а) ідеї збереження екстремального значення властивості, коли елемент екстремалі замінюється елементом іншої близької кривої,

б) принципі Лейбніца-Я. Бернуллі, згідно з яким екстремаль зберігає свої екстремальні властивості у будь-якій своїй частині.

Метод полягає у варіюванні однієї, двох і т.д. (в залежності від виду задачі) ординат і в прирівнюванні значень властивостей відповідного елемента екстремалі до і після варіювання.

Через чотири роки (у 1736 р., опубліковано у 1741 р.) Ейлер узагальнив цей метод на інтеграли виду

$$\int_a^b Q(x,y,s,y',y'')\,\mathrm{d}x,$$

де

$$s=\int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Нарешті, до 1744 р. метод Ейлера став настільки загальним, що переріс у спеціальне числення, систематично викладене Ейлером в книзі «Метод знаходження кривих ліній, що мають властивості максимуму або мінімуму, або розв’язання ізопериметричної задачі, розглянутої в найширшому сенсі» («Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti»).

Ця робота Ейлера була підсумком майже п'ятнадцятирічної його роботи в галузі варіаційного числення. Тут Ейлер вперше з достатнім ступенем загальності виклав свій «метод максимумів і мінімумів в застосуванні до кривих ліній» і розв’язав за його допомогою як всі поставлені до нього варіаційні задачі, так і багато інших. Тому ця робота з повним правом може вважатися першою книгою з варіаційного числення. Крім того, ця книга є чудовим зразком для вивчення творчих шляхів Ейлера і має високі наукові якості.

Цікаво, що Ейлер написав видатні мемуари майже з усіх розділів математики і механіки. Список його праць нараховує 850 назв, серед яких низка багатотомних монографій. Крім того, лише частково опублікована його наукова переписка, що містить 3000 листів.

Досі можна зустріти курси з варіаційного числення, в яких задачі варіаційного числення «падають зі стелі», з'являються зовсім невиправдано і в абстрактній формі. Для Ейлера, хоча він міг ставити варіаційні задачі вже в загальному вигляді, така постановка питання є абсолютно чужою. Він прагнув кожного разу докладно пояснити і обґрунтувати будь-яке нове поняття, з'ясувати необхідність і справжній сенс кожного умовиводу. Формулюючи задачу, він не соромився іноді ставити її спочатку недостатньо виразно, з тим, щоб тут же навчити читача ставити її цілком правильно. У цьому природному підведенні читача до, здавалося б спочатку, важких і абстрактних питань полягає велике педагогічне значення творів Ейлера. Після кожного правила, кожної формули він наводив велику кількість чудово підібраних прикладів, щодо яких цілком справедливим є зауваження Якобі, що додавання до прикладів Ейлера нового по суті прикладу завжди є справжнім досягненням. Тому роботи Ейлера читаються легко і буквально приваблюють своєю ясністю і простотою.

У 1739 р. вийшла робота Ейлера «Tentamen novae theoriae musicae» з математичної теорії музики. З приводу цієї роботи ходив жарт, що в ній занадто багато музики для математиків і занадто багато математики для музикантів.

Подейкували, що Ейлер не любив театр і, якщо приходив туди, піддавшись на умовляння дружини, то, щоб не нудьгувати, подумки виконував складні обчислення, підбираючи їхній обсяг так, щоб вистачило до кінця вистави. Одного разу два студенти, виконуючи незалежно складні астрономічні обчислення, отримали результати, що трохи різнились між собою у 50-му знаку, і звернулися до Ейлера за допомогою. Ейлер провів ті ж обчислення подумки і вказав правильний результат.

Як вже зазначалося, в перших мемуарах з варіаційного числення Ейлеру вдалося узагальнити досвід вирішення варіаційних задач його попередників і, спираючись на нього, створити основи загального методу розв'язання цих задач. Навіть ще на початку останнього мемуара 1736 р. Ейлер говорить, що поява нових, важчих задач змушує його знову повернутися до теми і спробувати знайти більш загальні формули.

У «Methodus inveniendi» картина змінюється: вихідним пунктом є вже не окрема конкретна задача, а загальний метод вирішення численного класу варіаційних задач, що застосовується потім для розв'язання різних видів таких задач. Цей метод, який Ейлер називає «методом максимумів і мінімумів в застосуванні до кривих ліній», має своєю первісною найзагальнішою метою знаходження кривих ліній, «для яких будь-яка наперед задана величина досягає свого найбільшого або найменшого значення». Але в такій формі задача ще недостатньо виразно поставлена, і Ейлер її уточнює. Перш за все, сама постановка питання про вибір деякої кривої лінії змушує вказати, з якої множини кривих має обиратися шукана крива. Звідси природно випливає перша умова визначеності задачі: слід розглядати лише криві або частини кривих, що відповідають деякому певному, раз назавжди обраному, відрізку осі абсцис. Зауважимо, що Ейлер завжди обирає відрізок осі абсцис, що має своїм лівим кінцем початок координат. При цьому екстремаль можна вибирати як серед усіх взагалі кривих, що відповідають даному відрізку абсцис, так і серед тільки тих з них, які мають будь-які наперед вказані загальні властивості; внаслідок цього і «метод максимумів і мінімумів» Ейлер ділить на абсолютний і відносний.

Далі, оскільки йдеться про знаходження кривої, що має максимумом або мінімумом деяку властивість, то, отже, до уваги беруться предмети, до яких можна застосовувати поняття «менше» і «більше». Предмети такого роду Ейлер вважає величинами. Отже, властивість є величиною і величиною змінною, яка приймає для шуканої кривої екстремальне значення. Величина ж виражається числом і зображується, за Ейлером, формулою, яку він і називає «формулою максимуму або мінімуму». Таким чином, Ейлер приходить до того, що хоча мова і йде про криві, що мають певну властивість, але задача повинна допускати деякий аналітичний вираз. Ейлер і звертається до пошуків цього виразу. Йому при цьому ясно, однак, що аналітичний вираз, який відображає величину, про екстремум якої йдеться, не є простою функцією в звичайному розумінні слова. Терміна «функціонал» у Ейлера ще немає. Однак під його «невизначеною функцією» розуміється саме функціонал.

Якщо і у Ньютона, і у Лейбніца основні поняття аналізу визначалися ще, по суті, через поняття, запозичені з механіки і геометрії, то у Ейлера, навпаки, поняття механіки і геометрії набувають все більш і більш аналітичного трактування, аналіз же трактується - принаймні, за формою - незалежно від геометрії. По суті, і в «Methodus inveniendi» основну увагу Ейлер звернув на розробку аналітичного алгоритму вирішення варіаційних задач. Але специфічною рисою цієї роботи Ейлера є все ж геометричне формулювання не тільки основної задачі, але і методів її розв’язання. Сам Ейлер обґрунтовує це таким чином: «Хоча питання цього роду можуть стосуватися як абстрактних, так і конкретних величин, для нас буде найзручнішим вирішувати їх в застосуванні до кривих ліній».

Тепер нам відомо, що ця геометрична термінологія не випадкова і дійсно дає істотну користь у варіаційному численні. Її значення виходить за рамки наочності доведень. Тому висвітлення цієї сторони ейлерового методу, дане Кнезером, є хибним. Кнезер у своїй статті «Ейлер і варіаційне числення» протиставляє предметну точку зору (consideratio rerum ipsa-rum), яка розглядає безпосередньо самі речі тієї чи іншої конкретної природи, - алгоритмічній точці зору. Саме в цьому переході від вивчення конкретних речей до створення загальних алгоритмів він бачить відмінність між Лейбніцем і його попередниками. «Розгляд самих речей, - пише він, - при поверхневому судженні видається бажаною метою. Проте, якщо ми порівняємо лейбніцевське інфітезімальне числення з трактуванням задач у старших дослідників, так само як із повторюваними до наших днів поверненнями до долейбніцевого уявно елементарного трактування, то не може бути сумніву, що прогрес науки обумовлений тим, що місце предметного розгляду займає алгоритм; не тому, що нам приносить задоволення замінювати мислення механічним численням, але під тиском гіркої необхідності. «Оскільки саме в математиці, - каже Якобі, - справа зводиться до того, щоб нагромаджувати висновки на висновки, то буде добре зібрати в одному знакові стільки висновків, скільки можливо. Бо якщо після цього вдасться раз і назавжди обгрунтувати сенс цієї операції, то відчуття знаку буде замінювати всі міркування, які раніше доводилося щоразу повторювати спочатку».

Таку ж різницю, як між Лейбніцем і його попередниками, Кнезер знаходить в варіаційному численні між Ейлером і Лагранжем: «Ми знову виявляємо, - пише він, - між Ейлером і його послідовником Лагранжем протилежність, яку ми ясно бачимо між Лейбніцем і його попередниками». Насправді ж різниця між Ейлером і

Лагранжем полягає не у відмінності між предметною та алгоритмічною точками зору взагалі, але у відмінності самих алгоритмів. Алгоритм Лагранжа відрізняється від алгоритму Ейлера, він краще пристосований до вираження специфічності варіаційного числення. Але, з одного боку, і його можна виразити геометричною мовою, а з іншого, і ейлеровому алгоритму можна надати чисто аналітичну форму. Останнім часом варіаційне числення, збагачене новими методами функціонального аналізу, змогло в деякому сенсі повернутися до ідей Ейлера аж до геометричної форми міркувань (для гільбертового простору).

З метою повнішої характеристики роботи 1744 р. «Methodus mveniendi» зупинимося ще на двох моментах: на особливостях символіки і на причинах нестрогости застосовуваних методів. В перших роботах Ейлера часто через незручну символіку виходили досить громіздкі вирази. Першим кроком, зробленим Ейлером щодо поліпшення символіки, було введення спеціальних позначень для похідних, що дозволило відрізняти їх від виразів, які зображують співвідношення різних величин (також і цих похідних), що фігурують з задачі, залежно від зміни однієї або кількох ординат.

А саме, Ейлер вважає, що при $\mathrm{d}x = const$

$$\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}p = q\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}q = r\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}r = s\mathrm{d}x \quad \text{і т.д.}$$

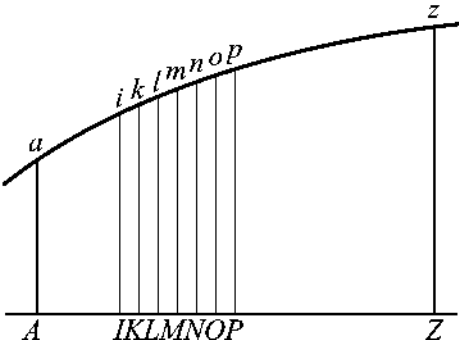


Рис. 17

Оскільки Ейлер замінює криву ламаною, у якої змінює одну або кілька сусідніх ординат, замінюючи до того ж послідовні похідні p, q, r і т. д. відношеннями скінченних різниць, то йому потрібні спеціальні позначення для послідовних похідних, які він і вводить таким чином.

Ейлер позначає $AM = x$, $Mm = y$ (рис. 17), ділить вісь абсцис на рівні частини $\mathrm{d}x = IK = KL = LM = \ldots$, а ординати у точках поділу позначає:

$Nn = y'$, $Oo = y''$, $Pp = y'''$ і т. д.

$Ll = y_{\prime}$, $Kk = y_{\prime\prime}$, $Ii = y_{\prime\prime\prime}$ і т.д.

Для значень похідних в послідовних точках осі абсцис при цьому маємо такі вирази

$$p = \frac{y' - y}{\mathrm{d}x},\quad p' = \frac{y'' - y'}{\mathrm{d}x},\quad p'' = \frac{y''' - y''}{\mathrm{d}x} \quad \text{і т. д.}$$

$$p_{\prime} = \frac{y - y_{\prime}}{\mathrm{d}x},\quad p_{\prime\prime} = \frac{y_{\prime} - y_{\prime\prime}}{\mathrm{d}x},\quad p_{\prime\prime\prime} = \frac{y_{\prime\prime} - y_{\prime\prime\prime}}{\mathrm{d}x}{}_{\prime\prime\prime} \quad \text{і т. д.}$$

Відношеннями скінченних різниць Ейлер замінює також похідні вищого порядку. Наприклад,

$$q = \frac{p' - p}{\mathrm{d}x} = \frac{y'' - 2y' + y}{\mathrm{d}x^2},\quad r = \frac{q' - q}{\mathrm{d}x} = \frac{y''' - 3y'' + 3y' - y}{\mathrm{d}x^3} \quad \text{і т. д.}$$

Вже та обставина, що Ейлер не апроксимує криву ламаною, а похідні - відношеннями скінченних різниць, а просто замінює одні іншими, природно повинна насторожити читача і поставити під сумнів строгість методів Ейлера. Дійсно, методи Ейлера з погляду сучасних вимог до наукової строгості, не завжди достатньо обґрунтовані.

Причини цієї нестрогості випливають із загального історичного місця і характера творчості Ейлера. У «Methodus inveniendi» Ейлер широко використовує весь арсенал прийомів і понять аналізу нескінченно малих, створених до нього. Він не входить тут у їхню сутність, не намагається їх обґрунтувати. Та й це не є його метою. Ейлер виходить з готового методу максимумів і мінімумів, намагається застосувати його до будь-якого виду варіаційних задач, узагальнює цей метод, раціоналізує, спрощує, тобто, всю свою увагу звертає на розробку варіаційного числення, як частини всеосяжного аналізу нескінченно малих, пов'язаної з іншими його частинами, і, в першу чергу, з екстремальними задачами для функцій багатьох змінних. Ці короткі зауваження стосуються пояснення причин недостатньої строгості методів варіаційного числення у Ейлера. Щодо строгого обгрунтування методів Ейлера, то спроби подібного роду, навіть для найпростішої задачі варіаційного числення, призводять до дуже складних і кропітких міркувань; якщо ж перейти до складніших задач, то і міркування ще більше ускладнюються.

Вже зазначалось, що постановка задачі у Ейлера в деякому розумінні є оберненою. Замість прагнення вирішити ще одну складну варіаційну задачу або цілий їх клас Ейлер висунув загальний метод знаходження кривих ліній, для яких будь-яка наперед задана величина досягає свого найбільшого або найменшого значення. Розглянемо суть цього методу.

Сформульована тільки що задача поставлена ще недостатньо чітко. Ейлер вводить такі умови визначеності:

а) задача ставиться і вирішується для одного і того ж відрізка осі абсцис;

б) вводяться два види екстремумів: абсолютний і відносний;

в) визначається вид функціонала як «невизначеної інтегральної величини»

$$\omega = \int_{x_0}^{x} Z(x, y, y', y'', \ldots)\,\mathrm{d}x. \tag{31}$$

Ідеї, покладені Ейлером в основу абсолютного методу максимумів і мінімумів, порівняно прості. Нехай необхідно серед усіх можливих кривих на відрізку $[x_0, x]$ вибрати таку $f(x, y) = 0$, щоб інтеграл

$$\omega = \int_{x_0}^{x} Z\,\mathrm{d}x$$

набирав екстремального значення. Будь-яку криву $y = y(x)$, визначену в деякій області значень $x_0 \le x \le x_1$ Ейлер замінює полігоном, абсциси вершин якого вибираються на осі Ox на рівних відстанях одна від одної. Це, на думку Ейлера, давало можливість з будь-яким ступенем точності апроксимувати криву.

«Інтегральну формулу максимуму і мінімуму»

$$I=\int_{x_0}^{x} Z(x,y,y',y'',...)\,\mathrm{d}x$$

він замінює сумою виду

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1} Z(x,y,y',y'',...)\,\mathrm{d}x,$$

де

$$\mathrm{d}x=\frac{x-x_0}{n},\ \ x_i=x_{i-1}+\mathrm{d}x,$$

а y_i – ординати в фіксованих точках x_i. Крім того, замінюючи похідні відношеннями скінченних різниць

$$y_i'=p_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{\mathrm{d}x};\quad y_i''=q_i=\frac{y_{i+1}'-y_i'}{\mathrm{d}x}=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{\mathrm{d}x^2},...$$

Ейлер домагається можливості розглядати значення формули максимуму або мінімуму для даної кривої як функції ординат:

$$I=F(y_0,y_1,y_2,...,y_n).$$

Потім розв'язується звичайна екстремальна задача: варіюється деяка довільна ордината y_ν різниця значень *I*, що відповідають незміненій і варійованій кривій, прирівнюється нулю. При цьому виходить диференціальне рівняння екстремалі.

Таким чином, Ейлер зводив розв'язання варіаційної задачі до розв'язання іншої задачі - про екстремум функції багатьох змінних (ординат). Цей метод у Ейлера став універсальним для будь-якого типу варіаційних задач і був основним для варіаційного числення в створеній спочатку Ейлером формі.

Нехай для простоти $z=z(x,y,y')$. Тоді $\int Z(x,y,y')\mathrm{d}x$ замінюється на

$$\sum_{i=0}^{n-1} Z\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Ордината y_ν набуває приросту на *nv*. Тоді у вказаній сумі зміняться тільки члени, що містять y_ν. Це

$$Z\left(x_{\nu-1},y_{\nu-1},\frac{y_\nu-y_{\nu-1}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\ \text{ і }\ Z\left(x_\nu,y_\nu,\frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Для обчислення їхнього приросту Ейлер диференціював *Z* по *x*, *y*, *p* і замінював диференціали $\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}p_i$ приростами відповідних величин x_i,y_i,p_i.

$$\mathrm{d}Z(x_{\nu-1},y_{\nu-1},p_{\nu-1})=M\mathrm{d}x_{\nu-1}+N\mathrm{d}y_{\nu-1}+P\mathrm{d}p_{\nu-1},$$
$$\mathrm{d}Z(x_\nu,y_\nu,p_\nu)=M'\mathrm{d}x_\nu+N'\mathrm{d}y_\nu+P'\mathrm{d}p_\nu.$$

Оскільки приріст отримує лише y_ν, то

$$\mathrm{d}x_{v-1} = \mathrm{d}x_v = \mathrm{d}y_{v-1} = 0, \quad \mathrm{d}y_v = +nv, \quad \mathrm{d}p_{v-1} = +\frac{nv}{\mathrm{d}x}, \quad \mathrm{d}p_v = -\frac{nv}{\mathrm{d}x}.$$

Отже, величина приросту

$$Z(x_{v-1}, y_{v-1}, p_{v-1})\mathrm{d}x + Z(x_v, y_v, p_v)\mathrm{d}x$$

буде

$$Pnv + N'nv\mathrm{d}x - P'nv.$$

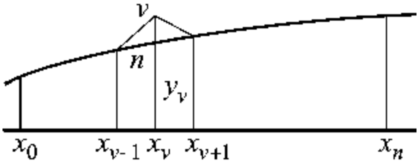


Рис. 3

Проте, пише Ейлер, «$P' - P = \mathrm{d}P$, а замість N' можна писати N». Тоді

$$Pnv + Nnv\mathrm{d}x - P'nv = 0$$

або

$$-\mathrm{d}P + N\mathrm{d}x = 0,$$

тобто

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0,$$

що у звичних для нас позначеннях означає

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y'}\right) = 0 \tag{32}$$

– дифференціальне рівняння Ейлера.

При поширенні на випадки, в яких підінтегральний вираз залежить від похідних вищого порядку, цей метод приводить до рівняння виду

$$N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3} + \ldots = 0. \tag{33}$$

За цим рівнянням закріпилася назва «рівняння Ейлера-Пуассона». Історично це неправильно, оскільки це рівняння було отримане і досліджене Ейлером задовго до народження Пуассона.

При цьому Ейлер не зупиняється перед можливістю необмеженого продовження цього ряду. Він лише зазначає, що диференціальне рівняння кривої завжди матиме порядок в два рази більший, ніж формула максимуму або мінімуму. З цього зауваження природно випливає умова, яка забезпечує визначеність задачі: серед усіх кривих, що проходять через $2n$ заданих точок, визначити ту, для якої $\int Z\mathrm{d}x$, де $Z = Z(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, був би максимумом або мінімумом.

Викладення методу, дане Ейлером, очевидно, не задовольняє вимоги сучасної наукової строгості. У ньому, зокрема, не обгрунтовані питання законності переходу до границі і перестановки граничних переходів. Не доведено також, чи дає границя екстремумів апроксимуючих функцій екстремум функціоналу. Однак слід пам'ятати, що для Ейлера вимоги наукової строгості в сучасному розумінні не могли і стояти. Крім того, дослідження зазначених питань привело б не тільки до знаходження диференціального рівняння екстремалі, а й до апроксимації розв’язку цього рівняння розв’язком системи звичайних рівнянь, що виходило за межі поставленої Ейлером задачі.

На великій кількості прикладів (понад 60) Ейлер продемонстрував силу свого методу. Розглядаючи варіаційні задачі (вже розв’язані раніше такі, як задача про брахістохрону, задача Ньютона і інші, і складніші задачі, які до того часу розв'язати не вдавалося), Ейлер записував для них відповідні диференціальні рівняння, а потім винахідливими шляхами розв’язував ці рівнянні.

Метод Ейлера розв'язання задач на відносний екстремум має на меті знаходження екстремалі не серед усіх кривих, визначених на даній ділянці осі абсцис, але серед деякого їх сімейства, кожна з кривих якого має одну або кілька властивостей. Якщо додаткова умова полягає в збереженні сталого значення іншого функціоналу-інтеграла (або кількох), то виходить узагальнена ізопериметрична задача. Ейлер зводить її до задачі на обчислення абсолютного інтеграла таким чином.

Щоб задовольнити відразу дві умови (якщо йдеться про криві, що мають одну загальну властивість) - незмінність значення загальної властивості B і формулу максимуму або мінімуму A, - необхідно надати приросту не одній, а двом сусіднім ординатам. «Диференціальні значення» обох властивостей матимуть в силу зміни двох ординат y_v і y_{v+1} (рис. 18) на nv і ow відповідно такий вигляд:

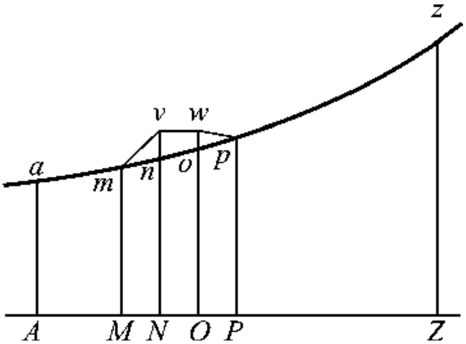


Рис. 18

$$\mathrm{d}A_v \cdot nv + \mathrm{d}A_{v+1} \cdot ow\,;$$

$$\mathrm{d}B_v \cdot nv + \mathrm{d}B_{v+1} \cdot ow\,.$$

Із заданих умов (екстремальності A і незмінності B) випливає, що обидва ці вирази треба прирівняти до нуля:

$$\mathrm{d}A_v \cdot nv + \mathrm{d}A_{v+1} \cdot ow = 0\,;$$

$$\mathrm{d}B_v \cdot nv + \mathrm{d}B_{v+1} \cdot ow = 0\,.$$

Після виключення з цієї системи двох рівнянь nv і ow Ейлер отримував рівняння шуканої кривої

$$\alpha \mathrm{d}A + \beta \mathrm{d}B = 0\ (\alpha = \mathrm{const},\ \beta = \mathrm{const}).$$

Таке ж рівняння виходить, якщо шукати криву, для якої вираз $\alpha A + \beta B$ досягає абсолютного екстремуму.

Описаний метод Ейлер поширив і на такі складніші випадки:

а) підінтегральна функція Z у виразі функціоналу сама є функціоналом;

б) підінтегральна функція задається за допомогою диференціального рівняння, спосіб розв’язання якого невідомий.

Такою, наприклад, у Ейлера була задача про брахістрохрону в середовищі, що чинить опір. Як показав Ейлер, тут йдеться про знаходження максимуму виразу

$$\int_0^l \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{v}}\mathrm{d}x$$

за умови

$$\mathrm{d}v = g\mathrm{d}x - hv^n \sqrt{1+p^2}\,\mathrm{d}x$$

При цьому він правильно вирішив питання щодо меж застосовуваності так званого принципу Лейбніца-Бернуллі про наявність екстремальної властивості в кожній точці екстремалі.

У книзі Ейлера наведено велику кількість прикладів, які ілюструють широту можливостей нового методу. В них продемонстрована практична цінність числення і встановлені його тісні зв'язки з механікою і фізикою.

Відзначимо виняткове багатство змісту трактату 1744 року [Эйлер, 1934] і стиль викладення, який дуже відрізняється від сучасних стандартів. Ейлер не обґрунтовує граничний перехід, за допомогою якого отримує рівняння (32), він не розглядає достатніх умов. Навіть проста умова (знак виразу $Z_{y'y'}$), яка дозволяє розрізняти, досягається на розв’язках рівняння (32) максимум чи мінімум функціоналу, знайдена лише у 1786 р. А.М. Лежандром. Замість цієї умови Ейлер кожен раз досліджує фізичний зміст задачі і з його аналізу робить висновок, буде розшукувана їм крива доставляти максимум чи мінімум. Взагалі треба підкреслити, що Ейлер дивиться на рівняння (33) не як па формальний алгоритм, який дозволяє мозку відпочити і замінити роздуми і аналіз конкретної задачі суто формальними операціями. Для Ейлера рівняння (33) тільки допомагає думати, і цінне тим, що дозволяє досить суттєво скоротити коло функцій, «підозрілих» щодо екстремуму функціоналу (31). Якщо рівняння (33) знайдено, функції, що доставляють екстремум (за умови, зрозуміло, що він існує), можна шукати тільки серед його розв’язків. Це різко зменшує коло пошуків, але не замінює повністю змістовного дослідження задачі суто формальними обчисленнями. До цього Ейлер і не прагнув.

Повертаючись до виведення рівняння (33), наголосимо ще раз, що фактично Ейлер зводить варіаційну задачу до задачі на звичайний екстремум *n* змінних з подальшим переходом до границі.

Іншими словами зв'язок задач і методів варіаційного числення із задачами класичного аналізу, тобто з дослідженням функцій *n* змінних можна описати таким чином. Розглянемо функціонал виду

$$J[y] = \int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x\,,\quad y(a) = A\,,\ y(b) = B\,.$$

Тут кожній кривій $y = y(x)$ ставиться у відповідність деяке число. Розіб’ємо відрізок $[a,b]$ точками

$$a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} = b$$

на *n* рівних частин і розглядатимемо замість кривої $y = y(x)$ ламану з вершинами

$$(x_0, A), (x_1, y(x_1)), \cdots, (x_{n+1}, B)\,,$$

а сам функціонал $J[y]$ наближено замінимо сумою

$$J(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{i=1}^{n+1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) \cdot h, \quad h = x_i - x_{i-1}. \tag{34}$$

Кожна ламана однозначно визначається ординатами $y_1, y_2, \cdots, y_n$ своїх вершин, а сума (34) являє собою функцію змінних $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Таким чином, варіаційну задачу можна наближено розглядати як задачу про знаходження екстремуму функції $J(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ n змінних. Саме цей прийом у варіаційному численні широко використовував Л. Ейлер. Замінюючи гладкі криві ламаними, він зводив задачу про знаходження екстремуму функціонала до знаходження екстремуму функції n змінних, а потім за допомогою граничного переходу при $n \to \infty$ отримував точні розв’язки.

Отже, функціонали можна розглядати як «функції від нескінченної кількості змінних», а саме значень функції $y = y(x)$ в окремих точках, а варіаційне числення – як відповідний аналог диференціального числення.

Ця ідея Ейлера лежить в основі прямих методів варіаційного числення, а також чисельних процедур дискретизації – варіаційно-різницевого методу, методу скінчених елементів (МСЕ) тощо.

Ейлер вирішив велику кількість механічних задач за допомогою створеного ним варіаційного числення. Він досліджував властивості пружних кривих, розв'язував задачі про згин пружної пластинки, про критичне навантаження колон, про рух в середовищах, які чинять опір, і в рідині. При цьому Ейлер вперше дав чітке математичне формулювання принципу найменшої дії, який в той час був в центрі уваги математиків, механіків і філософів:

$$\int mv\mathrm{d}s = \min.$$

Крім тих недоліків, які в XVIII ст. помітити було ще неможливо, у методі Ейлера був ще один – громіздкість. Недоліки методу Ейлера, громіздкого навіть для функціоналів, що залежать від однієї змінної, особливо різко відчувалися при дослідженні задач на екстремуми кратних інтегралів. Протягом кількох наступних років Ейлер наполегливо працював над пошуком зручного алгоритму.

3.3. Створення методу варіацій. Лагранж

Лагранж – найвеличніша піраміда математичних наук ...

Наполеон Бонапарт

Математик є бездоганним лише настільки, наскільки він є бездоганною людиною, наскільки він відчуває у собі прекрасне, притаманне істині, тільки тоді його творчість стає фундаментальною, чистою, ясною, натхненною, дійсно витонченою... Лагранж був ідеальною людиною і саме тому великою. Якщо ідеальній людині надані таланти, то вона завжди стає благом людства, носієм щастя і шляхетності, будь вона художником, дослідником природи, поетом або кимось іншим.

Й. Гете

Сьогодні чітко зрозуміло, в чому була складність у розв'язанні варіаційних задач: в певному сенсі вони були передчасними в аналізі XVIII століття. У той же час аналітики займалися в основному функціями однієї змінної і меншою мірою функціями кількох змінних. Однак криві, які з'являються у варіаційних задачах, не характеризуються скінченним набором параметрів. Фактично в цих задачах фігурують функції з нескінченним числом змінних, а це вже справа аналізу XX століття (функціонального аналізу).

Істотним недоліком методу Ейлера, як вже зазначалося, була його громіздкість. Уже в разі найпростішої задачі на екстремум інтеграла

$$\int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

для отримання відповідного диференціального рівняння Ейлеру доводилося виконувати складні обчислення. Виведення значно ускладнюється при переході до загальніших варіаційних задач.

Ейлер не розглядав у своїй книзі просторової задачі на екстремум інтеграла

$$\int_a^b f(x,y,z,y',z')\,\mathrm{d}x$$

і задач на екстремуми кратних інтегралів. А саме такі складні задачі виникали в практиці, і перш за все в механіці. При поширенні на ці задачі свого методу, досить громіздкого вже в найпростішому випадку, Ейлер зіткнувся зі значними труднощами. Він добре розумів необхідність вдосконалення математичного апарату. Так, розв'язуючи просторову задачу про рух рідини, він писав, що створений ним «метод достатньо розроблений тільки для фігур на площині». Ейлер продовжував шукати нові методи вирішення варіаційних задач. Він прагнув розв’язувати варіаційні задачі, використовуючи аналогію з диференціальним численням. Ейлер розумів, що йдеться про об'єкти загальнішої природи, про функції, що залежать від лінії (за сучасною термінологією, про функціонали).

І ось на ці більш загальні функції Ейлер хотів поширити основний принцип, за допомогою якого будується теорія екстремуму функцій скінченної кількості змінних: в точці екстремуму похідна дорівнює нулю.

У «Методі знаходження» Ейлер шукає метод, який дозволив би безпосередньо застосовувати апарат диференціального числення до розв’язання варіаційних задач.

Основне спостереження Ейлера полягало в тому, що криві, які є розв’язками ізопериметричних задач, відповідають розв’язкам деяких диференціальних рівнянь. У виведенні цих рівнянь Ейлер і вбачав основну задачу. Він діє дуже обережно, аби залишитися в рамках звичного аналізу: замінює криві ламаними (адже вони залежать від скінченної кількості параметрів, що характеризують вершини) і стежить за зміною відслідковуваної в задачі величини при зміні тільки однієї вершини.

Жозе́ф-Луї́ Лагра́нж, фр. Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Шукане диференціальне рівняння отримав французький математик Жозеф-Луї Лагранж (1736-1813), але шлях до нього був досить тернистим. 12 серпня 1755 р. Ейлер несподівано отримав листа від 19-річного туринця Жозефа Луї Лагранжа, який тут же, в листі, заповнив основні прогалини в міркуваннях Ейлера. У листі Лагранж повідомив Ейлеру про знайдений ним загальний аналітичний метод обчислення варіації інтеграла за допомогою інтегрування частинами. Цей метод ґрунтувався на введенні варіації функції і на поширенні на варіації правил диференціального числення.

На той час Ейлер вже був всесвітньо відомим вченим, а Лагранжу, зовсім ще юному викладачеві математики артилерійської школи в м. Турині, було дев'ятнадцять років, і він ще не опублікував жодної роботи. Ейлер негайно відповів на лист Лагранжа, і між ними почалося листування, що тривало багато років. У першому листі Лагранж обмежився викладенням свого методу. Він написав, що міг би вирішити окремі задачі новим методом, але для початку не звертається до частинних випадків. Ейлер гаряче схвалив новий метод, побачивши в ньому значний крок вперед, і закликав Лагранжа розвивати його. Вивчення робіт Ейлера і Лагранжа і їх листування виявляє абсолютно очевидно тісний зв'язок робіт Лагранжа зі створення методу варіацій з дослідженнями Ейлера.

Як напише Деламбр (1749-1822) (не плутати з Д’Аламбером), вірний друг і біограф Лагранжа, цей метод «не мав всієї тієї простоти, яка була бажаною в питаннях чистого аналізу». Ці слова, ймовірно, відображають думку Лагранжа. З рішучістю, притаманною молодості, він наважується привести повністю схему, розроблену для функцій, коли розглядається головна лінійна частина df приросту функції $f(x)$, що відповідає збільшенню dx аргумента x, і шукаються x, в яких d$f(x)$=0. Він розглядає функції від кривих - функціонали (зрозуміло, спеціального виду) $I(l)$, не лякаючись, що фактично це функції від нескінченного числа змінних. Для фіксованої кривої l Лагранж розглядає довільне мале «збурення» δl, визначає головну частину відповідного збільшення функціоналу δI і для визначення кривих, на яких $\delta I = 0$, отримує диференціальне рівняння, до якого Ейлер йшов кружним шляхом, і яке нині називається рівнянням Ейлера-Лагранжа. Зауважимо, що Лагранж завбачливо вводить нове позначення δ, яке схоже на позначення диференціала d, але відрізняється від нього. Вдало введене позначення суттєво допомагало справі.

Отже, Лагранж чітко ввів відмінність двох видів «диференціалів», закріплюючи символ d для позначення головної частини зміни функції за рахунок зміни аргументу і пропонуючи новий символ δ для зміни, обумовленої переходом від однієї кривої $y(x)$ до іншої, порівняльної. Замість того, щоб вгадувати співвідношення між величинами $\mathrm{d}\delta y$ і $\delta\mathrm{d}y$, як робив це Ейлер, допускаючи змішування двох видів «диференціалів», Лагранж вивів це співвідношення, спираючись на можливість перестановки символів d і δ (правда, не обґрунтувавши цю властивість). Таким чином, по-перше, Лагранж ввів новий символ – символ варіації (без назви) і довів можливість перестановки операцій диференціювання і варіювання:

$$\delta\,\mathrm{d}F(y)=\mathrm{d}\delta F(y),$$

$$\delta\mathrm{d}^2F(y)=\mathrm{d}^2\delta F(y) \quad \text{і т.д.}$$

і, по-друге, Лагранж запропонував, за аналогією зі звичайним диференціальним численням, прирівнювати нулю першу варіацію функціоналу J, вважаючи це необхідною умовою його екстремуму

$$\delta\int Z\mathrm{d}x=0, \quad \text{або} \quad \int\delta Z=0,$$

$$\delta Z=N\delta y+P\delta\mathrm{d}y+Q\delta\mathrm{d}^2y+R\delta\mathrm{d}^3y+\ldots,$$

де

$$N=Z'_y,\ P=Z'_{\mathrm{d}y},\ Q=Z'_{\mathrm{d}^2y},\ R=Z'_{\mathrm{d}^3y},$$

$$\int N\delta y+\int P\delta\mathrm{d}y+\int Q\delta\mathrm{d}^2y+\int R\delta\mathrm{d}^3y+\ldots=0.$$

Інтегрування частинами дає:

$$\delta\int Z=\int(N-\mathrm{d}P+\mathrm{d}^2Q-\mathrm{d}^3R+\ldots)\delta y+(P-\mathrm{d}Q+\mathrm{d}^2R-\ldots)\mathrm{d}\delta y+(Q-\mathrm{d}R+\ldots)\mathrm{d}^2\delta y+\ldots=0.$$

Оскільки усі криві починалися і закінчувалися в одних і тих самих точках, то усі позаінтегральні члени Лагранж прирівняв нулю і отримав відоме рівняння Ейлера

$$N-\mathrm{d}P+\mathrm{d}^2Q-\mathrm{d}^3R+\ldots=0.$$

Короткої інформації Ейлеру було достатньо, щоб оцінити всі переваги вдосконалень Лагранжа. Висока оцінка великого вченого окрилила початківця-математика.

Ейлер був вражений глибиною думки туринського початківця. Працюючи над основами варіаційного числення Ейлер прийшов до необхідності довести деякі співвідношення, які слугували вихідним пунктом в дослідженнях Лагранжа:

$$f_{y'}\mathrm{d}y' + y'\mathrm{d}f_{y'} = 0 \qquad (35)$$

або в позначеннях Ейлера

$$P\mathrm{d}p + p\mathrm{d}P = 0.$$

З цього приводу він сам висловлював невдоволення: «… Потрібен ще один метод, вільний від геометричних засобів розв'язання максимуму або мінімуму, треба замість $P\mathrm{d}p$ писати - $p\mathrm{d}P$» [Эйлер, 1958, с. 116].

Лагранж довів співвідношення (35), застосувавши інтегрування частинами, і таким чином отримав відсутню ланку в міркуваннях Ейлера, присвячених створенню нового варіаційного методу.

Д'Аламбер у зв'язку з цим пише: «Для того, щоб зробити помітнішими мотиви, що викликали захоплення Ейлера, яке він висловлював із благородною сумлінністю, було б корисно звернутись до джерел різних досліджень Лагранжа, на які він вказав нам за два дні до смерті. Перші спроби визначення максимумів або мінімумів усіх невизначених інтегралів робилися у зв'язку з кривою найшвидшого скочування та ізопериметрами Бернуллі. Ці дослідження переробив Ейлер, представивши загальний метод у оригінальній роботі, де усюди виблискує глибина володіння аналізом. Але, яким би геніальним не був цей метод, він не мав тієї ж простоти, якої можна було б бажати у роботі з чистого аналізу. Автор і сам це розумів, він вважав за необхідне знайти доведення незалежне від «Геометрії і Аналітики» [D'Alembert,1867]. Саме це і зробив Лагранж.

У листуванні Лагранжа з Ейлером обговорювалися постановки конкретних варіаційних задач, що поступово ускладнювалися, адже сила нового методу повинна бути продемонстрована шляхом розв'язання нових задач, недоступних старій техніці.

У листі до Ейлера від 20 листопада 1755 р. Лагранж розглянув задачу про брахістохрону в узагальненій постановці. Ейлер і його попередники розв'язували цю задачу за умови, коли матеріальна точка під дією сили тяжіння рухається з точки *A* в фіксовану точку *B*. Лагранж виходив з умови: матеріальна точка рухається із заданої точки *A* в яку-небудь точку на фіксованій кривій *Ф*. Як брахістохрону він отримав циклоїду, що перетинається з кривою *Ф* під прямим кутом. Тобто Лагранж розглянув задачу про брахістохрону з рухомим кінцем, коли кінцева точка екстремалі була не фіксованою, а могла належати деякій лінії, характер якої задавався граничними умовами (у сучасній термінології це так звані природні граничні умови). Потім Лагранж сформулював задачу про рух матеріальної точки під дією сили тяжіння з *A* в *B* через задану точку *C*. Ейлер у листі у відповідь вказав, що шукана крива має складатися з дуг циклоїди, так що кожен відрізок шляху точка пробігатиме за найкоротший час.

Лист Лагранжа відродив і у самого Ейлера цікавість до екстремальних задач. Ознайомившись з методом Лагранжа, Ейлер почав працювати над його удосконаленням і розвитком. У листах юного Лагранжа він знайшов те, що давно шукав. Вже у 1756 р. він робить в Берлінській академії два повідомлення, пов'язані з методом Лагранжа. У тому ж році Лагранж за поданням Ейлера був обраний іноземним членом цієї академії - рідкісна честь для молодого вченого, який ще не встиг опублікувати своїх праць (втім, в той час такому надавали менше значення, ніж в наші дні). Ейлер не поспішає публікувати свої нові результати, надаючи своєму молодому колезі можливість без поспіху підготувати до друку свою роботу. В листі від 2 жовтня 1759 р. Ейлер написав Лагранжу, що у нього є нові роботи з варіаційного числення, але він поки не хоче їх публікувати, щоб не знівелювати заслуг Лагранжа в цьому питанні.Він роз'яснює свою позицію в листі від 10 жовтня 1759 р.: «Твоє аналітичне рішення ізопериметричної проблеми містить, наскільки я бачу, все, чого тільки можна бажати в цій галузі, і я надзвичайно радію, що ця теорія, якою після перших моїх спроб я займався чи не один, доведена тобою до найбільшої досконалості. Важливість питання спонукала мене до того, щоб я за допомогою твого висвітлення сам вивів аналітичне розв’язання. Я, однак, вирішив приховувати це, поки ти не опублікуєш свої результати, тому, що я жодним чином не хочу забирати у тебе частину заслуженої тобою слави». Чудовий приклад наукової етики!

Першою роботою Лагранжа з варіаційного числення був «Досвід нового методу для визначення максимумів і мінімумів невизначених інтегральних формул» (Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrates indefinies. Miscellanea Taurinensia, (1760 1761, 1762).

У вступній частині Лагранж, крокуючи від «Методу знаходження» Ейлера, відзначає розділи книги, присвячені Ейлером пошукам нового методу. Безпосередньо за цим Лагранж в кількох реченнях викладає основи методу варіацій. Для розв’язання задачі про екстремум інтеграла Лагранж пропонує за аналогією з теорією екстремуму в диференціальному численні знайти похідну розглядуваного виразу і прирівняти її до нуля. Для знаходження похідної він вводить новий знак диференціювання δ. У разі найпростішої задачі про екстремум інтеграла

$$\int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

маємо

$$\delta\int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x=0 \quad \text{і} \quad \int_a^b \delta f(x,y,y')\,\mathrm{d}x=0.$$

Аналогічно до подання

$$\mathrm{d}f=f_y\mathrm{d}y+f_{y'}\mathrm{d}y' \tag{36}$$

Лагранж записує

$$\delta f=f_y\delta y+f_{y'}\delta y'. \tag{37}$$

Звідси він отримує

$$\int [f_y \delta y + f_{y'} \delta y'] \mathrm{d}x = 0 \tag{38}$$

і далі інтегрує частинами:

$$\int_a^b f_{y'} \delta y' \,\mathrm{d}x = f_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \right) \delta y \mathrm{d}x + f_{y'} \delta y \Big|_a^b = 0. \tag{39}$$

Підінтегральний вираз після прирівнювання до нуля дає шукане рівняння Ейлера

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0,$$

а позаінтегральні члени - умови для кінців кривої.

Так Лагранж надзвичайно просто вивів вже відоме диференціальне рівняння Ейлера для задачі на екстремум інтеграла $\int f(x, y, y')\mathrm{d}x$.

Метод Лагранжа дозволив простіше вивести рівняння Ейлера, поширити його на кратні інтеграли, а також розв’язувати задачі на екстремум не тільки з закріпленими, але й з вільними кінцями шуканої кривої.

У 1764 р. публікує свої результати і Ейлер, попереджуючи публікацію словами: «Після того як я довго і безплідно працював над вирішенням цього питання, я з подивом побачив, що в «Туринських записках» задача ця вирішена так само легко, як і щасливо. Це прекрасне відкриття викликало у мене тим більше захоплення, що воно значно відрізняється від даних мною методів і значно їх перевершує за простотою». Дещо дивує, що Ейлер не згадує про те, що передувало листуванню. Ейлер пропонує називати новий метод «варіаційним численням» за аналогією з диференціальним численням (δI називається варіацією).

Дії Ейлера були вельми своєчасними. Новий метод Лагранжа сприймався сучасниками досить прохолодно і не відразу був визнаним. Мемуари Лагранжа викликали сумніви і нерозуміння, про що писали Фонтен і Борда. Трохи згодом про це ж писав А. Крель в примітках до німецького перекладу курсу лекцій Лагранжа «Лекції про числення функцій». Частково це було пов'язано з надзвичайною стислістю викладення основних засад методу, частково з тим, що Лагранж вводив найважливішу формулу

$$\delta f = f_y \delta y + f_{y'} \delta y'.$$

просто за аналогією з відомою із диференціального числення формулою

$$\mathrm{d}f = f_y \mathrm{d}y + f_{y'} \mathrm{d}y'$$

і справедливість нової формули аж ніяк не була очевидною.

Лагранж ні при публікуванні свого методу, ні потім не з'ясував його сутності, він тільки стверджував, що його метод ґрунтується виключно на диференціюванні. Природно, виникали сумніви в можливості застосування диференціювання до нового кола задач.

Для розвитку і популяризації методу знову багато зробив Ейлер, який дав відповідь на всі ці питання і сумніви, пояснив суть нового варіаційного числення і розробив багато додатків методу, зокрема, Ейлер запропонував назвати новий алгоритм Лагранжа методом варіацій, а математичну дисципліну, що вивчає екстремуми інтегралів, - варіаційним численням. Так вона з того часу і називається.

«Числення варіацій, - писав Ейлер, - якісно нове, відмінне від диференціального числення...». І далі: «А криві, що нескінченно мало відрізняються від шуканої, найзручніше розглядати як такі, що з'являються при збільшенні або зменшенні ординат окремих точок шуканої кривої на нескінченно малі значення, тобто при варіації ординат. Звичайно досить здійснити таку варіацію для однієї єдиної ординати, але ніщо не заважає приписати такі варіації кільком або всім ординатам, оскільки завжди повинні прийти до одного і того ж розв'язку. Але при цьому не тільки більшою мірою виявляється сила методу, але виходять також повніші розв’язання питань такого роду...».

Порядок оперування варіаціями дуже близький до правил диференціювання; у них багато спільного, а найголовніша аналогія в тому, що в обох випадках до змінних додаються нескінченно малі прирости. Але не можна забувати й істотну різницю між двома численнями: «... коли мова йде про криву, яка порівнюється з дуже близькою до неї, то за допомогою диференціалів ми переходимо від однієї точки кривої до інших точок тієї ж кривої, тоді як, якщо перейти від цієї кривої до іншої, дуже близької до неї, і якщо цей перехід є нескінченно малим, то він здійснюється за допомогою варіацій...».

Таким чином, Ейлер роз’яснив незрозумілі твердження «диференціального числення» Лагранжа, що оперує символом δ. Варіації величин - δy означають не що інше, як нескінченно малі прирости величин y за рахунок переходу від однієї кривої до іншої, нескінченно близької.

Нагадаємо сучасні формулювання. Приростом Δx аргументу функції $f(x)$ називається різниця між двома значеннями змінної: $\Delta x = x - x_1$. Якщо x є незалежною змінною, то приріст x співпадає з диференціалом: $dx = \Delta x$. Аргументом функціонала є функція, тому у варіаційних задачах за приріст змінної приймається приріст функції. Отже, приріст аргументу функціонала це є різниця двох функцій $y(x)$ і $y_1(x)$, яка називається *варіацією* і позначається δy. Тобто $\delta y = y(x) - y_1(x)$, і δy є функцією змінної x. Цю функцію можна диференціювати один або кілька разів і $(\delta y)' = y'(x) - y_1'(x) = \delta y'$, тобто похідна варіації дорівнює варіації похідної. Аналогічно

$$(\delta y)'' = y''(x) - y_1''(x) = \delta y'' ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\delta y)^{(k)} = y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x) = \delta y^{(k)} .$$

Відзначимо істотну відмінність між δy і $\mathrm{d}y$. Обидві величини є нескінченно малими змінами функції y. Однак, до $\mathrm{d}y$ спричинюється нескінченно мала змінна $\mathrm{d}x$ незалежної змінної. Разом з тим, величина δy пов’язана зі зміною функції y та появою нової функції $y+\delta y$ (рис. 19).

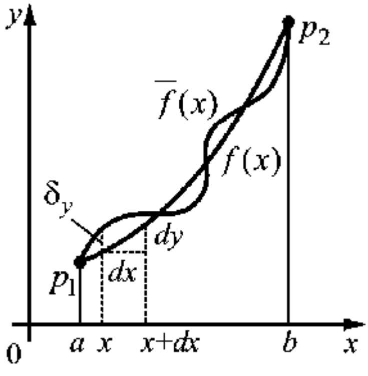


Рис. 19

Природа процесу варіювання є такою, що варіюється лише функція y, а варіювання незалежної змінної не відбувається. Тому завжди вважатимемо $\delta x = 0$.

Пояснимо думку Лагранжа докладніше. Щоб порівняти значення інтеграла $I(C)$ уздовж кривої C з його значеннями вздовж сусідніх кривих, Лагранж змінював функції $y{=}y(x)$, $z{=}z(x)$, що визначають криву C, додаючи до них величини $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ - їхні варіації. Якщо варіації в крайніх точках сегмента $[x_1, x_2]$, на якому розглядається задача, обертаються в нуль, то утворюються дві криві порівняння C і $C + \delta C$ зі спільними кінцями. Друга з цих кривих задається функціями $y(x) + \delta y(x)$, $z(x) + \delta z(x)$. З усіх можливих кривих порівняння тепер слід вибрати таку, щоб для будь-яких варіацій $\delta y(x)$, $\delta z(x)$

$$\Delta I = I(C + \delta C) - I(C) \geq 0.$$

Між варіаціями $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ і приростом функціоналу у варіаційному численні, з одного боку, і диференціалом незалежної змінної $\mathrm{d}x$ і диференціалом функції $y = f(x)$ в диференціальному численні, з іншого боку, є аналогія. Цю аналогію і виявив Лагранж. Вона дозволила йому застосувати у варіаційному численні алгоритми, аналогічні алгоритмам диференціального числення, і довести можливість перестановки символів d і δ , а також $\int$ і δ .

Після 1762 р. Ейлер в низці робіт дав докладне, вдосконалене і забезпечене прикладами викладення варіаційного числення.

У своїх роботах, опублікованих у 1766-1770 рр. [Дорофеева, 1961 с.124-129], зокрема в 3-му томі «Інтегрального числення» [Эйлер, 1958, с. 304 і наст.], Ейлер роз'яснював, що у варіаційному численні шукана крива, що надає екстремум, порівнюється із нескінченно близькою до неї кривою, причому варіації δy і $\delta \dot{y}$ є нічим іншим, як нескінченно малими приростами $y(x)$ і її похідної при переході від шуканої кривої до сусідньої. З'ясувалося, що в методі варіацій вивчається різниця між значеннями інтегралів, взятих на шуканій кривій і кривій, близькій до неї:

$$\vartriangle I = \int_a^b F(x, y + \delta y, \dot{y} + \delta \dot{y})\mathrm{d}x - \int_a^b F(x, y, \dot{y})\,\mathrm{d}x. \tag{40}$$

Розкладаючи цю різницю в ряд Тейлора, дістанемо:

$$\vartriangle I = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta \dot{y})\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy} \delta y \delta \dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}} \delta \dot{y}^2)\mathrm{d}x + \ldots,$$

причому величини першого порядку малості відносно δy і $\delta\dot{y}$ складають першу варіацію інтеграла:

$$\delta I = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y}) \mathrm{d}x, \tag{41}$$

і величини другого порядку малості - другу варіацію $\delta^2 I$. Для того, щоб на деякій кривій $y(x)$ інтеграл набирав екстремального значення, необхідно, щоб на цій кривій перша варіація інтеграла дорівнювала нулю. З умови $\delta I = 0$, інтегруючи частинами другий член у формулі (38), знову отримуємо рівняння (32). Так було отримано вихідне для міркувань Лагранжа співвідношення $\int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y}) \mathrm{d}x = 0$, яке він отримав простим диференціюванням. Таким чином, Ейлер з'ясував сутність методу варіацій. Нове числення вже не виглядало як таємниче диференціювання, яке невідомо чому дає правильні результати для варіаційних задач.

Вивчення знаку другої варіації дозволило в подальшому проаналізувати достатні умови екстремуму (31). Дослідження другої варіації стало новим етапом у розвитку варіаційного числення.

В одній з робіт (1771) Ейлер дав варіаційному численню нове тлумачення. Воно тепер могло сприйматися як метод вибору із однопараметричного сімейства кривих такої кривої, яка реалізує деяку екстремальну властивість. Це тлумачення істотно зближує варіаційне числення з диференціальним численням. Однак воно ще не стало досить загальним в зв’язку з тим, що в ньому не розглядалися вказані ще Д. Бернуллі випадки, коли нескінченно малі переміщення точки вздовж кривої супроводжуються скінченними відхиленнями дотичних («сильні варіації»).

Таким був науковий дебют Лагранжа. В одному відношенні він унікальний. Відомі й інші приклади, коли великі математики отримували перші великі результати в тому ж віці, що й Лагранж. Однак при цьому йшлося зазвичай про вирішення конкретних задач. Інтерес же до вдосконалення методу як такого приходить з роками. Ми ж бачимо, що вже в першій роботі Лагранжа проявилося те, що буде завжди відрізняти його в подальшому: повне прояснення ситуації, вдосконалення методу, пошук першопричини, що цінуються вище конкретних задач.

Ім`я Жозефа-Луї Лагранжа включено до переліку 72 найвидатніших вчених і інженерів XVIII-XIX ст., розміщеного на Ейфелевій вежі в Парижі.

Зауважимо, що поняття екстремуму функціонала потребує уточнення. Це поняття вводиться з урахуванням значень функціонала тільки на близьких кривих, тобто розглядається відносний максимум або мінімум. Разом з тим, можливе різне розуміння близькості кривих.

Якщо функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму або мінімуму відносно всіх кривих, для яких малим є модуль різниці $y(x) - y_0(x)$, то максимум або мінімум називається *сильним*. Якщо ж функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму або мінімуму лише відносно кривих $y = y(x)$, близьких до $y = y_0(x)$ не тільки за ординатами, але і за напрямками дотичних, то такий максимум або мінімум називається *слабким*.

Очевидно, що при досягненні на кривій $y = y_0(x)$ сильного максимуму (або мінімуму) тим більше досягається і слабкий екстремум. Однак можливо, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається слабкий максимум (або мінімум) і не досягається сильний максимум (або мінімум), тобто серед кривих $y = y(x)$, близьких до $y = y_0(x)$ і по ординатах і по напрямках дотичних, може не бути таких, для яких $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ (у випадку мінімуму $v[y(x)] < v[y_0(x)]$), а серед кривих $y = y(x)$, близьких лише по ординатах, але не близьких по напрямках дотичних, можуть бути і такі, для яких $v[y(x)] > v[y_0(x)]$ (у випадку мінімуму $v[y(x)] < v[y_0(x)]$). Різниця між сильним і слабким екстремумом не має істотного значення при виведенні основної необхідної умови екстремуму, але вона досить істотна при дослідженні достатніх умов екстремуму.

Нагадаємо, як в наш час вирішується найпростіша задача варіаційного числення, яка полягає у знаходженні слабкого екстремуму функціонала виду

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x \tag{42}$$

на множині всіх гладких кривих, що з'єднують дві задані точки.

Необхідною умовою екстремуму функціонала є рівність нулю варіації функціонала. Знайдемо цю умову для вказаного функціоналу. Варіюючи криву $y = y(x)$, на якій досягається екстремум, дістанемо деяку іншу допустиму криву $\overline{y}(x) = y(x) + \delta y$. Побудуємо однопараметричну множину кривих $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha(\overline{y}(x) - y(x))$. При $\alpha = 0$ матимемо криву $y = y(x)$, при $\alpha = 1$ – криву $y = \overline{y}(x)$. Якщо функціонал

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$$

розглядається тільки на кривих множини $y(x,\alpha)$ то його можна вважати функцією α : $\varphi(\alpha) = v[y(x,\alpha)]$, оскільки параметр α визначає криву сімейства $y(x,\alpha)$, а отже і значення функціонала $v[y(x,\alpha)]$. Крива $y = y(x)$, що реалізує екстремум функціонала, відповідає значенню $\alpha = 0$, тобто функція $\varphi(\alpha)$ має екстремум при $\alpha = 0$. Необхідною умовою екстремуму функції є $\varphi'(0) = 0$. Отже, маємо

$$\varphi(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y(x,\alpha),y'_x(x,\alpha)\right)\mathrm{d}x$$

і

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\alpha)+F_{y'}\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\alpha)\right]\mathrm{d}x,$$

де

$$F_y=\frac{\partial}{\partial y}F\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right),\quad F_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[y(x)+\alpha\delta y\right]=\delta y\quad \text{і}\quad \frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[y'(x)+\alpha\delta y'\right]=\delta y',$$

дістанемо

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right)\delta y+F_{y'}\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right)\delta y'\right]\mathrm{d}x,$$

$$\varphi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y+F_{y'}\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y'\right]\mathrm{d}x.$$

Вище зазначалося, що $\varphi'(0)$ є варіацією δv функціонала, а необхідною умовою екстремуму функціонала v є рівність нулю його варіації: $\delta v=0$. Для функціонала

$$v\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x$$

ця умова має вигляд

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x=0.$$

Підінтегральний вираз є лінійною функцією від δy і $\delta y'$. Інтегруючи частинами, можна дістати вираз для варіації, в якому під інтегралом буде лінійна функція або від δy (перетворення Лагранжа), або від $\delta y'$ (перетворення Дюбуа-Реймонда).

Щоб отримати лінійну функцію від δy, інтегруємо другий доданок частинами і з урахуванням того, що $\delta y'=(\delta y)'$, дістанемо

$$\delta v=\left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=0.$$

Оскільки розглядається задача з нерухомими границями, маємо $\delta y\big|_{x=x_0}=\overline{y}(x_0)-y(x_0)=0$ і $\delta y\big|_{x=x_1}=\overline{y}(x_1)-y(x_1)=0$. Тому

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right) \delta y \mathrm{d}x$$

і необхідна умова екстремуму набирає вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right) \delta y \mathrm{d}x = 0 . \qquad (43)$$

Зазначимо, що припускалася неперервність похідної від функції $y(x)$, але припущення про диференційовність функції $y'(x)$ не робилося. Тому наведене перетворення Лагранжа, взагалі кажучи, незаконне.

Щоб позбутися необхідності додаткового припущення про існування другої похідної $y''(x)$, розглянемо інше перетворення варіації, яке запропонував Дюбуа-Реймонд. Позначимо $P(x) = \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}x$.

Тоді

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \delta y + F_{y'} \delta y' \right) \mathrm{d}x .$$

Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \delta y \mathrm{d}x = [P \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} P \delta y' \mathrm{d}x .$$

Як і раніше, із умови нерухомості границь маємо $\delta y|_{x=x_0} = 0$ і $\delta y|_{x=x_1} = 0$. Тому

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{y'} - P \right) \delta y' \mathrm{d}x . \qquad (44)$$

Це перетворення не потребує додаткових припущень щодо функції $y = y(x)$.

Для спрощення отриманих умов (43) і (44) в наш час використовуються фундаментальні леми варіаційного числення, одна з яких носить ім'я Лагранжа, а друга – Дюбуа-Реймона. Ця лема міститься в статті [Du Bois-Reymond,1879a] німецького математика Поля (Пауля) Давида Густава Дюбуа-Реймона (1831–1889), який був тоді професором в Тюбінгені.

В статті [Du Bois-Reymond,1879б] Дюбуа-Реймона в тому ж томі у варіаційне числення вводиться термін *екстремум*, який включає два

Поль Давид Густав Дюбуа-Реймон,
фр. Paul David Gustave du Bois-Reymon
(1831 – 1889)

поняття – максимум і мінімум. Дюбуа-Реймон пише: «Я дозволяю собі ввести новий термін. Він є необхідним, коли йдеться про максимум або мінімум. Я пропоную обидва випадки позначати одним словом: «екстремум».

Зауважимо, що вказані леми були доведені лише всередині XIX ст. Наведемо сучасне формулювання і доведення цих лем.

Основна лема варіаційного числення (лема Лагранжа). Якщо функція $\Phi(x)$ неперервна на відрізку $[x_0, x_1]$ і

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

для довільної функції $\eta(x)$ такої, що має неперервну похідну на $[x_0, x_1]$ і дорівнює нулю на кінцях відрізка $[x_0, x_1]$, то $\Phi(x) \equiv 0$ на відрізку $x_0 \le x \le x_1$.

Лагранж вважав це твердження очевидним і без будь-яких пояснень переходив від виразу (43) до рівняння Ейлера.

Доведення леми Лагранжа. Припустимо, що в деякій точці $x = \overline{x}$, яка знаходиться на відрізку $[x_0, x_1]$, $\Phi(\overline{x}) \neq 0$, наприклад $\Phi(\overline{x}) > 0$. Оскільки $\Phi(x)$ неперервна, то для достатньо великого n можна побудувати інтервал $[a, a + \pi/n]$, що знаходиться всередині інтервалу $[x_0, x_1]$ і містить точку $\overline{x}$, на якому значення $\Phi(x)$ більші деякого додатного числа m .

Визначимо функцію $\eta(x)$ таким чином:

$$\eta(x) = \begin{cases} \sin^2[n(x-a)] & \text{на інтервалі} \quad [a, a+\pi/n], \\ 0 & \text{поза інтервалом.} \end{cases}$$

Функція $\eta(x)$ неперервна, має неперервну похідну і $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, отже за припущенням

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 .$$

Але

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+\pi/n} \Phi(x)\sin^2 n(x-a)\,\mathrm{d}x > m \int_{a}^{a+\pi/n} \sin^2 n(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi m}{2n} > 0 .$$

Таким чином, припустивши, що $\Phi(x) \neq 0$ у деякій точці $\overline{x}$, яка знаходиться на відрізку $[x_0, x_1]$, дійшли протиріччя.

Зауважимо, що аналогічний результат справедливий також для функцій двох змінних. А саме, якщо функція $\Phi(x, y)$ неперервна в деякій області D на площині xOy і

$$\iint\limits_{D} \Phi(x,y)\eta(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

для довільної функції $\eta(x,y)$ такої, що має неперервну похідну в області D і дорівнює нулю на границі області, то $\Phi(x)\equiv 0$ в області D.

Застосуємо основну лему для спрощення необхідної умови (43) екстремуму найпростішого функціонала (42). Усі умови леми задовольняються на кривій, що реалізує екстремум, множник $(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})$ є неперервною функцією, а варіація δy є довільною функцією, яка має задовольняти лише вказані в основній лемі обмеження. Тому із леми випливає, що $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \equiv 0$. Тобто крива $y = y(x)$, яка реалізує екстремум розглядуваного функціонала, є розв'язком диференціального рівняння другого порядку

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0,$$

або у розгорнутому вигляді

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Це рівняння є рівняння Ейлера. При наведеному виведенні рівняння Ейлера допущена вказана раніше неточність щодо існування другої похідної функції $y = y(x)$.

Друга згадана фундаментальна лема варіаційного числення формулюється таким чином.

Лема Дюбуа-Реймона. Якщо функція $\Phi(x)$ неперервна на відрізку (x_0, x_1) і

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

для довільної неперервної функції $\eta(x)$, такої що має неперервну похідну на (x_0, x_1) і дорівнює нулю на кінцях відрізка (x_0, x_1), то $\Phi(x)$ є сталою на відрізку $x_0 \le x \le x_1$.

Доведення леми Дюбуа-Реймона. Припустимо, що $\Phi(x)$ не є сталою. Тоді на інтервалі $[x_0, x_1]$ є хоча б дві точки $\overline{x}$ і $\overline{\overline{x}}$, в яких функція $\Phi(x)$ має нерівні значення, наприклад $\Phi(\overline{x}) > \Phi(\overline{\overline{x}})$. Нехай c_1 і c_2 – два числа, що задовольняють нерівність $\Phi(\overline{x}) > c_1 > c_2 > \Phi(\overline{\overline{x}})$. При достатньо великому n можна побудувати два інтервали $[a_1, a_1 + \pi/n]$ і $[a_2, a_2 + \pi/n]$, що знаходяться всередині інтервалу $[x_0, x_1]$, не перетинаються і є такими, що для значень x із інтервалу $[a_1, a_1 + \pi/n]$ має місце $\Phi(x) > c_1$, а для значень x із інтервалу $[a_2, a_2 + \pi/n]$ виконується $\Phi(x) < c_2$.

Задамо функцію $\eta'(x)$ таким чином:

$$\eta'(x)=\begin{cases}\sin^2[n(x-a_1)] & \text{на інтервалі} \quad [a_1,a_1+\pi/n],\\ -\sin^2[n(x-a_2)] & \text{на інтервалі} \quad [a_2,a_2+\pi/n],\\ 0 & \text{в інших точках інтервалу} \quad [x_0, \mathrm{x}_1]\ .\end{cases}$$

Функція $\eta(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\eta'(x)\mathrm{d}x$ неперервна, має неперервну похідну $\eta'(x)$ і, крім того, $\eta(x_0)=0$,

$$\eta(x_1)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a_1}^{a_1+\pi/n}\sin^2 n(x-a_1)\mathrm{d}x-\int\limits_{a_2}^{a_2+\pi/n}\sin^2 n(x-a_2)\mathrm{d}x=0.$$

За умовою $\int\limits_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=0$, але, з іншого боку,

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a_1}^{a_1+\pi/n}\Phi(x)\sin^2 n(x-a_1)\mathrm{d}x-\int\limits_{a_2}^{a_2+\pi/n}\Phi(x)\sin^2 n(x-a_2)\mathrm{d}x>$$

$$>(c_1-c_2)\int\limits_{0}^{\pi/n}\Phi(x)\sin^2 nx\,\mathrm{d}x>0\,.$$

Таким чином, припустивши, що $\Phi(x)$ не є сталою на інтервалі $[x_0,x_1]$, дійшли протиріччя.

Застосовуючи лему Дюбуа-Реймона отримаємо повне виведення рівняння Ейлера. Нехай задано клас допустимих кривих $y=y(x)$, які мають неперервну похідну і задовольняють умови $y(x_0)=y_0,\ \ y(x_1)=y_1$. На таких кривих визначено функціонал

$$v[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\big(x,y(x),y'(x)\big)\mathrm{d}x,$$

де $F(x,y,z)$ − неперервна функція, що має неперервні частинні похідні по всіх змінних до другого порядку включно. Припустимо, що функція $y=y(x)$ реалізує локальний слабкий екстремум функціонала v. В такому разі

$$\delta v=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F_{y'}-P\right]\delta y'\mathrm{d}x$$

для довільної функції δy, яка має неперервну похідну і дорівнює нулю в точках x_0 і x_1. Із урахуванням леми Дюбуа-Реймонда

$$F_{y'} - P = F_{y'} - \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}x = C \quad (C \ - \text{стала}).$$

Ця рівність називається інтегральною формою рівняння Ейлера.

Функція $P(x) = \int_{x_0}^{x} F_y \mathrm{d}x$ неперервна і має неперервну похідну $P'(x) = F_y$. Отже, функція $F_{y'} = C + P(x)$ також має неперервну похідну: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = P'(x) = F_y$.

Таким чином, ми отримали рівняння Ейлера і довели при цьому диференційовність функції $F_{y'}$.

Нехай тепер в деякій точці (x, y) кривої $y = y(x)$ виконується $F_{y'y'} \neq 0$. При переході від точки з абсцисою x цієї кривої до точки з абсцисою $x + \Delta x$ функції $y(x)$ і $y'(x)$ набувають приростів Δy і $\Delta y'$, які внаслідок неперервності $y(x)$ і $y'(x)$ прямують до нуля при $\Delta x \to 0$. Маємо

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\overline{F}_{xy'} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \overline{F}_{yy'} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \overline{F}_{y'y'} \right],$$

де другі похідні $\overline{F}_{xy'}$, $\overline{F}_{yy'}$, $\overline{F}_{y'y'}$ з рисками зверху позначають значення цих функцій при аргументах $x + \theta_1 \Delta x$, $y + \theta_2 \Delta y$, $y' + \theta_3 \Delta y'$ ($|\theta_i| < 1$).

При $\Delta x \to 0$ $\overline{F}_{xy'}$, $\overline{F}_{yy'}$, $\overline{F}_{y'y'}$ прямують відповідно до $F_{xy'}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$, $F_{y'y'}(x, y, y')$. Отже, $\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{xy'} + F_{yy'} y' + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x} F_{y'y'} \right)$, звідки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{\frac{d}{dx} F_{y'} - F_{xy'} - F_{yy'} y'}{F_{y'y'}}$$

і $y''(x)$ існує в будь-якій точці кривої $y = y(x)$, що реалізує екстремум, в якій $F_{y'y'} \neq 0$. Точки екстремалі $y = y(x)$, для яких $F_{y'y'} \neq 0$, називаються *регулярними.*

Отже, не тільки виведено рівняння Ейлера, але й доведено існування другої похідної $y''(x)$, у будь-якій регулярній точці кривої, що реалізує екстремум.

Таким чином, екстремум функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \mathrm{d}x$$

може досягатися тільки на екстремалях. Для знаходження кривої, що реалізує екстремум функціонала (42), треба проінтегрувати рівняння Ейлера. Загальний розв'язок рівняння містить дві довільні сталі, які визначаються із граничних умов $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$.

Лагранж показав, що його методом також легко знайти диференціальне рівняння і для складнішої просторової задачі на екстремум інтеграла

$$\int f\left(x,y,z,y',z',y'',z'',...\right)\mathrm{d}x.$$

Для цього випадку він отримав систему двох диференціальних рівнянь:

$$f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_{y''}-...=0,$$

$$f_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{z'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_{z''}-...=0.$$

Метод Лагранжа дозволяє безпосередньо застосовувати до варіаційних задач апарат диференціального числення і розв'язувати таким чином багато нових варіаційних задач, наприклад, задачу на екстремум кратного інтеграла. Розглядався інтеграл

$$\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

де $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$, що відповідає деякій поверхні. Для шуканої поверхні Лагранж отримав рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

До Лагранжа вдавалося розв'язувати задачі тільки із закріпленими кінцями. Він зауважив, що позаінтегральні члени рівняння (39) дають співвідношення для кінців кривої. Це дозволило Лагранжу розв'язувати задачі з рухомими кінцями.

Дослідження Лагранжа з варіаційного числення тісно пов'язані з його роботою в галузі механіки. Одночасно з першим мемуаром, в якому викладається метод варіацій, Лагранж опублікував статтю «Додаток методу, викладеного в попередньому мемуарі, для розв'язання різних задач динаміки» (Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problémes de dynamique).

Числення варіацій дозволило Лагранжу розв'язати нові класи задач механіки. У першій же задачі, яку він розглядає в статті, потрібно знайти рух тіла, що притягується до довільної кількості нерухомих центрів силами, які є функціями відстаней. Принцип найменшої дії приводить до задачі знаходження екстремуму інтеграла виду

$$\int f\left(x,y,z,y',z'\right)\mathrm{d}x.$$

в класі просторових кривих $y(x)$, $z(x)$, метод розв'язання якої до Лагранжа був невідомий.

Маючи гнучкі методи розв’язання варіаційних задач, Лагранж міг розв’язувати задачі механіки, що зводяться до кратних інтегралів. До таких задач він прийшов, вивчаючи рух непружних рідин.

Лагранж узагальнив принцип найменшої дії на систему сил

$$\int mv\mathrm{d}s + \int m_1 v_1 \mathrm{d}s + \int m_2 v_2 \mathrm{d}s + \ldots + \int m_k v_k \mathrm{d}s = \min .$$

Таким чином, стало можливим застосувати принцип найменшої дії до розв’язання задач динаміки. Якобі пізніше писав, що принцип найменшої дії Лагранжа є матір'ю всієї нашої аналітичної механіки. Можливість широкого застосування принципу грунтується на методі варіацій.

У 1788 р. вийшла в світ «Аналітична механіка» (Mecanique analytique) Лагранжа, що відкрила новий етап в розвитку механіки. У цій роботі, написаній через сто років після «Начал» Ньютона, вся міць вдосконаленого математичного апарату була використана для побудови механіки. Результати Ейлера, Д’Аламбера та інших вчених XVIII ст. тут оброблені і розглядаються з єдиної точки зору. «Аналітичну механіку» пронизує основна для Лагранжа ідея побудови механіки як системної і гармонійної споруди, що зводиться на фундаменті однієї загальної передумови.

Лагранж підкреслював, що в основі розв’язання задач механіки лежить поєднання принципу найменшої дії з методом варіацій. Він пише: «Такий той принцип, якому, хоча і не цілком точно, я даю тут назву принципу найменшої дії і на який я дивлюся не як на метафізичний принцип, а як на простий і загальний висновок із законів механіки. Цей принцип, будучи поєднаний з принципом живих сил і розвинений за правилами варіаційного числення, дає зараз же всі рівняння, необхідні для вирішення кожної проблеми; звідси виникає настільки ж простий, як і загальний метод вирішення проблем, що стосуються руху тіл».

Таким чином, з Лагранжа почалася нова епоха в розвитку варіаційного числення. Використовуючи метод варіацій, Лагранж значно вдосконалив апарат аналітичної механіки. Це стало відкриттям великого значення.

Ідеї першого періоду творчості Ейлера були надовго забуті. Однак вони мають не тільки історичний інтерес. Наприкінці XIX ст. і у XX ст. прямий метод Ейлера, ідея якого полягає в трактуванні варіаційної задачі як граничної для деякої задачі на екстремум функції багатьох змінних, набув основного значення. Поряд із скінченно-різницевим прийомом Ейлера розвиток дістали і інші прямі методи. Ці методи успішно застосовуються в тих варіаційних задачах, для яких рівняння Ейлера не інтегрується в скінченному вигляді, а також для розв’язування самих диференціальних рівнянь, які можна подати як рівняння Ейлера для деякої варіаційної задачі.

За допомогою методу варіацій Ейлер в третьому томі «Інтегрального числення» знайшов диференціальне рівняння для задачі на екстремум подвійного інтеграла із закріпленими границями. Однак йому не вдалося розв’язати цю задачу у разі рухомих кінців.

Підсумовуючи відзначимо, кінець XVIII ст. ознаменувався серією досліджень Ейлера, Лагранжа і інших вчених. Варіаційне числення порівняно швидко набуло завершеної форми в його найелементарнішій частині, яка стосується теорії першої варіації. Розглядався ще лише слабкий екстремум і, відповідно, лише порівняно гладкі криві.

У 1786 р. А.М. Лежандр (1752 – 1833) поставив питання про знаходження достатніх умов екстремуму функціоналів. Він розглядав найпростішу варіаційну задачу і стверджував, що у разі, коли вздовж екстремалі $y = y(x)$ виконується умова $f_{y'y'} > 0$, то екстремаль дає мінімум інтегралу $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\mathrm{d}x$ серед всіх кривих, що мають із $y(x)$ спільні кінці $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$. У 1797 р. Лагранж показав, що у міркуваннях Лежандра є недолік, але не виправив його. Таким чином, питання про достатні умови екстремуму у варіаційних задачах на початку XIX ст. залишалося невирішеним.

3.4. Теорія екстремумів кратних інтегралів

> *Я дозволяю собі ввести новий термін. Він є необхідним, коли йдеться про максимум або мінімум. Я пропоную обидва випадки позначати одним словом: «екстремум».*
>
> П.Д.Г. Дюбуа-Реймон

Першу половину XIX ст. можна розглядати як окремий період в розвитку варіаційного числення, коли основні зусилля математиків спрямовувалися на знаходження необхідних умов екстремуму кратних інтегралів і на знаходження достатніх умов слабкого екстремуму. В цей час була розвинена теорія Гамільтона-Якобі, деякою мірою підготовлена вже дослідженнями Х. Гюйгенса і Лагранжа в оптиці і механіці.

У XVIII ст. ще не було розвиненої теорії двовимірних і криволінійних інтегралів, ще не були встановлені зв'язки між інтегралами об'ємними, поверхневими, криволінійними. Всі ці питання були розроблені в першій третині XIX ст. в роботах К.Ф. Гаусса, М.В. Остроградського, Дж. Гріна, С.Д. Пуассона.

Вже зазначалося, що двовимірна варіаційна задача вперше розглядалася Ейлером у 1770 р. в третьому томі «Інтегрального числення» [Эйлер, 1958] в частинному випадку прямокутної області, а саме $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Для екстремуму інтеграла

$$J = \iint\limits_D V(x, y, z, p, q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

при фіксованих крайових умовах Ейлер знайшов диференціальне рівняння

$$V_z - \frac{\partial}{\partial x}(V_p) - \frac{\partial}{\partial y}(V_q) = 0.$$

Перші результати для загального випадку отримав німецький математик Йоганн Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855).

Ще за життя Гаусс був удостоєний почесного титулу «принц математиків». Як писав Фелікс Клейн: «Гаусс нагадує мені образ найвищої вершини баварського гірського хребта, якою вона постає перед очима спостерігача, що дивиться з півночі. У цьому гірському ланцюзі в напрямку зі сходу на захід окремі вершини піднімаються все вище і вище, досягаючи граничної висоти в могутньому велетні, що височіє в центрі; круто обриваючись, цей гірський велетень змінюється низовиною нової формації, в яку на багато десятків кілометрів далеко проникають його відроги, і потоки, які течуть з нього несуть вологу і життя» [Клейн, 1937].

Йоганн Карл Фрідріх Гаусс,
нім. Johann Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Цікаво, що Гаусс зберіг на все життя зворушливу любов до свого першого відкриття. Знову наведемо слова Ф. Клейна: «30 березня 1796 року настає для нього день творчого хрещення. Гаусс вже займався деякий час групуванням коренів з одиниці на основі своєї теорії «первісних» коренів. І ось одного разу вранці, прокинувшись, він раптово ясно і чітко усвідомив, що з його теорії випливає побудова сімнадцятикутника. Ця подія стала поворотним пунктом в житті Гаусса. Він вирішив присвятити себе не філології, а виключно математиці». Робота Гаусса надовго стала недосяжним зразком математичного відкриття. Один з творців неевклідової геометрії Янош Бояї називав його «найблискучішим відкриттям нашого часу або навіть усіх часів». Настільки важко було осягнути це відкриття.

М. Вебер писав: «Розповідають, що Архімед заповідав побудувати над своєю могилою пам'ятник у вигляді сфери і циліндра на згадку про те, що він знайшов відношення об'ємів циліндра і вписаної в нього сфери – $3/2$. Як і Архімед, Гаусс висловив бажання, щоб у пам'ятнику на його могилі був увічнений сімнадцятикутник. Це показує, яке значення сам Гаусс надавав своєму відкриттю. На могильному камені Гаусса цього малюнка немає, але пам'ятник, споруджений Гауссу в Брауншвейгу, стоїть на сімнадцятикутному постаменті, правда, ледь помітному глядачеві».

Робіт, спеціально присвячених варіаційному численню, Гаусс не залишив. Нові методи варіаційного числення він отримав при розв’язанні конкретних геометричних і механічних задач. У 1813 р., досліджуючи задачі про притягнення точки тривісним еліпсоїдом [Gauss, 1863–1933б], Гаусс вказав, що їх розв’язання ґрунтується на шести загальних теоремах, «за допомогою яких можна привести трикратні інтеграли, поширені на об’єм тіла (korperlichen Raum), до двократних інтегралів, поширених тільки на поверхню тіла» (цит. за [Маркушевич, 1956, с. 204.]).

Прийоми перетворення об'ємних інтегралів в поверхневі, розроблені у 1813 р., Гаусс використовував потім у 1830 р., розв’язуючи задачу з теорії капілярності, і при цьому прийшов до екстремуму подвійного інтеграла зі змінною областю інтегрування. Записавши рівняння вільної поверхні рідини $z = z(x, y)$, а рівняння внутрішньої поверхні посудини $g = g(x, y)$, він звів задачу до знаходження мінімуму інтегралу

$$\omega = \frac{1}{2}\iint (z^2 - g^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (\alpha^2 - 2\beta^2)\iint \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \alpha^2 \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

за умови

$$\iint (z - g)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = S.$$

Інтегрування поширюється тут на проекцію вільної поверхні рідини на площину xOy; $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; α і β - сталі, залежні від відношення питомої ваги до інтенсивності молекулярного тяжіння частинок рідини одна до одної і частинок посудини до рідини.

Вперше в історії варіаційного числення Гаусс знаходить для цієї конкретної задачі на екстремум подвійного інтеграла не тільки диференціальне рівняння, а й крайову умову. Задача розв’язана ним за допомогою прийому, цілком аналогічного тому, яким він сам в роботі (1813) [Gauss, 1863–1933б] перетворив об'ємний інтеграл на поверхневий. Тут же Гаусс від інтеграла по поверхні переходить до інтеграла, взятого по її границі, і завдяки цьому знаходить крайову умову у варіаційній задачі.

Характеризуючи результати Гаусса, А.І. Маркушевич писав [Маркушевич, 1956, с. 213]: «Хоча Гаусс і не дає в своїх роботах 1813 і 1830 рр. загальних формул, що перетворюють інтеграли за об’ємом в інтеграли по поверхні або інтеграл по поверхні в криволінійний інтеграл, проте в таких деталях і з такою геометричною виразністю проводить всі необхідні викладення для розглянутих ним спеціальних задач, що будь-який математик, прочитавши уважно його роботи, міг без зусиль, слідом за Гауссом крок за кроком виконувати обидва перетворення в будь-якій аналогічній задачі».

У лютому 1826 р. в роботі «Доведення однієї теореми інтегрального числення», представленій Паризькою академією наук, але опублікованій лише у 1965 р. А.П. Юшкевичем [Остроградский, 1965а] (див. також [Юшкевич, 1965]) український математик Михайло Васильович Остроградський (1801–1861) вперше висловив і довів точно так, як це роблять тепер, теорему про перетворення об'ємного інтеграла від виразу типу дивергенції в поверхневий інтеграл. У 1828 р. в роботі про застосування аналізу до теорії електрики і магнетизму англійський математик Дж. Грін (1793–1841) виводить формулу для оператора Лапласа

$$\vartriangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

яку можна подати у вигляді

$$\iiint (u\vartriangle v - v\vartriangle u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint (u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n})\mathrm{d}s.$$

Михайло Васильович
Остроградський
(1801–1861)

Джордж Грін,
англ. George Green
(1793 – 1841)

У листопаді 1831 р французский математик Сімеон-Дені Пуассон (1781–1840) доповів Паризькій академії наук вирішення варіаційної задачі про екстремум подвійного інтеграла зі змінними границями [Poisson, 1833a]. Він був знайомий з роботою Гаусса з теорії капілярності 1830 р., на яку послався в своїй статті 1831 р. Знав він і теорему Остроградського, оскільки вона була ще раз сформульована в тій частині «Мемуару про поширення тепла всередині твердих тіл», яку Остроградський представив Паризькій академії наук 6 серпня 1827 р. [Остроградский, 1965б]. Мемуар направлявся для відзиву Фур'є і Пуассону. Отже, Пуассон вже мав у своєму розпорядженні теорію про перехід від подвійних інтегралів до криволінійних. Це дозволило йому отримати в загальному вигляді граничні умови для подвійного інтеграла зі змінними границями.

У роботі 1853 р. Пуассон не посилається на статті Гаусса, мабуть, тому, що Гаусс вивчав конкретну задачу і навіть не формулював варіаційну проблему у загальному вигляді.

Щоб охарактеризувати метод Пуассона, розглянемо те місце у вирішенні проблеми, на якому зупинився Ейлер. Для варіації $\delta\frac{\partial z}{\partial x}$ Ейлер отримав вираз

$$\delta\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x}.$$

Потім для варіації $\delta\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ він знайшов два різних вирази залежно від того, отримана вона диференціюванням спочатку по x, потім по y, або навпаки. Щоб усунути протиріччя, Ейлер припустив, що δx залежить тільки від x, а δy - тільки від y. Далі Ейлер запропонував вважати, що

$$\delta x = 0, \ \ \delta y = 0.$$

Він писав [Эйлер, 1958, т. 3, с. 373]: «Ми уникнемо найщасливішим чином всіх сумнівів в цьому питанні, якщо надаватимемо варіації тільки кількості z, а інші кількості x і y залишатимемо неварійованими, так що $\delta x = 0$ і $\delta y = 0$, чим ми не тільки полегшимо обчислення, але і навряд чи обмежимо застосування варіаційного числення. Бо якщо ми порівнюємо поверхню з іншою, дуже близькою до неї, то ніщо нам не заважає ставити у відповідність кожній точці заданої поверхні таку точку варійованої поверхні, яка має ті ж координати x і y, так що тільки третя координата z отримує варіацію». Таким чином, Ейлер розглядає варіаційну задачу, в якій область інтегрування D не змінюється.

Це обмеження зняв Пуассон. У мемуарі 1833 року він розглянув x і y як функції допоміжних змінних u і v. Для варіації $\delta \frac{\partial z}{\partial x}$ він отримав вираз, загальніший ніж у Ейлера. Саме у Пуассона

$$\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x}.$$

В окремому випадку, який запропонував розглянути Ейлер, коли δy не залежить від x, з формули Пуассона виходить формула Ейлера. Пуассон розв'язує задачу про екстремум подвійного інтеграла

$$J = \iint\limits_D V(x, y, z, p, q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Зробивши заміну змінних, він отримує

$$J = \iint\limits_D V\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Потім Пуассон знаходить варіацію δJ, прирівнює її нулю і перетворює до такого виду:

$$\delta J = \iint H\omega\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \Gamma.$$

Звідси виводиться вже відоме рівняння Ейлера $H = 0$, тобто

$$V_z - \frac{\partial}{\partial x}(V_p) - \frac{\partial}{\partial y}(V_q) = 0,$$

і умова

$$\int\limits_C (V_p \mathrm{d}y - V_q \mathrm{d}x)\delta z = 0.$$

Отже, в роботі Пуассона були вперше знайдені умови, які стосуються границь області інтегрування.

Наприкінці мемуара Пуассон зазначив, що його дослідження можна поширити на інтеграли будь-якої кратності. При цьому в разі потрійного інтеграла варіація δJ складатиметься з двох доданків, з яких першим є потрійний інтеграл і з нього отримують диференціальне рівняння. Другий доданок можна перетворити до подвійного інтеграла. Цим коротким зауваженням Пуассон і обмежився.

Наведемо деякі цікаві факти з життя Пуассона, що стосуються його навчання у Політехнічній школі, до якої і Пуассон 17-ти років був прийнятий у 1798 р. першим серед всіх вступників. У той час Політехнічною школою керувала Рада професорів. Помітивши, що перший учень прийому 1798 р. погано володіє рейсфедером, вони звільнили його від креслення, вважаючи його долею науку, а не інженерні терени. Пуассон мав блискучі успіхи в математиці і літературі.

Якось Лаплас запитав у одного з учнів про щось з небесної механіки і отримав відповідь, в якій поставлене питання розглядалося новим і витонченим способом. Здивований, він запитав учня, чи йому належить ідея такого вирішення питання. «Ні, - відповів той, - я взяв її у Пуассона». З цього моменту виник той глибокий інтерес, який Лаплас постійно виявляв до свого майбутнього наступника.

Теорію аналітичних функцій в Політехнічній школі тоді читав Лагранж, і не проходило жодного заняття, щоб він з відповідей з місця або біля дошки не переконувався в тому, що серед його слухачів є юнак, який може самостійно знаходити ясні і витончені доведення математичних теорем. Лагранж віддавав цілковиту справедливість блискучим дослідам свого талановитого учня.

«Я старий, - сказав одного разу Лагранж Пуассону, - під час моїх безсонних ночей я розважаюсь числовими порівняннями; послухайте мене, це цікаво. Гюйгенс на тринадцять років був старшим за Ньютона; я на тринадцять років старший за Лапласа; Лаплас тридцятьма двома роками старший за вас». Навряд чи можна було більш тонко і делікатно визначити місце Пуассона серед великих творців механіки і математичної фізики.

Пуассон багато разів говорив: «Життя прикрашається двома речами: заняттям математикою і її викладанням».

Питання про варіації інтегралів будь-якої кратності розв’язав М.В. Остроградський в своєму відомому «Мемуарі про числення варіацій кратних інтегралів» (представлений у 1834 р. і опублікований у 1838 р.), в якому високо оцінив роботу Пуассона: «На мемуар Пуассона у варіаційному численні завжди будуть посилатися в історії диференціального аналізу. Саме в цій роботі ми вперше знаходимо повну варіацію подвійного інтеграла». Основний результат свого мемуара Остроградський характеризував як «спосіб знаходження варіації як завгодно кратного інтеграла».

У даній роботі Остроградський вперше у варіаційному численні вивів необхідну умову екстремуму інтеграла будь-якої кратності

$$J = \int U \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots ,$$

взятого по області, координати якої задовольняють нерівність

$$L(x, y, z, \ldots) \leq 0.$$

М.В. Остроградському належить одне з найпочесніших місць в історії світової математичної науки. Йому були притаманні неперевершений талант, сміливий і гострий розум, висока математична ерудиція, знання природознавства, що дозволило М.В. Остроградському зробити першорядні відкриття в багатьох областях математики і механіки.

Пуассон не випадково обмежився вивченням подвійних інтегралів. Для узагальнення його результатів на випадок $n > 2$ йому ще не вистачало засобів в арсеналі інтегрального числення. І ці засоби винайшов Остроградський. Він зумів дослідити на екстремум інтеграл будь-якої кратності, використовуючи власні результати в теорії багатовимірних інтегралів, які самі по собі становлять видатний внесок в інтегральне числення.

Так, він поширив теорему, доведену у 1826 р., на *n*-вимірний інтеграл і відповідний інтеграл, взятий по границі *n*-вимірної області. Ця задача була особливо важкою, оскільки допоміжні уявлення по геометрії *n*-вимірних просторів почали складатися пізніше. Для перетворення змінних в *n*-кратні інтеграли Остроградський знайшов загальну формулу, при цьому він вперше використав функціональний визначник. Він перший повно і точно описав прийом обчислення *n*-кратного інтеграла за допомогою *n* послідовних інтеграцій по кожній змінній у відповідних границях.

Остроградський отримав першу варіацію досліджуваного інтеграла у вигляді

$$\delta J=\int\left[\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x}+\frac{\partial(U\delta y)}{\partial y}+\frac{\partial(U\delta z)}{\partial z}+\ldots\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots+\int DU\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots$$

Вираз під знаком першого інтеграла типу дивергенції, і Остроградський подає δJ в іншому вигляді

$$\delta J=\int\frac{U\delta L\mathrm{d}s}{\sqrt{(\partial L/\partial x)^2+(\partial L/\partial y)^2+(\partial L/\partial z)^2+\ldots}}+\int DU\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots,$$

де перший з інтегралів правої частини є $(n-1)$-кратним і береться по границі області інтегрування *S*, а другий n-кратний інтеграл - по самій області. Потім другий інтеграл виражається як сума двох інтегралів, взятих відповідно по області та по її границі:

$$\int DU\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots=\int\omega DU\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots+\int Q\,\mathrm{d}s.$$

Рівняння $\omega=0$ - це диференціальне рівняння Ейлера для даної задачі.

З формул і вказівок Остроградського можна отримати також граничні умови. Однак сам Остроградський не виписав рівняння Ейлера і граничні умови. Останні параграфи його мемуару написані дуже лаконічно, як і багато інших його робіт.

Мемуар Остроградського опублікований у 1836 р. в 16-му томі журналу Крелле, а пізніше в англійському перекладі в книзі І. Тодгентера [Todhunter, 1861]. Однак стислість викладу настільки ускладнювала розуміння роботи, що у 1844 р. Паризька академія наук оголосила конкурс на тему: «Знайти граничні рівняння, які мають бути приєднані до рівнянь невизначених для того, щоб цілком визначити максимуми і мінімуми кратних інтегралів». Премію присудили професорові математики в Страсбурзі П. Саррюсу (1798 - 1861), який докладніше розвинув необхідні обчислення, не зробивши при цьому нічого принципово нового порівняно з Остроградським.

Почесним відзивом була відзначена робота Шарля Делоне (1814-1872), згодом відомого математика і астронома, який сам вказував, що його прийом мало відрізняється від методу Остроградського, який подолав головні труднощі проблеми. Учень Остроградського професор університету в Одесі Є.Ф. Сабінін (1831-1909) докладно розібрав мемуари Саррюса і вказав на ті місця, де в ньому містяться неточності [Сабинин, 1888–1889], [Сабинин, 1902] (про роботи Остроградського див. [Гнеденко, 1952, Ремез,1958]).

Шарль-Ежен Делоне,
фр. Charles-Eugène Delaunay
(1816-1872)

3.5. Канонічні змінні. Теорія Гамільтона-Якобі

До найважливіших результатів, отриманих у варіаційному численні в першій половині XIX ст., належить введення так званих канонічних змінних (*x, y, z, u, v*) замість змінних (*x, y,* z, *y'*, *z'*). В нових змінних диференціальні рівняння Ейлера мають просту канонічну форму. Крім того, доводиться, що екстремалі є характеристиками диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку.

Теорія канонічних рівнянь була розвинена в роботах Сера Вільяма Ровена Гамільтона (1806–1865) і Карла Густава Якоба Якобі (1804-1851) і в подальшому вдосконалена М.В. Остроградським. Дослідження в цій галузі однаковою мірою стосуються варіаційного числення і механіки та її варіаційних принципів.

Сер Вільям Ровен Гамільтон,
англ. William Rowan Hamilton
(1806-1865)

Гамільтон встановив для консервативних систем загальний інтегральний варіаційний принцип класичної механіки (1833). Цей принцип був узагальнений М.В. Остроградським (1850) поширенням на неконсервативні системи (принцип Гамільтона-Остроградського). Числення кватерніонів, у якому закладені основи векторного (і операційного) числення і яке є першою некомутативною алгеброю, оператор Гамільтона – такі основні досягнення, що вписали ім’я Гамільтона в історію фізики і математики.

Карл Густав Якоб Якобі,
нім. Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851)

Цікаво, що В. Гамільтон був справжнім вундеркіндом. У 12 років він знав 12 мов, у 17 років самостійно знайшов помилку в «Небесній механіці» П.-С. Лапласа. У 18 років написав першу роботу з геометричної оптики. У 22 роки ще студентом став королівським астрономом Ірландії. У 30 - отримав лицарський титул. У 1843 р., коли В. Гамільтону було лише 38 років, він уже був автором великої кількості глибоких робіт, зокрема сформулював принципи так званої гамільтонової механіки – формалізму, що лежить в основі як класичної, так і квантової механіки.

У науковій біографії В. Гамільтона 1834 рік відмічений поширенням на динаміку ідеї характеристичної функції, яку він успішно застосував у геометричній оптиці. Дослідження В. Гамільтона з динаміки, видані у двох статтях у лондонському «Philosophical Transactions of the Royal Society», отримали високу оцінку. У 1842 р. на щорічному зібранні британської асоціації у Манчестері К. Якобі сказав: «Гамільтон – це Лаґранж нашої країни». У 1966 р. Тет [Полак, 1959] охарактеризував цю роботу як «… найвагоміше доповнення до теоретичної динаміки, отримане відтоді, як були досягнуті великі успіхи Ньютоном і Лаґранжем». У 1835 р. В. Гамільтон був нагороджений золотою медаллю Англійського королівського товариства.

Протягом довгого часу В. Гамільтон цікавився уявними величинами, їх геометричною інтерпретацією і можливими узагальненнями. Основний і найбільш значущий внесок Гамільтона у математику полягає у відкритті у 1843 р числення кватерніонів – гіперкомплексних чисел. 16 жовтня 1843 р. він сформулював фундаментальну теорему множення кватерніонів, яка лежить в основі некомутативних алгебр. У листопаді 1843 р. він зробив доповідь про це відкриття у Королівській Ірландській академії.

От як сам В. Гамільтон пише про це у листі до сина 5 серпня 1865 р.: «… на 16-й день того ж місяця – так склалось, що це був понеділок і день засідання Ради Королівської Ірландської академії - я йшов, щоб бути присутнім і головуючим, і ваша мати, яку, мабуть, тягнуло сюди, гуляла зі мною вздовж Королівського каналу; і хоча вона розмовляла зі мною, … коли плин думок, що відбувався в моїй голові нарешті привів мене до результату, важливість якого я відразу ж відчув. Здалось, що замкнувся електричний ланцюг і спалахнула іскра, вісник того (як я миттєво відчув), що багаторічна робота завершилася виразно спрямованою думкою ..., яка стане надбанням інших, якщо мені доведеться жити досить довго, щоб у точних виразах повідомити про відкриття. Я не міг опиратися імпульсу – нефілософському за суттю – накреслити на камені мосту Брум, поруч з яким ми проходили, основну формулу зі знаками i, j, k, а саме $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, яка містила розв’язок проблеми. Але звичайно, різьблений ножем напис відтоді геть здерся. Проте більш довговічне нагадування залишилося в записах книги Ради академії (запис від 16 жовтня 1843 р.), яке зафіксувало той факт, що я тоді попросив і одержав дозвіл зробити повідомлення про кватерніони на перших загальних зборах сесії, які і відбулися відповідно в наступному місяці у понеділок 13-го листопада» (переклад листа від Сера В.Р. Гамільтона до преподобного Арчібальда Гамільтона, 5 серпня 1865 р. за http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Letters/ BroomeBridge.html).

Вперше диференціальні рівняння руху записав в канонічному вигляді Лагранж. У 1809 р. в дослідженнях з небесної механіки [Lagrange, 1809] він вивів канонічні рівняння, варіюючи елементи орбіт планет (нахил і довготу вузла) і розглядаючи пертурбаційну функцію (див. [Лагранж, 1950, с. 426], а також [Идельсон, 1937]).

Гамільтон став безпосереднім продовжувачем «Аналітичної механіки» Лагранжа, яку він захоплено називав «наукової поемою».

Працюючи над створенням математичного апарату в оптиці, Гамільтон йшов шляхом, вказаним Лагранжем. Він пише [Hamilton, 1931–1967, т. 1, с. 315]: «Той, хто розмірковував про красу і корисність загального методу Лагранжа в теоретичній механіці, хто оцінив простоту і гармонію, внесені Лагранжем в дослідження збурень орбіт планет, повинен відчути, що математична оптика тільки тоді досягне рівня, порівнянного з механікою або з астрономією за красою, міццю і гармонійністю, коли вона матиме відповідний метод і стане втіленням однієї центральної ідеї».

У роботах з оптики Гамільтон прийшов до введення характеристичної функції. У 1832 р. в повідомленні, зробленому на щорічному з'їзді Британського товариства сприяння наукам, він висловився так [Hamilton, 1931–1967, т. 1, с. 295-296]: «Центральна ідея, з якою випливає весь мій метод, це ідея основної або характеристичної функції для кожної оптичної системи променів».

У своїх подальших роботах Гамільтон переносить в механіку результати, отримані ним в оптиці. Він вводить характеристичну функцію (1834) [Hamilton, 1934; Hamilton, 1931–1967, т. 12, с. 103-162] і розробляє апарат канонічних рівнянь динаміки (1835) [Hamilton, 1835; Hamilton, 1931–1967, т. 2, с. 162-212].

Гамільтон обмежився випадком вільної системи матеріальних точок при наявності силової функції, тобто системи, в якій діють тільки консервативні сили. У 1837 р. німецький математик К. Якобі показав [Jacobi, 1837], що результати Гамільтона допускають узагальнення. Замість функції Гамільтона можна розглянути іншу, що представляє будь-який розв’язок деякого диференціального рівняння в частинних похідних. Встановивши зв'язок між цим рівнянням в частинних похідних і диференціальними рівняннями руху, Якобі знайшов метод їх інтегрування. Завдяки цьому теорія Гамільтона-Якобі отримала відоме завершення.

У роботі 1837 р. Якобі обмежився вивченням системи вільних точок. Згодом він узагальнив свої результати на випадок, коли між точками існують в'язі. Ці дослідження були вперше опубліковані тільки у 1866 р. Клебшем в його «Лекціях з динаміки» [Якоби, 1836].

У роботі «Про інтеграли загальних рівнянь динаміки» (1848), опублікованій у 1850 р. [Ostrogradsky, 1958, Остроградский, 1959–1961, т. 2, с. 129-138], Остроградський узагальнив результати Гамільтона і Якобі на випадок, коли в'язі та силова функція залежать від часу. У 1848 р. він написав «Мемуар про диференціальні рівняння, що відносяться до ізопериметричної задачі» [Ostrogradski, 1850, Остроградский, 1959–1961, т. 2, с. 139-233], в якому узагальнив результати, отримані для рівнянь динаміки, на варіаційну задачу про екстремум інтеграла

$$J=\int_{t_1}^{t_2} V\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2},\ldots,\frac{\mathrm{d}^n x_m}{\mathrm{d}t^n}\right)\mathrm{d}t.$$

Завдяки роботам Якобі і Остроградського теорія, основи якої заклав Гамільтон, набула досить загального і завершеного вигляду. Вона не тільки сприяла розвитку варіаційного числення, але відіграла фундаментальну роль в його застосуваннях до класичної механіки, а пізніше до квантової теорії.

НАРИС 4

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

> *Можна висловити такий загальний принцип.*
>
> *Якщо розшукується максимум або мінімум деякої функції багатьох змінних за умови, що між цими змінними є зв'язок, який задається одним або кількома рівняннями, треба додати до функції, екстремум якої шукається, функції, що задають рівняння зв'язку, помножені на невизначені множники, і шукати потім максимум або мінімум побудованої суми, так ніби змінні є незалежними. Отримані рівняння, додані до рівнянь зв'язку, дозволяють визначити всі невідомі.*
>
> Ж.-Л. Лагранж

Варіаційними задачами на умовний екстремум називаються задачі дослідження на екстремум функціонала за умови, що на функції, від яких залежить функціонал, накладаються деякі в'язі.

Прикладом такої задачі є знаходження екстремуму функціонала

$$v[y_1,y_2,\dots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')\mathrm{d}x\,,$$

за припущення, що функції $y_1,y_2,\dots,y_m$ задовольняють m умов:

$$\varphi_i(y_1,y_2,\dots,y_n)=0\,,\ i=1,2,\dots,m;\quad m<n\,.$$

Розв'язуючи цю систему відносно $y_1,y_2,\dots,y_m$ (або яких-небудь інших m функцій y_i) і підставляючи їхні вирази у $v[y_1,y_2,\dots,y_n]$, дістанемо функціонал $w[y_{m+1},y_{m+2},\dots,y_n]$, що залежить від $n-m$ аргументів, які вже є незалежними, і тому для дослідження функціонала w застосовні методи варіаційного числення.

Проте, виключення змінних на практиці може бути досить складною задачею. Разом з тим, змінні часто пов'язані таким чином, що їх неможливо поділити на залежні та незалежні, не порушуючи симетрії задачі. В такому разі зручнішим є інший метод дослідження, так званий метод невизначених множників Лагранжа, який зберігає цілковиту рівноправність змінних. Застосування методу невизначених множників Лагранжа дозволяє не виключати змінні і врахувати додаткові умови не зменшуючи кількості змінних.

Леонард Ейлер,
нім. Leonhard Euler
(1707-1783)

Жозе́ф-Луї́ Лагра́нж,
фр. Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

Перша згадка про правило множників міститься в роботах Ейлера по ізопериметричним задачам (1744). Потім воно було висловлене Лагранжем в його «Аналітичній механіці» (1788) для широкого класу задач варіаційного числення (так званих задач Лагранжа). У 1797 р. в книзі «Théorie des fonctions analytiques» (Теорія аналітичних функцій) [Lagrange, 1813] Лагранж порушує питання і про скінченновимірні задачі. Він пише: «Можна висловити такий загальний принцип. Якщо шукається максимум або мінімум деякої функції багатьох змінних за умови, що між цими змінними є зв'язок, який задається одним або кількома рівняннями, треба додати до функції, що мінімізується, функції, які задають рівняння зв'язку, помножені на невизначені множники, і шукати потім максимум або мінімум побудованої суми, так ніби змінні є незалежними. Отримані рівняння, додані до рівнянь зв’язку, дозволяють визначити всі невідомі».

Тобто, згідно з цим методом до підінтегральної функції функціонала додаються ліві частини рівностей заданих додаткових умов, помножені на деякі невідомі функції $\lambda_i(x)$. Отримана у такий спосіб нова варіаційна задача розглядається як задача на безумовний екстремум. Невідомі множники $\lambda_i(x)$ називаються *невизначеними множниками Лагранжа.* Вони визначаються із урахуванням рівняння Ейлера та заданих додаткових умов.

Аналогічний метод із застосуванням множників Лагранжа застосовується при дослідженні на екстремум функцій багатьох змінних за наявності додаткових умов.

Відзначимо незвичайність історичного розвитку цієї теми. Услід за методом розв’язання одновимірних екстремальних задач настала ера класичного варіаційного числення. Своє знамените правило множників для задач варіаційного числення з обмеженнями, тобто в нескінченновимірній ситуації, Лагранж сформулював в «Аналітичній механіці» у 1788 р., і лише десь через десятиліття у 1797 р. в «Теорії аналітичних функцій» він застосував його до скінченновимірних задач.

4.1. Умовний екстремум функції багатьох змінних

Нагадаємо умови існування екстремуму функцій багатьох змінних. У разі, коли функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ диференційовна в точці $(a_1,a_2,...,a_n)$, вона може мати в цій точці внутрішній екстремум тільки тоді, коли її повний диференціал $\mathrm{d}f$ дорівнює в цій точці нулю, тобто при $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, ..., x_n = a_n$ виконуються рівності:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\,,\ \dots\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,. \tag{1}$$

Рівності (1) є необхідними умовами екстремуму.

Якщо функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ має в деякому околі точки $(a_1,a_2,...,a_n)$ неперервні другі частинні похідні і в цій точці виконуються необхідні умови (1), то функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ має максимум в точці $(a_1,a_2,...,a_n)$ у разі, коли другий диференціал

$$\mathrm{d}^2 f = \sum\sum \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right|_{(a_1,a_2,..\,.a_n)} \cdot \Delta x_i \Delta x_k$$

є від’ємно визначеною квадратичною формою, а у разі, коли цей диференціал є додатно визначеною квадратичною формою, функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ має у цій точці мінімум. Це є достатні умови екстремуму.

Скінченновимірною гладкою екстремальною задачею з обмеженнями типу рівностей (або задачею про умовний екстремум) називається задача:

знайти екстремум $f_0(x)$

за умов $\qquad f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\,.$ (2)

Функції $f_k : R_n \to R$, $k = 0,1, \dots, m$ повинні мати деякі властивості гладкості (тобто диференційовності). Далі припускатимемо, що в деякому околі U простору R_n всі функції f_k неперервно диференційовні (в тому розумінні, що всі частинні похідні $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ існують і неперервні в U).

Точка $\hat{x} \in U$, $f_k(\hat{x}) = 0$, $k = 0,1, \dots, m$ є точкою локального мінімуму (максимуму) задачі (2) в тому разі, якщо знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що коли точка $x \in U$ задовольняє всі обмеження ($f_i(x) = 0$, $i = 0,1, \dots, m$) і $|x - \hat{x}| < \varepsilon$, то $f_0(x) \ge f_0(\hat{x})$ (відповідно $f_0(x) \le f_0(\hat{x})$).

Функцію

$$L = L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x), \qquad (3)$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, називають *функцією Лагранжа* задачі (2), числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ – *множниками Лагранжа.*

Правило множників Лагранжа.

1. *Нехай в задачі* (2) *всі функції* $f_0, f_1, \dots, f_m$ *неперервно диференційовні в околі точки* $\hat{x}$. *Якщо* $\hat{x}$ – *точка локального екстремуму в задачі* (2), *то знайдуться множники Лагранжа* $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m)$ *і* $\hat{\lambda}_0$, *одночасно не рівні нулю і такі, що виконуються умови стаціонарності функції Лагранжа по x*

$$L_x(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = 0 \Leftrightarrow L_{x_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_0),\ i = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

2. *Для того, щоб* $\hat{\lambda}_0 \ne 0$, *достатньо, щоб вектори* $f_1'(\hat{x}), \dots, f_m'(\hat{x})$ *були лінійно незалежними.*

Таким чином, для визначення $\hat{x}$, $\hat{\lambda}$, і $\hat{\lambda}_0$ маємо $n + m$ рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x)\Big) = 0,\ i = 1, \dots, n,\ f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \qquad (5)$$

із $n + m + 1$ невідомими. Слід враховувати, що множники Лагранжа визначені при цьому з точністю до пропорційності. Якщо відомо, що $\hat{\lambda}_0 \ne 0$ (а це важливий випадок, бо при $\hat{\lambda}_0 = 0$ співвідношення (4) свідчать лише про виродженість обмежень і не пов'язані з функціоналом), то можна, помноживши всі $\hat{\lambda}_i$ на константу, отримати $\hat{\lambda}_0 = 1$. Тоді число рівнянь дорівнюватиме числу невідомих.
У більш симетричній формі рівняння (5) записуються таким чином:

$$L_x = 0,\ L_\lambda = 0.$$

Їх розв'язки називаються *стаціонарними точками* задачі (2).

З часів Лагранжа майже впродовж цілого століття правило множників формулювалося із $\widehat{\lambda}_0 = 1$, хоча без додаткових припущень, наприклад лінійної незалежності, у такому вигляді воно невірне. Для підтвердження сказаного розглянемо задачу:

знайти $\quad \inf x_1$

за умови $\quad x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Очевидним і єдиним її розв'язком є $\widehat{x} = (0,0)$ через те, що це є єдина допустима точка.

Спробуємо тепер записати функцію Лагранжа з $\widehat{\lambda}_0 = 1$ і застосувати далі алгоритм (4). Маємо $L = x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)$, звідки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2\lambda x_1 + 1 = 0\,,\; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2\lambda x_2 = 0$$

і перше з цих рівнянь несумісне з рівнянням $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Як умову регулярності, яка гарантує, що $\widehat{\lambda}_0 \neq 0$, зазвичай використовують лінійну незалежність похідних $f_1'(\widehat{x}), \ldots, f_m'(\widehat{x})$ (див. твердження 2 правила множників Лагранжа). Проте перевірка цієї умови зазвичай є складнішою, ніж перевірка безпосередньо з рівнянь (4) того, що $\widehat{\lambda}_0$ не може дорівнювати нулю. Тому наведене вище формулювання теореми, яке не містить ніяких додаткових припущень окрім гладкості є дуже зручним.

Доведення теореми ґрунтується на одній з найважливіших теорем скінченновимірного диференціального числення − теоремі про обернену функцію: нехай $\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_s), \ldots,\ \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ − s функцій s змінних, неперервно диференційовних в деякому околі точки $\widehat{x}$. Нехай при цьому якобіан

$$I = \det\left(\frac{\partial \psi_i(\widehat{x})}{\partial x_j} \right)$$

відмінний від нуля. Тоді існують такі $\varepsilon_0 > 0$ *і* $\delta_0 > 0$, що для будь-якого $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$, $|\eta| \leq \varepsilon_0$ знайдеться ξ, $|\xi| \leq \delta_0$, таке, що $\psi(\widehat{x} + \xi) = \psi(\widehat{x}) + \eta$, і при цьому $\xi \to 0$ при $\eta \to 0$.

Доведення правила множників Лагранжа. Нехай точка $\widehat{x}$ є точкою локального мінімуму в задачі (2). Можливі два випадки: або вектори $f_0'(\widehat{x}), \ldots, f_m'(\widehat{x})$ лінійно залежні, або ці вектори лінійно незалежні.

а) Нехай вектори лінійно залежні. Тоді ненульові $\widehat{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$, для яких виконуються умови (4), можна підібрати за означенням.

б) Нехай вектори лінійно незалежні. Приведемо це до протиріччя з тим, що $\widehat{x}$ − точка локального мінімуму в задачі (2).

Розглянемо відображення $\Phi(x)=(f_0(x)-f_0(\hat{x}),\ f_1(x),\ \ldots, f_m(x))$. За умовою вектори $f_1'(\hat{x}),\ \ldots, f_m'(\hat{x})$ лінійно незалежні, тобто ранг матриці

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1}, \cdots & \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} \cdots & \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

дорівнює $m+1$. Припустимо для визначеності, що перші $m+1$ стовпчиків матриці $\mathbf{A}$ лінійно незалежні, тобто

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1}, \cdots & \frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} \cdots & \frac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Отже, функції

$$\begin{aligned} &\psi_1(x_1, \ldots, x_{m+1}) = f_0(x_1, \ldots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \\ &\psi_2(x_1, \ldots, x_{m+1}) = f_1(x_1, \ldots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n), \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = f_m(x_1, \ldots, x_{m+1}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) \end{aligned}$$

задовольняють умови теореми про обернену функцію. За цією теоремою для будь-якого ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ знайдуться $x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon)$ такі, що

$$\begin{aligned} &f_0(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) - f_0(\hat{x}) = -\varepsilon, \\ &f_1(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) = 0, \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

причому $x_i(\varepsilon)\to\hat{x}_i$ при $\varepsilon\to 0$, $i=1,2,\ldots,m+1$. Але із (6) прямо випливає, що точка $\hat{x}$ не є точкою локального мінімуму. Шукане протиріччя отримане. Твердження 2 теореми є очевидним.

Таким чином, екстремуми дійсної функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при достатньо гладких додаткових умовах, що задаються $m<n$ рівняннями в'язей

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

взагалі кажучи, можна знайти із умов (1), виключивши m із n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за допомогою рівнянь (7).

Якщо ж безпосереднє виключення m змінних неможливе або недоцільне, то застосовують таку необхідну умову максимуму або мінімуму функцій при обмеженнях (7)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=...=\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=0\,, \tag{8}$$

де $\Phi(x_1,\ ...,x_n)=f(x_1,\ ...,x_n)+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(x_1,\ ...,x_n)$.

Величини λ_j називаються множниками Лагранжа. Невідомі координати точок $x_i=a_i$ та множники Лагранжа λ_j знаходять із рівнянь (7) і (8), загальна кількість яких дорівнює $n+m$.

Для ілюстрації застосування методу множників Лагранжа при знаходженні екстремуму функцій багатьох змінних наведемо два приклади задач, пов'язаних із оптимальним визначенням жорсткості на розтяг-стиснення і згин, розв'язаних двома способами: за допомогою безпосереднього виключенням невідомих і за методом множників Лагранжа.

Розглянемо такий приклад: знайти вписаний у коло прямокутник найбільшої площі.

Площа прямокутника $S=4xy$ за умови $x^2+y^2=r^2$ (рис. 1).

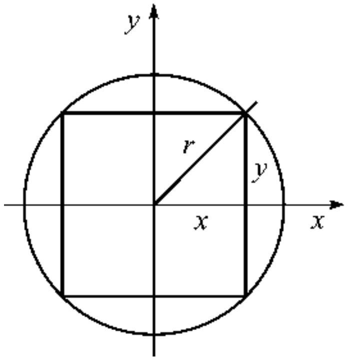


Рис. 1

Безпосереднє виключення

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\ S(x)=4x\sqrt{r^2-x^2};$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=4\sqrt{r^2-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}4x=0\,;$$

$$x=\frac{r}{\sqrt{2}};\ y=\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Метод множників Лагранжа

$$\Phi(x,y)=4xy+\lambda(x^2+y^2-r^2).$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=4y+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=4x+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=r^2.\end{cases}$$

$$x=y=\frac{r}{\sqrt{2}}\,.$$

Отже, маємо квадрат із стороною $r\sqrt{2}$.

Розглянемо тепер задачу, наведену Антуаном Параном (1666–1716) у його роботі, виданій у 1713 р. в трьох томах під загальною назвою «Дослідження з математики і фізики» при дослідженні згину балок. А. Паран показав яким чином слід обтесати кругле поліно, щоб отримати з нього балку прямокутного перерізу, який забезпечує максимальну міцність при згині. Для виконання цієї вимоги при заданому діаметрі $2r$ добуток bh^2 повинен мати найбільше значення, де $b=2x$, $h=2y$ (рис. 2). Щоб досягти цього, діаметр слід поділити на три рівні частини і провести перпендикуляри, як це показано на рис. 2.

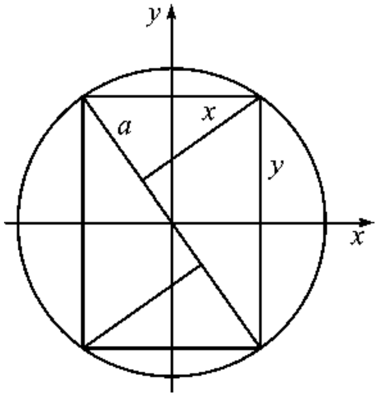


Рис. 2

Справді, при $x = r/\sqrt{3}$ і $y = (r/\sqrt{3})\sqrt{2}$, отримаємо $x/r = a/2x$; $a = 2r/3$.

Розв'язок цієї задачі аналогічний результату, отриманому Й. Кеплером щодо співвідношення діаметру і довжини циліндрів $D/h = \sqrt{2}$.

Розглянемо розв'язання цієї задачі. Момент опору

$$W = bh^2/6;\; b = 2x;\; h = 2y,$$

$$W = \frac{2x \cdot 4y^2}{6} = \frac{4}{3}xy^2;\; x^2 + y^2 = r^2 .$$

Безпосереднє виключення

$$I(y) = \frac{4}{3}y^2\sqrt{r^2 - y^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}I(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{8}{3}y\sqrt{r^2 - y^2} + \frac{-2y}{2\sqrt{r^2 - y^2}}\frac{4}{3}y^2 = 0.$$

$$\frac{8}{3}(r^2 - y^2) - \frac{4}{3}y^2 = 0;$$

$$\frac{8}{3}r^2 - 4y^2 = 0;$$

$$y^2 = \frac{2}{3}r^2;$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}r,\; x = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Метод множників Лагранжа

$$\Phi(x, y) = \frac{4}{3}xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - r^2);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{4}{3}y^2 + 2\lambda x = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{8}{3}xy + 2\lambda y = 0;$$

$$x^2 + y^2 = r^2 ;$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}r,\; x = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Викладемо ще раз основну думку Лагранжа. Нехай треба знайти екстремум в задачі (2). Для цього слід побудувати функцію Лагранжа (3) і розглянути задачу знаходження екстремуму $L(x, \lambda, \lambda_0)$ без обмежень. Необхідна умова екстремуму в цій задачі без обмежень відповідно до теореми Ферма для функцій n змінних дає потрібні рівняння $L_x = 0$. Отже, згідно з принципом Лагранжа рівняння для екстремуму в задачі з обмеженнями співпадають з рівняннями для задачі знаходження екстремуму $L(x, \lambda, \lambda_0)$ без обмежень при належному виборі множників Лагранжа λ, λ_0. Для дуже багатьох задач загальний задум Лагранжа є правильним.

4.2. Умовний екстремум функціонала

Якщо розв'язується варіаційна задача на умовний екстремум, тобто досліджується на екстремум функціонал

$$v\left[y_1, y_2, \ldots, y_n\right] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\mathrm{d}x$$

із додатковими умовами

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m; \quad m < n,$$

то згідно з методом невизначених множників для функціонала $v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ розглядається інший допоміжний функціонал

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) \mathrm{d}x$$

або

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* \mathrm{d}x\,,$$

де

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i\,.$$

Тут $\lambda_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) – деякі невідомі функції.

Функціонал v^* досліджується вже на безумовний екстремум, для чого розв’язується система рівнянь, яка складається із рівнянь Ейлера і додаткових рівнянь в’язей:

$$\begin{cases} F_{y_j}^* - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_j'}^* = 0, \\ \varphi_i = 0. \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, n\,,\; i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{9}$$

Кількість рівнянь $m + n$, загалом кажучи, є достатньою для визначення $m + n$ невідомих функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ і $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Граничні умови $y_j(x_0) = y_{j0}$ і $y_j(x_1) = y_{j1}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), які мають не суперечити рівнянням в’язей, загалом кажучи, дозволяють визначити $2n$ довільних сталих у загальному розв’язку системи рівнянь Ейлера.

Очевидно, що знайдені таким чином криві, на яких досягається мінімум або максимум функціонала v^*, є розв’язками і вихідної варіаційної задачі, оскільки при знайдених із системи (9) функціях

$$\lambda_i(x) \; (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ і } y_j(x), \; j = 1, 2, \ldots, n$$

всі $\varphi_i = 0$ і тому $v^* = v$. Якщо при $y_j = y_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), визначених із системи (9), досягається безумовний екстремум функціонала v^*, тобто екстремум відносно всіх близьких кривих, що задовольняють або не задовольняють рівняння в’язей, то, зокрема, екстремум досягається і відносно більш вузького класу тільки таких кривих, які задовольняють рівняння в’язей.

Однак, із наведених міркувань не випливає, що всі розв’язки вихідної задачі на екстремум реалізують безумовний екстремум функціонала v^*, і тому невідомо, чи всі розв’язки можна знайти цим методом.

Справедливе таке твердження: функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$, які реалізують екстремум функціонала

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\mathrm{d}x$$

при додаткових умовах

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m; \quad m < n,$$

задовольняють при відповідному виборі множників $\lambda_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ рівняння Ейлера, складені для функціонала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right) dx \text{ або } v^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* \mathrm{d}x .$$

Функції $\lambda_i(x)$ і $y_j(x)$ визначаються із рівнянь Ейлера

$$F^*_{y_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F^*_{y_j'} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

і рівнянь

$$\varphi_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m .$$

Функції $\varphi_i = 0$ можна також вважати рівняннями Ейлера для функціонала v^*, якщо як аргументи функціонала розглядати не тільки функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$, але й $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$. Рівняння $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ вважаються незалежними, тобто один із якобіанів порядку m відмінний від нуля, наприклад,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0 .$$

Доведення. Основна умова екстремуму $\delta v = 0$ у розглядуваному випадку набирає вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} (F_{y_j}\delta y_j + F_{y_j'}\delta y_j')\mathrm{d}x = 0 .$$

Інтегруючи другі доданки в кожній дужці частинами, і враховуючи, що

$$(\delta y_j)' = \delta y_j' \text{ і } (\delta y_j)_{x=x_0} = 0,\ (\delta y_j)_{x=x_1} = 0,$$

дістанемо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}(F_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_j})\delta y_j\mathrm{d}x=0\,.$$

Оскільки функції $y_1,\, y_2,\,\ldots,y_n$ задовольняють незалежні в'язі

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0\,,\ i=1,2,\ldots,m\,,$$

то варіації δy_j не є довільними і застосовувати основну лему поки що не можна. Варіації δy_j мають задовольняти такі умови, отримані шляхом варіювання рівнянь в'язей $\varphi_i=0$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}\delta y_j=0\,,\ i=1,2,\ldots,m\,. \qquad (10)$$

Точніше, застосовуючи до різниці

$$\varphi_i(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\ldots,y_n+\delta y_n)-\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

лівих частин рівнянь $\varphi_i(x,y_1+\delta y_1,y_2+\delta y_2,\ldots,y_n+\delta y_n)=0$ і $\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0$ формулу Тейлора, дістанемо

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}\delta y_j+R_i=0\,,$$

де R_i мають порядок вищий першого відносно δy_j ($j=1,2,\ldots,n$). Оскільки при обчисленні варіації функціонала враховуються лише члени першого порядку відносно δy_j ($i=1,2,\ldots,n$), доданки R_i не матимуть істотного значення у подальших викладеннях.

Враховуючи, що варіації δy_j зв'язані m умовами (10), довільними можна вважати тільки $n-m$ варіацій, наприклад $\delta y_{m+1},\, \delta y_{m+2},\,\ldots,\, \delta y_n$, інші визначаються із рівнянь (10). Після почленного множення кожного з цих рівнянь на $\lambda_i(x)\mathrm{d}x$ і інтегрування у межах від x_0 до x_1 отримаємо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\lambda_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}\delta y_j\mathrm{d}x=0\,,\ i=1,2,\ldots,m\,.$$

Додаючи почленно всі ці m рівнянь з рівнянням

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,,$$

матимемо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,.$$

Якщо ввести позначення

$$F^*=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\ ,$$

формула набере вигляду

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,.$$

Через те, що варіації δy_j не є довільними, застосовувати основну лему все ще не можна. Виберемо m множників $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ldots,\lambda_m(x)$ так, щоб вони задовольняли m рівнянь

$$F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}=0\,,\ j=1,2,\ldots,m\,,$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'_j}=0\,,\ j=1,2,\ldots,m\,.$$

Ці рівняння відносно λ_i є лінійною системою із визначником, відмінним від нуля

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}\neq 0\,,$$

отже система має розв'язок

$$\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ldots,\ \lambda_m(x)\,.$$

При такому виборі $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ldots,\ \lambda_m(x)$ основна необхідна умова екстремуму

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0$$

набирає вигляду

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left(F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,.$$

Оскільки для функцій $y_1,\,y_2,\ldots,\,y_n$, що реалізують екстремум функціонала v, це функціональне рівняння перетворюється на тотожність вже при довільному виборі δy_j ($j=m+1,m+2,\ \ldots,n$), то можна застосувати основну лему. Прийматимемо по черзі всі δy_j крім однієї рівними нулю і, застосовуючи лему, дістанемо

$$F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}=0\,,\ j=m+1,m+2,\ \ldots,n\,.$$

Беручи до уваги отримані вище рівняння

$$F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}=0\,,\ j=1,2,\ldots,m\ ,$$

остаточно дістанемо, що функції, які реалізують умовний екстремум функціонала v, і множники $\lambda_i(x)$ мають задовольняти систему рівнянь

$$F^*_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^*_{y'_j}=0\,,\ j=1,2,\ldots,n\ ,$$

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0\,,\ i=1,2,\ldots,m\ .$$

Як приклад розглянемо задачу про геодезичні лінії: знайти найкоротшу відстань між двома точками $A(x_0,y_0,z_0)$ і $B(x_1,y_1,z_1)$ на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$.

Відомо, що відстань між двома точками на поверхні визначається за формулою

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Задача полягає в тому, щоб знайти мінімум l за умови $\varphi(x,y,z)=0$.

Згідно з викладеним розглянемо допоміжний функціонал

$$l^*=\int_{x_0}^{x_1}\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\varphi(x,y,z)\right]\mathrm{d}x$$

і запишемо для нього рівняння Ейлера

$$\lambda(x)\varphi_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0\,,$$

$$\lambda(x)\varphi_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0\,,$$

$$\varphi(x,y,z)=0\,.$$

Із цих трьох рівнянь визначаються шукані функції $y=y(x)$ і $z=z(x)$, на яких може реалізуватися умовний мінімум функціонала v, і множник $\lambda(x)$.

Вище розглядалося питання про дослідження на екстремум функціонала

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots,y'_n)\mathrm{d}x\,,$$

$$y_j(x_0)=y_{j0}\,,\ y_j(x_1)=y_{j1}\,,\ j=1,2,\ldots,n\,,$$

де функції $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ задовольняють умови

$$\varphi_i(y_1,y_2,\ldots,y_n)=0\,,\ i=1,2,\ldots,m\ .$$

Розглянемо таке ж питання для в'язей, що задаються диференціальними рівняннями

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \; i = 1, 2, \dots, m \; .$$

В такому разі також можна довести правило множників, яке полягає в тому, що умовний екстремум досягається на тих самих кривих, на яких реалізується безумовний екстремум функціонала

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i \right) \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} F^* \mathrm{d}x ,$$

де

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i \; .$$

Однак, доведення значно ускладнюється порівняно з випадком скінченних в'язей.

Якщо обмежитися доведенням слабшого твердження про те, що криві, на яких досягається умовний екстремум функціонала v, при відповідному виборі $\lambda_i(x)$ є екстремалями для функціонала v^*, то наведене доведення, можна з незначними змінами повторити і для розглядуваного випадку.

Дійсно, припустимо, що один з функціональних визначників порядку m відмінний від нуля, наприклад,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \dots, y_m')} \neq 0 \, .$$

Тоді в'язі є незалежними і рівняння $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$ можна розв'язати відносно $y_1', \, y_2', \, \dots, \, y_n'$. В результаті розв'язання отримаємо

$$y_i' = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{m+1}', y_{m+2}', \dots, y_n') = 0 \, , \; i = 1, 2, \dots, m \; .$$

Якщо вважати $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ довільно заданими функціями, то з цієї системи диференціальних рівнянь визначаються $y_1, y_2, \dots, y_m$. Таким чином, $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ є довільними диференційовними функціями з фіксованими граничними значеннями і тому їхні варіації є довільними у тому ж розумінні.

Нехай $y_1, y_2, \dots, y_n$ – довільна допустима система функцій, що задовольняє рівняння в'язей $\varphi_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Варіюємо рівняння в'язей[1]:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j'} \delta y_j' = 0 \, , \; i = 1, 2, \dots, m \; .$$

---

[1] Зауважимо, що як і раніше у лівій частині треба було б включити доданки, які містять члени порядку вище першого відносно δy_j і $\delta y_j'$ ($j = 1, 2, \dots, n$), і врахувати вплив цих нелінійних членів у розглядуваному випадку набагато важче.

Домножуючи почленно кожне з отриманих рівнянь на невизначений множник $\lambda_i(x)$ і інтегруючи у межах від x_0 до x_1, дістанемо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\lambda_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}\delta y_j\mathrm{d}x+\int\limits_{x_0}^{x_1}\lambda_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y'_j}\delta y'_j\mathrm{d}x=0\,.$$

Інтегруючи кожен доданок другого інтеграла частинами і зважаючи на те, що $\delta y'_j=(\delta y_j)'$ і $(\delta y_j)_{x=x_0}=(\delta y_j)_{x=x_1}=0$, матимемо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda_i(x)\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}y'_j}\right)\right]\delta y_j\mathrm{d}x=0\,. \tag{11}$$

Із основної необхідної умови екстремуму $\delta v=0$ випливає

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,, \tag{12}$$

оскільки

$$\delta v=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}\delta y_j+F_{y'_j}\delta y'_j\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x\,.$$

Додаючи почленно рівняння (11) і (12) і позначивши $F^{*}=F+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i$, дістанемо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F^{*}_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^{*}_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,. \tag{13}$$

Через те, що варіації δy_j ($j=1,2,\ldots,n$) не є довільними, основну лему поки застосовувати не можна. Виберемо m множників $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ldots,\ \lambda_m(x)$ так, щоб вони задовольняли рівняння

$$F^{*}_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^{*}_{y'_j}=0\,,\ j=1,2,\ldots,m\ .$$

Якщо записати ці рівняння у розгорнутому вигляді, то вони являють собою систему лінійних диференціальних рівнянь відносно $\lambda_i(x)$ і $\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}x}$ ($i=1,2,\ldots,m$), яка при зроблених припущеннях має розв'язок $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ldots,\ \lambda_m(x)$, що залежить від m довільних сталих. При такому виборі $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ldots,\ \lambda_m(x)$ рівняння (13) набирає вигляду

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\sum_{j=m+1}^{n}\left(F^{*}_{y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F^{*}_{y'_j}\right)\delta y_j\mathrm{d}x=0\,,$$

де варіації δy_j ($j = m+1, m+2, \ldots, n$) вже є довільними, і тому, вважаючи, що всі, крім однієї δy_j, дорівнюють нулю і застосовуючи основну лему, дістанемо

$$F^*_{y_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F^*_{y'_j} = 0\,,\ j = m+1, m+2, \ldots, n\,.$$

Отже, функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які реалізують умовний екстремум функціонала v, і множники $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ мають задовольняти систему $m+n$ рівнянь

$$F^*_{y_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F^*_{y'_j} = 0\,,\ j = 1, 2, \ldots, n\ ,\ \varphi_i = 0\,, i = 1, 2, \ldots, m\ ,$$

тобто мають задовольняти рівняння Ейлера допоміжного функціонала v^*, який розглядається як функціонал, залежний від $m+n$ функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

4.3. Перетворення варіаційних задач. Теорія Р. Куранта і Д. Гільберта

> *Один давній французький математик сказав: «Математичну теорію тільки тоді можна вважати досконалою, коли ти ... берешся викласти її зміст першому зустрічному»,*
>
> Д. Гільберт

Метод множників Лагранжа приводить до перетворень варіаційних задач, за допомогою яких можна одній варіаційній задачі поставити у відповідність інші, еквівалентні їй у тому розумінні, що функціонали, які розглядаються у цих еквівалентних задачах, одночасно досягають свого екстремального значення. При цьому виникає можливість задачі на мінімум функціонала з мінімальним значенням d поставити у відповідність еквівалентну їй задачу на максимум, який дорівнює тій же величині d.

При цьому виходять із такого загального принципу. Якщо функціонал $J[u, v, \ldots]$ при заданих умовах неперервності і додаткових умовах досягає стаціонарного значення для деякої системи функцій $u, v, \ldots$, і якщо ця система функцій задовольняє деякі співвідношення, то функціонал J залишається стаціонарним для цієї системи функцій також і у тому разі, коли одне або кілька цих співвідношень наперед приєднати до додаткових умов задачі.

Співвідношення, отримані шляхом прирівнювання до нуля варіації функціонала, тобто рівняння Ейлера і природні граничні умови, називатимемо природними умовами, а додаткові або граничні умови, які входять до умов задачі, – додатковими умовами, або в’язями. Тоді із наведеного принципу випливає: якщо в деякій варіаційній задачі приєднати одну або кілька із відповідних природних умов до додаткових умов задачі, то стаціонарний характер функціонала зберігається і для нової задачі.

4.3.1. Застосування методу множників Лагранжа

Розглянемо таку задачу.

1. Знайти стаціонарне значення функціонала $J=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,u,u')\mathrm{d}x$ при звичайних умовах неперервності і граничних умовах $u(x_0)-u_0=0$, $u(x_1)-u_1=0$ і з додатковою умовою $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u'=0$.

Правило множників Лагранжа стверджує, що розв’язок цієї задачі 1 є також розв’язком такої задачі 2.

2. Знайти стаціонарне значення виразу

$$H\left(u,u',\lambda,\mu_0,\mu_1\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F+\lambda\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u'\right)\right]\mathrm{d}x+\mu_0\left[u(x_0)-u_0\right]+\mu_1\left[u(x_1)-u_1\right],$$

де невідомими є функції $u(x), u'(x), \lambda(x)$ і параметри μ_0, μ_1, причому у новій задачі на ці параметри не накладені ніякі граничні і додаткові умови.

Диференціальні рівняння Ейлера і природні граничні умови для цієї задачі мають вигляд:

$$F_{u'}-\lambda=0\,,\ F_u-\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}=0\,,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u'=0 \qquad (14)$$

для внутрішніх точок інтервалу і

$$\lambda(x_0)+\mu_0=0,\ \ \lambda(x_1)+\mu_1=0,$$
$$u(x_0)-u_0=0,\ \ u(x_1)-\mu_1=0$$

для кінців інтервалу.

Якщо виключити із цих рівнянь λ, μ_0, μ_1, то можна отримати диференціальне рівняння Ейлера для функції $u(x)$.

Якщо до задачі 2 на основі загального принципу приєднати умови $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u'=0$, $u(x_0)-u_0=0$, $u(x_1)-u_1=0$ як додаткові умови, то знову повернемося до задачі 1.

Але якщо ввести як додаткові умови до задачі 2 рівняння Ейлера і природні граничні умови (14) задачі 1, то отримаємо так зване перетворення Фрідріхса.

3. Отриману таким чином задачу 3 можна сформульовати у такому ж вигляді як і задачу 1, якщо шляхом інтегрування частинами прибрати з підінтегрального виразу інтегралу H похідну $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ і ввести потім нові функціональні аргументи p, p' і новий підінтегральний вираз $\Psi(x,p,p')$ за допомогою рівнянь

$$F_{u'}=p\,,\ F_u=p'\,,$$
$$pu'+p'u-F=\Psi\,.$$

Для того, щоб здійснити це перетворення (перетворення Лежандра), треба з перших двох рівнянь виразити u і u' через p, p' і x, а отриманні значення u і

u' підставити у ліву частину останнього рівняння. Ця умова буде виконана, якщо $F_{u'u'}F_{uu} - (F_{uu'})^2 \neq 0$, для усіх значень x, u і u'.

Тобто

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \lambda u\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = pu\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} p'u\mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F + \lambda\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u'\right)\right]\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^{x_1}[pu' + p'u - F]\mathrm{d}x + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0.$$

Таким чином можна отримати задачу, еквівалентну задачі 1.

4. Знайти стаціонарне значення виразу

$$-\int_{x_0}^{x_1} \Psi(x, p, p')\mathrm{d}x + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0$$

при додатковій умові $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p' = 0$, не ставлячи жодних крайових умов.

Природні граничні умови задачі 4:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi_{p'} - \Psi_p = 0$$

для внутрішніх точок інтервалу і

$$\Psi_{p'}\Big|_{x=x_0} - u_0 = 0, \quad \Psi_{p''}\Big|_{x=x_1} - u_1 = 0$$

для кінців інтервалу.

Згідно із загальним принципом, за допомогою якого ми перетворили задачу 1 у задачу 4, ці природні умови повинні співпадати із додатковими умовами задачі 1. Це безпосередньо підтверджується тим, що перетворення, обернене перетворенню Лежандра, має вигляд

$$\Psi_{p'} = u, \ \Psi_p = u', \ up' + u'p - \Psi = F.$$

Із цих формул випливає, що застосовуючи перетворення Фрідріхса до задачі 4, (яка не містить граничних умов), можна повернутись до задачі 1. Таким чином, перетворення Фрідріхса має інволютивний характер і переводить природні умови однієї задачі у додаткові умови іншої.

Можна показати, що, якщо для вихідної задачі 1 (тепер задача 1′) ми маємо мінімум, рівний d, то для інволютивно відповідної задачі 4 (тепер задача 4′), те ж саме значення d є максимумом.

Це твердження, звичайно, справедливе лише при виконанні певних обмежуючих умов. А саме, потрібно щоб при будь-який функції $\lambda(x)$, яка має кусково-неперервну похідну, вираз H дійсно досягав мінімуму d, який залежить від λ, якщо тільки наперед вважати, що $\lambda(x_1) + \mu_1 = 0$, $\lambda(x_0) + \mu_0 = 0$. Таким чином задача знаходження d_λ приводить, якщо усунути $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ в інтегралі H шляхом інтегрування частинами, до задачі:

$2'$. Знайти мінімум виразу

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u' \right) \right] \mathrm{d}x - \mu_0 \left[u(x_0) - u_0 \right] + \mu_1 \left[u(x_1 - u_1) \right] =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} u - \lambda u' \right] \mathrm{d}x - \lambda(x_0) u_0 + \lambda(x_1) u_1 \,,$$

де $\lambda(x)$ вважається заданою функцією.

Відповідні розв'язки u і u' цієї задачі задовольняють рівняння

$$F_{u'} - \lambda = 0\,, \quad F_u - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = 0\,. \tag{15}$$

Вважатимемо, що ці рівняння однозначно визначають функції u і u' при будь-яких λ і $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}$. Оскільки задачу $1'$ з мінімумом d можна отримати із задачі $2'$ шляхом приєднання обмежуючих додаткових умов $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u' = 0$, $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$, то ясно, що $\mathrm{d} \geq \mathrm{d}_\lambda$. З іншого боку, розв'язок u задачі $1'$ задовольняє рівняння (14) при $\lambda = \overline{\lambda} = F_{u'}$, оскільки за означенням рівняння (14) однозначно дають u і u', то звідси витікає що $\mathrm{d}_\lambda = \mathrm{d}$. Тобто $\mathrm{d} = \max \mathrm{d}_\lambda$.

Достатньою ознакою виконання цих положень є умови:

$$F_{u'u'} F_{uu} - (F_{uu'})^2 > 0\,, \quad F_{u'u'} > 0\,. \tag{16}$$

Наприкінці покажемо, як за допомогою перетворення Фрідріхса перехід від проблеми мінімуму до проблеми максимуму можна вивести безпосередньо при виконанні умов (16). При цьому отримаємо також перетворення Фрідріхса. Формула Тейлора при виконанні нерівностей (16) приводить до нерівності:

$$F(u,u') - F(v,v') - (u - v) F_v - (u' - v') F_{v'} \geq 0$$

і рівність буде лише при $u = v$ і $u' = v'$. Якщо записати цей вираз у формі

$$F(u,u') - \left[F(v,v') - v F_v - v' F_{v'} \right] - u F_v - u' F_{v'} \geq 0\,,$$

і за допомогою перетворення Лежандра замість змінних v і v' ввести нові змінні p і p'

$$p = F_{v'}\,, \ p' = F_v\,, \ \Psi(x, p, p') = v p' + v' p - F\,,$$

то для будь-яких u, u', p, p' має місце нерівність:

$$F(x,u,u') + \Psi(x,p,p') - u p' - u' p \geq 0$$

і рівність буде лише тоді, коли функціям p і p' відповідають функції $v = u$ і $v' = u'$.

Якщо проінтегрувати останню нерівність в межах від x_0 до x_1, припускаючи, що u, u', p, p' є функціями від x, що задовольняють умови:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u' = 0\,, \ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p' = 0\,, \ u(x_0) - u_0 = 0\,, \ u(x_1) - u_1 = 0\,,$$

то переконаємося, що інтеграл від лівої частини нерівності ніколи не є від'ємним і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли функція u є розв'язком задачі І', а p є розв'язком задачі 4'.

Таким чином, задача

$$\int_{x_0}^{x_1} [F+\Psi-up'-u'p]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} \Psi\mathrm{d}x + u_0 p(x_0) - u_1 p(x_1) = \min$$

при вказаних попередніх умовах має своїм розв'язком ці значення функцій u і p і мінімум дорівнює нулю. Але це твердження рівносильне наведеній вище теоремі щодо взаємовідношення між задачами 1' і 4'.

Приведення варіаційної задачі до канонічного вигляду. Наведений вище в загальному вигляді принцип перетворення охоплює інше, давно відоме і важливе перетворення варіаційних проблем, а саме, приведення цих задач до канонічного вигляду. Диференціальне рівняння Ейлера другого порядку замінюється при цьому перетворенні системою диференціальних рівнянь першого порядку. Це перетворення, яке не має аналогій серед перетворень звичайних задач екстремуму, полягає у приєднанні до задачі 2 рівнянь (14) як попередніх умов. В результаті спочатку отримаємо задачу

2а. Знайти стаціонарне значення інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,u,u') + F_{u'}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u'\right) \right] \mathrm{d}x$$

при граничних умовах $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$, де u і u' є незалежними функціональними аргументами.

Тепер замість u' введемо новий функціональний аргумент[1]

$$p = F_{u'},$$

а замість підінтегрального виразу $F(x,u,u')$ введемо новий підінтегральний вираз:

$$\Phi(x,u,p) = pu' - F(x,u,u')$$

(припустимо, що $F_{u'u'} \neq 0$, отже з рівняння $p = F_{u'}$, можна виразити u' як функцію від p, u і x). В результаті отримаємо таку еквівалентну задачу.

2б. Знайти стаціонарне значення інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \Phi(x,u,p) \right] \mathrm{d}x$$

при граничних умовах $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$. Вирази в еквівалентних задачах 1 і 2б пов'язані між собою *перетворенням Лежандра*

$$F_{u'} = p, \quad pu' - F = \Phi,$$

оберненим перетворенням якого є, як легко бачити, перетворення

---

[1] Таким чином, p дорівнює множнику Лагранжа задачі 2.

$$\Phi_p = u', \quad pu' - \Phi = F .$$

Такий вигляд варіаційної задачі називається *канонічним виглядом.* Прирівнюючи нулю варіацію цього інтеграла по p і u, дістанемо *канонічні диференціальні рівняння варіаційної задачі*:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \Phi_u = 0 , \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \Phi_p = 0 .$$

Аналогічно можна привести до канонічного виду і варіаційну задачу з n невідомими функціями $u_1(x), \dots, u_n(x)$.

Щодо характеру екстремуму, то не обговорюючи необхідні умови, сформулюємо такий результат. Якщо для задачі 1 є мінімум *d,* то це число *d* буде в канонічній задачі найбільшим з найменших значень в тому розумінні, що для знаходження *d* треба спочатку, варіюючи *u* при сталому *p,* знайти найменше значення функціонала, а потім, варіюючи *p,* знайти найбільше з цих найменших значень, залежних від функції *p.*

Наведену вище теорію варіаційних проблем можна безпосередньо розповсюдити як на випадок перетворень задач, що містять кілька невідомих функцій і похідні вищих порядків, так і на ті задачі, в яких функціональний аргумент є функцією багатьох змінних.

4.3.2. Перетворення Фрідріхса

> *Значення принципу Кастільяно полягає в теоретичному відношенні у тому, що він є дуже важливим прикладом, який підтверджує загальний закон двоїстості варіаційних задач.*
>
> Р. Курант, Д. Гільберт

Наведемо у загальному випадку послідовність перетворення Фрідріхса.

1. Розглядається варіаційна задача на умовний екстремум для функціонала $\Pi(u)$.

Природні умови $\delta\Pi(u) = 0$ з урахуванням подальшого перетворення у новий функціонал можна представити у вигляді:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = A(u, \lambda(u)) = B(u) .$$

Додаткові умови – $\varphi(u) = 0$.

2. Будується повний функціонал

$$\Pi_{\text{п}}(u, \lambda) = \Pi(u) + \lambda\varphi(u) .$$

Умови стаціонарності:

$$\frac{\partial \Pi_{\text{п}}(u, \lambda)}{\partial u} = A(u, \lambda) = 0 ,$$

або виключаючи λ ,

$$A\big(u,\lambda(u)\big)=B(u)=0\,,\quad \frac{\partial\Pi_{\text{п}}(u,\lambda)}{\partial\lambda}=\varphi(u)=0\,.$$

3. Будується функціонал $\Pi_1(u,\lambda)$ і відповідна варіаційна задача $\delta\Pi_1(u,\lambda)=0$ при додатковій умові $\dfrac{\partial\Pi_1(u,\lambda)}{\partial u}=A(u,\lambda)=0$. Умова стаціонарності дає $\dfrac{\partial\Pi_1(u,\lambda)}{\partial\lambda}=$ $=\varphi(u)=0.$

4. Якщо рівняння $\dfrac{\partial\Pi_{\text{п}}}{\partial u}=A(u,\lambda)$ при кожному λ дозволяє однозначно виразити u через λ, здійснюється перехід до функціонала $\Pi_2(\lambda)$. Додатковою умовою для $\Pi_2(\lambda)$ є рівняння $A(u,\lambda)=A(u(\lambda),\lambda)=B(\lambda)$, отримане із $A(u,\lambda)=0$ після виключення u. Умова стаціонарності функціонала $\Pi_2(\lambda)-\varphi(\lambda)=0$. Таким чином, додаткові умови функціонала $\Pi_2(\lambda)$ є рівняннями, еквівалентними умовам стаціонарності функціонала $\Pi(u)$, а умови стаціонарності функціонала $\Pi_2(\lambda)$ є перетвореними додатковими умовами до функціонала $\Pi(u)$.

4.3.3. Перетворення варіаційних принципів

Теорія Куранта-Гільберта [Курант, Гільберт, 1951] дозволяє здійснювати перетворення варіаційних принципів.

Далі наведено послідовне перетворення за методом множників Лагранжа функціонала Лагранжа у першу форму функціонала Рейсснера за допомогою перетворення Лежандра і далі – у функціонал Кастільяно. Перетворення функціонала Лагранжа у функціонал Кастільяно і функціонала Кастільяно у функціонал Лагранжа передбачає взаємну заміну природних і додаткових умов для функціоналів і має назву перетворення Фрідріхса.

Розглянемо функціонал Лагранжа для задачі про згин балки [Баженов, 2014].

$$\Pi^{\text{Л}}=\frac{1}{2}\int_a^b EI\kappa^2\mathrm{d}x-\int_a^b qw\mathrm{d}x-\bar{M}'w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}\,,\ \kappa=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\in a,b\,,\ w,w'\Big|_{a_2}^{b_2}=\bar{w},\bar{w}'$$

$$\Pi^*=\frac{1}{2}\int_a^b EI\kappa^2\mathrm{d}x-\int_a^b qw\mathrm{d}x-\bar{M}'w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}+\int_a^b\lambda\left(\kappa+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x+\mu_1\left(w-\bar{w}\right)\Big|_{a_2}^{b_2}+\mu_2\left(w'-\bar{w}'\right)\Big|_{a_2}^{b_2}\,,$$

$$F_w=-q\;;\;F_{w''}=\lambda,$$

$$\delta\Pi=-\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}\delta w\Big|_a^b+\lambda\delta w'\Big|_a^b-\bar{M}'\delta w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}\delta\bar{w}'\Big|_{a_1}^{b_1}+\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}x^2}-q\right)\delta w\mathrm{d}x+\mu_1\delta w\Big|_{a_2}^{b_2}+\mu_2\delta w'\Big|_{a_2}^{b_2}\,,$$

$$\lambda=-M\,,$$

$$M'\delta w\Big|_{a_1}^{b_1}-M\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1}-\bar{M}'\delta w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1}+M'\delta w\Big|_{a_2}^{b_2}-M\delta w'\Big|_{a_2}^{b_2}+\mu_1\delta w\Big|_{a_2}^{b_2}+\mu_2\delta w'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$M'=\bar{M}';\;\; M=\bar{M}\,,\;\; \frac{\mu_1=-M'}{\mu_2=M}\Bigg|_{a_2}^{b_2},\;\; M,M'\Big|_{a_1}^{b_1}=\bar{M},\bar{M},$$

$$\Pi^*=\frac{1}{2}\int_a^b EI\kappa^2 dx-\int_a^b qw\mathrm{d}x-\bar{M}'w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}+$$

$$+\int_a^b(-M)\left(\kappa+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}x-M'(w-\bar{w})\Big|_{a_2}^{b_2}+M(w'-\bar{w}')\Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Перша форма функціонала Рейсснера

$$\Pi_1^{\mathrm{P}}=-\frac{1}{2}\int_0^l EI\kappa^2\mathrm{d}x-\int_a^b qw\mathrm{d}x-\int_a^b M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x-\bar{M}w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}-M'(w-\bar{w})\Big|_{a_2}^{b_2}+M(w'-\bar{w}')\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$-\int_a^b M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=-\int_a^b w\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x-Mw'\Big|_a^b+M'w\Big|_a^b,$$

$$\Pi_1^{\mathrm{P}}=-\int_a^b EI\kappa^2\mathrm{d}x-\int_a^b w\left(\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q\right)dx-Mw'\Big|_{a_1}^{b_1}+M'w\Big|_{a_1}^{b_1}-$$

$$-Mw'\Big|_{a_2}^{b_2}+M'w\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{M}w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}-M'(w-\bar{w})\Big|_{a_2}^{b_2}+M(w'-\bar{w}')\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\delta w\to\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q=0,$$

$$\Pi_1^{\mathrm{P}}=-\frac{1}{2}\int_a^b EI\kappa^2\mathrm{d}x-\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q\right)w\mathrm{d}x-Mw'\Big|_{a_1}^{b_1}+M'w\Big|_{a_1}^{b_1}+M\bar{w}\Big|_{a_2}^{b_2}-M\bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

Формула Кастільяно

$$\Pi^{\mathrm{K}}=-\int_a^b\frac{M^2}{2EI}+M'\bar{w}\Big|_{a_2}^{b_2}-M\bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=-q\in a,b,\quad M,M'\Big|_{a_1}^{b_1}=\bar{M},\bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Розглянемо функціонал Кастільяно.

$$\Pi^{\mathrm{K}}=-\int_a^b \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x+\bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'M\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=-q\in a,b,\quad M,M'\Big|_{a_1}^{b_1}=\bar{M},\bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\Pi^{\mathrm{K}}=-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x+\int_a^b \lambda\left(\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q\right)\mathrm{d}x+\bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'M\Big|_{a_2}^{b_2}+\mu_1\left(M-\bar{M}\right)\Big|_{a_1}^{b_1}+\mu_2\left(M'-\bar{M}'\right)\Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$F_M=-\frac{M}{EI};\ F_{M''}=\lambda,\ \int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}x^2}-\frac{M}{EI}\right)\delta M\mathrm{d}x,$$

$$\delta\Pi^{\mathrm{K}}=-\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}\delta M\Big|_a^b+\lambda\delta M'\Big|_a^b+\bar{w}\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'\delta M+\mu_1\delta M\Big|_{a_1}^{b_1}+\mu_2\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\lambda=-w,$$

$$w'\delta M\Big|_{a_1}^{b_1}-w\delta M'\Big|_{a_1}^{b_1}+w'\delta M\Big|_{a_2}^{b_2}-w\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2}+\bar{w}\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'\delta M\Big|_{a_2}^{b_2}+\mu_1\delta M\Big|_{a_1}^{b_1}+\mu_2\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$w,w'\Big|_{a_2}^{b_2}=\bar{w},\bar{w}',\quad w'=\bar{w}',\ w=\bar{w},\quad \frac{\mu_1=-w'}{\mu_2=w}\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Друга форма функціонала Рейсснера

$$\Pi_2^{\mathrm{P}}=-\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x-\int_a^b w\left(\frac{d^2M}{dx^2}+q\right)\mathrm{d}x+\bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2}-$$

$$-\bar{w}'M\Big|_{a_2}^{b_2}-w'\left(M-\bar{M}\right)\Big|_{a_1}^{b_1}+w\left(M'-\bar{M}'\right)\Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$-\int_a^b w\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x=-\int_a^b M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x+Mw'\Big|_a^b-M'w\Big|_a^b,$$

$$\Pi_2^{\mathrm{P}}=-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x-\int_a^b M\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x-\int_a^b qw\mathrm{d}x+Mw'\Big|_{a_1}^{b_1}-M'w\Big|_{a_1}^{b_1}+$$

$$+Mw'\Big|_{a_2}^{b_2}-M'w\Big|_{a_2}^{b_2}+\bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'M\Big|_{a_2}^{b_2}-w'\left(M-\bar{M}\right)\Big|_{a_1}^{b_1}+w\left(M'-\bar{M}'\right)\Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$\delta M\to\frac{M}{EI}=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}.$$

Формула Лагранжа

$$\Pi^{\text{Л}} = \frac{1}{2}\int_a^b EI\left(w''\right)^2 \mathrm{d}x - \int_a^b qw\mathrm{d}x + w'\bar{M}\Big|_{a_1}^{b_1} - w\bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1},$$

$$w, w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2}.$$

4.3.4. Висновки

Наведемо деякі висновки перетворення варіаційних задач.

1. Теорія Р. Куранта і Д. Гільберта будується на основі таких положень. Будь-яку із умов стаціонарності функціонала можна включити до додаткових умов, така варіаційна задача буде еквівалентна вихідній. Друге положення полягає у використанні методу множників Лагранжа для урахування додаткових умов і отримання еквівалентних варіаційних задач. У багатьох задачах, наприклад, для опуклих функцій, використання наведених положень, дозволяє відслідкувати також зміну екстремальних властивостей функціоналів. У ряді задач без обмежень можна штучно ввести додаткові умови, щоб потім внести їх до функціонала за допомогою множників Лагранжа і проводити подальші перетворення. Це дозволяє отримати різні формулювання однієї і тієї ж варіаційної задачі із різними змінними і, зокрема, здійснити важливе перетворення Фрідріхса.

2. Теорія перетворення варіаційних проблем Р. Куранта і Д. Гільберта дозволяє поставити у відповідність один одному різні функціонали з додатковими умовами і побудувати повний функціонал без будь-яких додаткових умов, із якого як частинні випадки можна отримати всі можливі функціонали з додатковими умовами і сформульовані вище відповідні частинні варіаційні принципи.

3. Повними функціоналами називаються функціонали, для яких варіаційна задача формулюється без додаткових умов і охоплює усі компоненти простору станів. При цьому під основним простором станів розуміють сукупність полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль).

Повний функціонал є найзагальнішою енергетичною характеристикою даної системи, оскільки, з одного боку, з повного функціонала можна отримати усі можливі частинні функціонали у даному просторі, з іншого – його досить для визначення усіх компонентів полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль), тобто для повного розв’язання задачі у даному просторі станів.

4. Функціонали, для яких варіаційна задача формулюється з додатковими умовами, що визначають підпростір у обраному просторі станів, мають назву частинних функціоналів.

Частинні функціонали отримуються із повних шляхом введення додаткових умов на деякі компоненти даного простору станів.

5. Таким чином, у обраному просторі станів поняття повного і частинного функціоналів визначені і мають абсолютний характер. Разом з тим при переході від одного простору до іншого ці поняття стають відносними. Тобто повний функціонал, визначений у деякому просторі, можна розглядати як частинний у розширеному просторі. Він є частинним по відношенню до повного функціонала у розширеному просторі.

6. Загальний варіаційний принцип формулюється так: дійсні поля параметрів напружено-деформованого стану системи надають повному функціоналу стаціонарне значення.

7. Загальна варіаційна теорема. Рівняння Ейлера і природні граничні умови (природні умови функціонала) містять у собі повну систему рівнянь і граничних умов даної теорії, які виражені через компоненти відповідного простору станів.

Як правило, можна дати більш детальне формулювання загального варіаційного принципу: дійсному напружено-деформованому стану системи відповідає не просто стаціонарне значення, а мінімакс (або максімін, або сідлова точка) повного функціонала. Виключенням є функціонали, які не мають екстремумів, ні мінімаксів, ні максімінів.

Давид Гільберт,
нім. David Hilbert
(1862 – 1943)

8. Частинний варіаційний принцип формулюється так: дійсні поля параметрів напружено-деформованого стану системи, які задовольняють дані обмеження у вигляді додаткових умов, надають частинному функціоналу стаціонарне значення при даних додаткових умовах, тобто у підпросторі даного простору станів.

Як правило, частинний функціонал має не просто стаціонарне значення, а умовний екстремум, або мінімакс, або максімін, або сідлову точку.

9. Частинна варіаційна теорема. Рівняння Ейлера і природні граничні умови задачі на умовне стаціонарне значення частинного функціонала (природні умови функціонала) разом з додатковими умовами складають повну систему рівнянь і граничних умов даної теорії.

Давид Гільберт (1862 - 1943) – німецький математик. У 1910-1920 рр. (після смерті Анрі Пуанкаре) був визнаним світовим лідером математиків. Ім’ям Д. Гільберта названий простір, що узагальнює поняття евклідового простору на нескінченновимірний випадок (гільбертів простір). Розвивав і удосконалював методи варіаційного числення. У 1924 р. разом із Р. Курантом опублікував книгу «Методи математичної фізики». Вплив наукових досліджень Д. Гільберта на розвиток сучасної математики дуже значний. Д. Гільберт стверджував, що математика і природознавство є єдиним і що у математиці нема проблем, які не вирішуються. Це твердження міститься в знаменитому висловлюванні Д. Гільберта: "Будь-яку задачу варіаційного числення можна розв'язати, якщо тільки слову “розв’язок” надати відповідний сенс" [Янг, 1974].

Зрозуміло, здоровий глузд і не міг підказати нічого іншого! Адже концептуальні методи породжені практикою і невіддільні від неї. Роботи Д. Гільберта - яскрава демонстрація тріумфу концептуальних методів. Нехай інші пишуть неосяжні статті, в яких майже неможливо розібратися (хоча іноді в них містяться чудові результати); не такий був стиль Д. Гільберта. Навіть фрази у нього були короткими, що дуже нетипово для німецької мови. Технічна сторона його доведень настільки бездоганна, що його роботи найменше схожі на перші дослідження в абсолютно новій галузі (якими вони були насправді). Навпаки, справляється враження, ніби в цих роботах викладаються остаточні результати давно усталених теорій, а саме цей виклад доведений до досконалості.

Зараз всім відомі досягнення математики в тих напрямках, які окреслив Д. Гільберт. Однак вражаюча ясність і майстерність гільбертових робіт відомі зовсім не кожному: все це було, на жаль, безповоротно втрачено згодом в потоці псевдопростих словесних хитрощів, в якому, Д. Гільберт навряд чи впізнав би свої ідеї. Якось Д. Гільберт навіть запитав: «А що це таке - гільбертів простір, про який ви говорите?».

Кожен серйозний студент-математик зобов’язаний прочитати хоча б одну з численних книг, статей або курсів лекцій Д. Гільберта. Крім того, завжди корисно бачити за сухими рядками статті живий образ її автора; тому студентам рекомендується якомога більше дізнатися про особистість самого Д. Гільберта.

Підхід Д. Гільберта до питань існування у варіаційному численні викладений у його відомій роботі «Про принцип Діріхле». Як зазначав Л. Янг [Янг, 1974], замість того щоб розвивати загальну теорію, він ілюструє свої методи на конкретних прикладах. З цієї причини його теореми існування формулюють по-різному, причому кожен автор наводить свій варіант. Наприклад, можна застосувати методи Д. Гільберта не в евклідовому просторі, а на деякому гладкому многовиді; одним з найцікавіших формулювань є загальне «мінімаксне» формулювання теореми існування, що належить Марстону Морсу. Ідейна сторона гільбертового підходу ясна з наведеної вище цитати і не пов’язана з такими обмеженнями. Сенс цього висловлювання Д. Гільберта зводиться до того, що для теорем існування важливі не стільки процедури доведень, скільки ретельно продумані означення. Це робить Д. Гільберта родоначальником методу, який зараз широко використовується у всьому аналізі і відомий під назвою «методу слабких розв'язків». У результаті такого підходу виникла, наприклад, теорія узагальнених функцій (розподілів) Шварца. Крім того, це висловлювання Д. Гільберта стало поштовхом до виникнення низки теорій. Просто не віриться, що все це стало результатом одного-єдиного висловлювання! Це взагалі дуже характерно для творчості Д. Гільберта; так, поняття простору Хаусдорфа вперше з'явилося у підрядковій виносці в одній з робіт Д. Гільберта, що зайвий раз показує, наскільки неточною стала наша сучасна термінологія.

НАРИС 5

ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. ВЕЄРШТРАСС, ЕРДМАН, ЯКОБІ

Кінцева мета, яку завжди треба мати на увазі, полягає у тому, щоб зрозуміти основи .

К. Веєрштрасс

Математика належить до числа тих наук, які зрозумілі самі по собі .

К. Якобі

5.1. Достатні умови слабкого екстремуму. Якобі

Задача знаходження умов, достатніх для існування екстремуму, пов'язана з питанням класифікації екстремумів.

Сильним відносним мінімумом називається мінімальне значення $J(\widetilde{y})$, яке досягається функціоналом $J(y)$ на кривій $\widetilde{y}(x)$, $x_1 \le x \le x_2$, таке, що

$$J(\widetilde{y}) \le J(y) \tag{1}$$

для всіх кривих порівняння $y(x)$, що задовольняють умову ε-близькості нульового порядку:

$$\left| y(x) - \widetilde{y}(x) \right| \le \varepsilon \tag{2}$$

на всьому проміжку $[x_1, x_2]$. Припускається, що криві $\widetilde{y}(x)$ і $y(x)$ задовольняють задані граничні умови.

Якщо, крім умови (2), що вимагає ε-близькість по ординаті, додати умову ε-близькості по похідній:

$$\left| y'(x) - \widetilde{y}'(x) \right| \le \varepsilon \tag{3}$$

на всьому проміжку $[x_1, x_2]$, то кажуть про умову ε-близькості першого порядку.

Значення, що досягається функціоналом $J(y)$ на кривій $\widetilde{y}(x)$, для якого нерівність (1) виконується для всіх кривих порівняння $y(x)$, що задовольняють умову ε-близькості першого порядку, називається *слабким відносним мінімумом.*

Термін «сильний» підкреслює, що на криві порівняння $y(x)$ накладається умова (2) ε-близькості тільки по $y(x)$ на всьому проміжку $[x_1, x_2]$, тоді як за похідною криві $y(x)$ і $\widetilde{y}(x)$ можуть відрізнятися як завгодно «сильно».

Оскільки умова ε-близькості нульового порядку (2) виділяє ширший клас кривих порівняно з класом кривих, що виділяється умовою ε-близькості першого порядку (2), (3), то будь-який сильний мінімум є водночас слабким мінімумом, але не всякий слабкий мінімум є сильним. Через зазначену відмінність необхідні, а також достатні умови оптимальності для сильного і слабкого відносного мінімуму мають неоднаковий вигляд.

Поряд з поняттям сильного відносного мінімуму, можна ввести поняття абсолютного мінімуму. *Абсолютний мінімум* – це мінімальне значення $J(\widetilde{y})$, що досягається функціоналом $J(y)$ на всій множині кривих, на яких функціонал $J(y)$ має сенс. Абсолютний мінімум є глобальним, а сильний і слабкий відносні мінімуми – локальними мінімумами. Абсолютний мінімум є водночас і сильним відносним мінімумом, але не всякий сильний відносний мінімум є абсолютним мінімумом.

Варіаційну задачу, що має більше одного сильного відносного мінімуму, називають багатоекстремальною задачею. Для задач, в яких сильний відносний мінімум єдиний, необхідні умови оптимальності сильного відносного мінімуму є одночасно достатніми умовами абсолютного мінімуму. Такою є, наприклад, ситуація в теорії оптимального управління для лінійних задач оптимальної швидкодії, а також для деяких інших класів задач варіаційного числення.

Отже, в разі слабкого екстремуму шукана крива $y(x)$ порівнюється з кривими, які мало відрізняються від неї як за положенням в просторі, так і за величиною похідної, тобто за напрямком дотичної. У цьому випадку обидві величини δy і $\delta y'$ можна розглядати як нескінченно малі.

У методі варіацій різниця

$$\int_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

розкладається за формулою Тейлора, причому величини δy і $\delta y'$ необхідно вважати нескінченно малими, що в XVIII ст. припускалося за умовчанням. Тому метод варіацій можна застосовувати тільки для вивчення слабкого екстремуму. Зауважимо, що будь-яка умова, необхідна для слабкого екстремуму, необхідна також для сильного і для абсолютного екстремумів, і, зокрема, для всіх видів екстремумів необхідно, щоб шукана крива задовольняла рівняння Ейлера. Навпаки, достатні умови, знайдені в припущенні, що δy і $\delta y'$ нескінченно малі, забезпечують існування тільки слабкого екстремуму і недостатні для сильного і абсолютного екстремумів.

Поняття про різні види екстремумів складалося в математиці поступово. Різниця між абсолютним і відносним екстремумами була помічена наприкінці XVIII ст. Різниця між сильним і слабким екстремумами була виявлена тільки в другій половині XIX ст. Формування цих понять відбувалося у зв'язку з дослідженням нових варіаційних задач.

У конкретних варіаційних задачах, які розглядалися на перших етапах розвитку варіаційного числення, фізичні, механічні або геометричні міркування зазвичай давали можливість встановити, що крива, отримана як розв’язок рівняння Ейлера, дає екстремум і що це абсолютний екстремум. Цей висновок поширювався на всі варіаційні задачі. Тим часом з'явився ряд варіаційних задач, розгляд яких ставив під сумнів справедливість цих поглядів. Перш за все спростовувалося уявлення про те, що екстремум, який дає крива, що задовольняє рівняння Ейлера, є абсолютним.

У мемуарах «Про чудовий парадокс, що зустрічається в аналізі максимумів і мінімумів» (De insigni paradoxo quod in analysi maximorum el minimorum occurrit, Mem. Ac. St. Pe'tersbourg, (1809-1810, 1811), Ейлер шукав екстремум інтеграла

$$\int \sqrt{x(1+y'^2)}\mathrm{d}x.$$

Рівняння Ейлера в цьому випадку має вигляд

$$\mathrm{d}\frac{y'\sqrt{x}}{\sqrt{1+y'^2}} = 0. \tag{5}$$

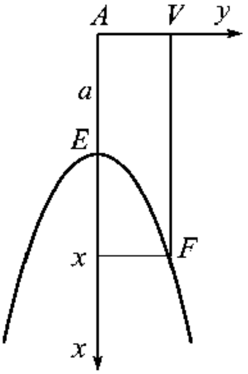


Рис. 1

Його розв'язком $y = 2\sqrt{ax - a^2} + b$ при $b = 0$ є парабола $y = 2\sqrt{ax - a^2}$ з вершиною в точці $y = 0$, $x = a$ (рис. 1).

Ейлер обчислив значення інтеграла, що відповідає відрізку параболи *EF*, і значення цього інтеграла на ламаній *EAVF*. Виявилося, що значення інтеграла вздовж ламаної при певних *x* і *a* менше, ніж значення інтеграла вздовж параболи. В цьому і полягає парадокс - адже парабола повинна надавати мінімум інтегралу. Ейлер зауважив, що ламана також задовольняє диференціальне рівняння (5). Для пояснення парадоксу Ейлер використовував аналогію з диференціальним численням. Він вказав, що досліджуваний там екстремум функції носить локальний характер. Ейлер писав: «Втім, досить відомо, що одна і та ж крива лінія часто може містити багато мінімальних ординат, які між собою дуже різняться, тільки б кожна ордината була меншою, ніж обидві прилеглі до неї. Звідси також можна зрозуміти, що, оскільки числення приводить нас до двох кривих між точками *F* і *E*, значення для тієї і іншої має бути мінімальним, хоча між собою вони дуже різняться» [Memoires de I'Acad sci. St. Pétersb, (1809–1810) 1811, c. 25].

Таким чином, Ейлер по суті прийшов до того, що екстремуми варіаційних задач можуть і не бути абсолютними, але сенс відносного екстремуму він ще не з'ясував.

Труднощі, пов'язані з характером екстремуму, виникли свого часу також в задачі Ньютона про тіло найменшого опору (див. нарис 2). Крива, яка задовольняє рівняння Ейлера, тут складається з двох гілок із загальною вершиною в точці *F*, в якій загальна дотична нахилена до осі *Ox* під кутом 60°. Гілки кривої необмежено віддаляються; на одній з них $p = y'$ зменшується від $\sqrt{3}$ до нуля, на другій - зростає від $\sqrt{3}$ до ∞ (рис. 2). Водночас було помічено, що мінімум може бути зменшений, а максимум збільшений, якщо криву замінити зиґзаґоподібною лінією.

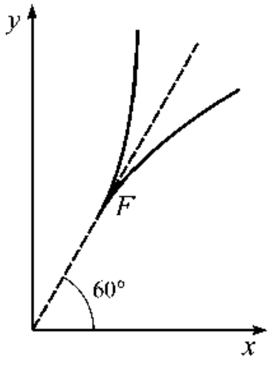


Рис. 2

У «Мемуарі про спосіб розрізнення максимумів і мінімумів у варіаційному численні» (Memoire sur la manière de distmguer les maxima et les minima dans le calcul des variations. Mem. Ac. Paris, 1786) [Legendre, 1788] французького математика А.М. Лежандра (1752-1833), доведено, що можна побудувати ламані, на яких інтеграл

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \int \frac{yy'^3}{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

досліджуваний в задачі, взятий між двома фіксованими точками, буде приймати як завгодно малі значення (а також і ламані, на яких він буде приймати як завгодно великі значення). Про криві, які задовольняють рівняння Ейлера в даній задачі, Лежандр пише, що вони дають інтегралу «відносні або випадкові екстремуми».

Таким чином, в XVIII ст. ще не був з'ясований сенс поняття відносного екстремуму. Вчені обмежувалися загальними зауваженнями про аналогію з диференціальним численням. Проблему вперше тільки через півстоліття уточнили Гамільтон і Якобі, які вказали, що у варіаційних задачах шукана крива порівнюється з «нескінченно близько прилеглими лініями». Але і вони ще не розрізняли слабкий і сильний екстремуми. Тим часом в задачі про тіло найменшого опору при заміні кривої ламаною не виконується умова малості $\delta y'$. Тому достатні умови, знайдені методом варіацій у припущенні, що δy і $\delta y'$ нескінченно малі, не забезпечують екстремумів в цій задачі.

Наведемо ще один приклад функціонала, що має слабкий екстремум, але не має сильного. Розглянемо функціонал

$$J=\int_0^1 [y'(x)]^3\,dx\to\min;\ y(0)=0,\ y(1)=1.$$

Екстремаллю цього функціонала, що задовольняє вказані граничні умови, є функція $y(x)=x$. Можна переконатися, що ця функція доставляє слабкий локальний мінімум.

Дійсно, якщо $h\in C_0^1([0,1])$

$$J(x+h)-J(x)=\int_0^1 (x'+h')^3\mathrm{d}x-\int_0^1 x'^3\mathrm{d}x=\int_0^1 (1+h')^3\mathrm{d}x-\int_0^1 1^3\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1 (3h'+3h'^2+h'^3)\mathrm{d}x=\int_0^1 h'^2(3+h')\mathrm{d}x.$$

Оскільки $\int_0^1 h'\mathrm{d}x=h(1)-h(0)=0$, то при $\|h\|_1<3$ маємо $3+h'(x)>0$ і $J(x+h)\geq J(x)$, тобто $y(x)=x$ доставляє слабкий мінімум функціоналу і

$$\min\int_0^1 [y'(x)]^3\,dx=\int_0^1 1^3\mathrm{d}x=1.$$

Щоб переконатися, що $y(x)=x$ не доставляє сильного мінімуму, розглянемо послідовність функцій $y_n(x)=y(x)+h_n(x)$, де

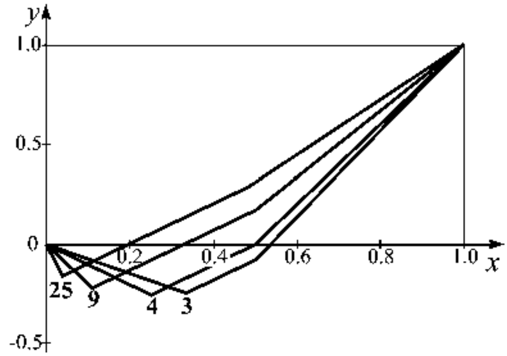


Рис. 3

$$h_n(x)=\begin{cases} -x\sqrt{n}\,, & x\in[0,1/n] \\ -\dfrac{1}{\sqrt{n}}, & x\in(1/n,1/2) \\ \dfrac{2}{\sqrt{n}}(x-1), & x\in[1/2,1] \end{cases}$$

Графіки функцій $y_n(x)$ при n=3, 4, 9, 25 наведені на рис. 3.

Для функцій $y_n(x)$

$$J(y_n)-J(y)=\int_0^1 \dot{h}_n^2(3+\dot{h}_n)\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{1/n} n(3-\sqrt{n})\mathrm{d}t+\int_{1/2}^1 \frac{4}{n}\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}t=3-\sqrt{n}+\frac{6}{n}+\frac{4}{n\sqrt{n}}\to-\infty \text{ при } n\to\infty\,,$$

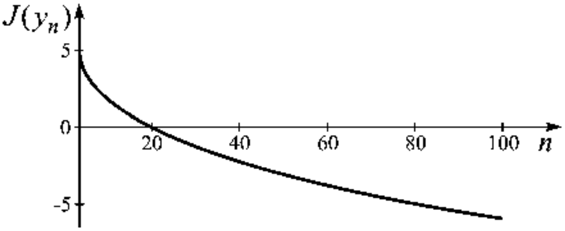


Рис. 4

тобто функція $y(x)=x$ не доставляє розглядуваному функціоналу сильного локального мінімуму. На рис. 4 показана залежність $J(y_n)$ від n.

Зауважимо, що до дослідження на екстремум функціоналу

$$v=\int_0^a y'^3\mathrm{d}x;\ y(0)=0;\,y(a)=b;\ a>0;b>0$$

Жозе́ф-Луї́ Лагра́нж,
фр. Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

зводиться задача про центральний розтяг стержня з нелінійною фізичною залежністю $\sigma=E\varepsilon^2$ (рис. 5,*а*,*б*). Розтяг спричиняє переміщення Δ на правому кінці.

Функціонал Лагранжа у цьому разі має вигляд

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\int_0^l F\left(\int_0^{\varepsilon}\sigma(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\right)\mathrm{d}x\,,$$

і при $\varepsilon=u'$, $\sigma=E\varepsilon^2=Eu'^2$ перетворюється на

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{1}{3}\int_0^l EFu'^3\mathrm{d}x$$

на відміну від звичайного виразу

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l EFu'^2\mathrm{d}x\,,$$

який виникає при використанні закону Гука.

Але за фізичним змістом в даній задачі має місце розтяг, тобто $u'>0$ (умова, аналогічна тій, що обгрунтовує «розумний» розв'язок відомої задачі Ньютона). Тому функція Вейерштрасса, яка згідно з [Эльсгольц, 1965, с. 360] для цієї задачі має вигляд

$$E(x,u,p,u')=(u'-p)^2(u'+2p)\,,\ p=\frac{b}{a}>0\,,$$

знак зберігає, і отже, достатні умови досягнення сильного екстремуму виконуються.

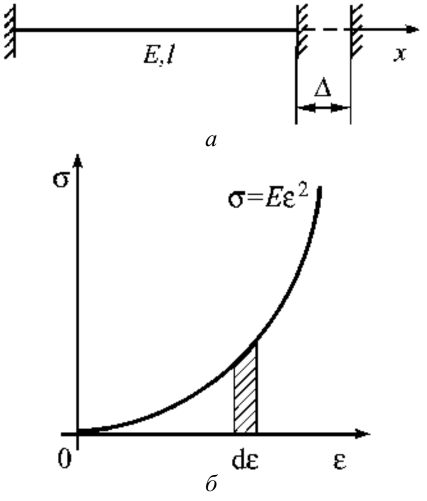


Рис. 5

Одним з найважливіших досягнень варіаційного числення першої половини XIX ст. є знаходження сукупності достатніх умов існування слабкого екстремуму. Вже згадувався «Мемуар про відмінність максимумів і мінімумів у варіаційному численні» Лежандра (1752 - 1833), виданий у 1788 р. [Legendre, 1788]. Він грунтується на аналогії з диференціальним численням, де, як відомо, для існування мінімуму функції $y(x)$ в деякій точці достатньо, щоб в цій точці виконувалися умови

$$y'=0,\quad y''>0.$$

Лежандр виходив з таких міркувань: для того щоб інтеграл досягав мінімуму на деякій кривій, достатньо, щоб уздовж цієї кривої на відрізку інтегрування виконувалися умови

$$\delta J=0,\quad \delta^2 J>0.$$

У найпростішій задачі варіаційного числення

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\mathrm{d}x\to\mathrm{extr},\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

він привів другу варіацію $\delta^2 J$ до вигляду

$$\delta^2 J=\int\limits_{x_0}^{x_1} f_{y'y'}\left(\delta y'+\frac{f_{yy'}+v}{f_{y'y'}}\delta y\right)^2\mathrm{d}x\,,$$

де $v(x)$ - розв'язок диференціального рівняння

$$f_{y'y'}\left(f_{yy}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\left(f_{yy'}+v\right)^2. \qquad (6)$$

Звідси Лежандр зробив висновок, що умова $f_{y'y'}>0$ є достатньою для існування мінімуму.

Карл Густав Якоб Якобі,
нім. Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851)

Досліджуючи задачу

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y',y'')\,\mathrm{d}x \to \mathrm{extr},$$

Лежандр ввів три допоміжні функції: v, v_1, v_2, які мають задовольняти систему диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\left(f_{yy}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\left(f_{yy'}+2v_1+\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}x}\right)=\left(f_{yy'}+v+\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x}\right)^2,\\ f_{y''y''}\left(f_{yy}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\left(f_{yy''}+v_1\right)^2, \qquad (7)\\ f_{y''y''}\left(f_{y'y'}+2v_1+\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}x}\right)=\left(f_{y'y''}+v_2\right)^2.\end{gathered}$$

Аналогічні міркування Лежандр навів і для загальнішої варіаційної задачі

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\,\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}.$$

Заперечення проти теорії Лежандра висунув у 1797 р. Лагранж в «Теорії аналітичних функцій» [Laplace, 1878-1912, т. 9]. Він зауважив, що твердження Лежандра справедливі тільки в тому разі, коли функції $v(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ не перетворюються на відрізку інтегрування $[x_0,x_1]$ в нескінченність.

Ніяких методів дослідження рівняння (6) і системи (7) не було. Вирішення проблеми зайшло в глухий кут.

Отже, до початку XIX ст. з'ясувалося, що умова Лежандра не гарантує наявності екстремуму у варіаційних задачах. Необхідно було доповнити дослідження Лежандра в новому напрямку. Справа в тому, що і рівняння Ейлера, і умова Лежандра $f_{y'y'}>0$ є «локальними», тобто «перевіряються» в окремих точках екстремалі. Але, наприклад, геодезична лінія на сфері в малій своїй частині дає мінімум; якщо ж її довжина більша, ніж довжина половини великого кола, то мінімуму вона не дає. Отже, необхідно було знайти якусь «глобальну» умову. Це зробив німецький математик Карл Густав Якоб Якобі (1804-1851) у 1837 р.

Якобі приділяв проблемі знаходження достатніх умов існування екстремуму багато уваги. У листі від 14 вересня 1837 р. до свого брата Б.С. Якобі, відомого фізика, згодом члена Петербурзької академії наук, він називав варіаційне числення, аналітичну механіку і теорію чисел своїм «полем бою», маючи на увазі те, що в цих областях науки він працює особливо завзято. Протягом кількох років Якобі читав лекції з варіаційного числення в Кенігсберзькому університеті. Відмітимо, що різнобічна математична творчість К. Якобі, його блискучий педагогічний талант, знаменитий сарказм, що страхав супротивників, дозволили йому не тільки широко впливати на сучасників, а й створити наукову школу. Для К. Якобі характерно постійне прагнення до нового, бажання змін, йому не вистачало спокою, необхідного для завершення логічно струнких побудов. Недарма він одного разу сказав: «Панове, для гауссової строгості у нас немає часу». Про математику Якобі зауважив: «Математика належить до числа тих наук, які зрозумілі самі по собі» («Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt»).

Щоб заповнити прогалину в теорії Лежандра, треба було розв'язати складену ним систему диференціальних рівнянь або показати, що ця система має розв'язок, скінченний на відрізку інтегрування $[x_0, x_1]$. Багато років працював Якобі над розв'язанням цієї задачі. Врешті решт, 20 грудня 1836 р. він пише братові [Briefwechsel..., 1907, с. 49]: «Я щасливо заповнив велику прогалину у варіаційному численні щодо критерію найбільшого і найменшого, над яким я, як ти знаєш, бився кілька років, завдяки тому що мені несподіваним чином вдалося за допомогою нового застосування прекрасного методу варіації сталих повністю проінтегрувати систему диференціальних рівнянь, інтегрування якої всіма відомими методами здавалося неможливим».

Результати Якобі містяться в статті «До теорії варіаційного числення і диференціальних рівнянь» [Jacobi,1837,a]. У 1842 р. І.Д. Соколов, виклавши у своїй роботі [Соколов,1842.] теорію Лежандра і наголосивши на необхідності заповнити прогалини, що в ній є, так писав про мемуар Якобі [Соколов,1842, с. 20]: «Довго геометри не знаходили ніяких засобів досягти цієї мети, навіть мали сумніви щодо можливості знайти будь-які для цього засоби. Але останнім часом кенігсберзький професор Якобі оголосив, що він зміг зробити вказане Лежандром перетворення. Дослідження Якобі щодо цього предмета ще не опубліковані. У 17-му томі журналу Крелле міститься тільки коротка вказівка на метод, яким він дійшов до шуканого перетворення».

Стаття, про яку говорить Соколов, - це єдина робота Якобі, присвячена достатнім умовам існування екстремумів у варіаційному численні. Вона містить тільки формулювання.

На початку мемуара Якобі вказує, що функція $v(x)$, яка є розв'язком рівняння Лежандра (6), має вигляд

$$v = -\left(f_{yy'} + \frac{1}{u} f_{y'y'} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right),$$

де

$$u = a\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + b\frac{\partial y}{\partial \alpha_2},$$

a і b - довільні сталі, $y(x, \alpha_1, \alpha_2)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння Ейлера

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0,$$

$y(x, \alpha_1, \alpha_2)$ залежить від двох довільних сталих: α_1 і α_2.

Таким чином, Якобі показав, що у разі, коли рівняння Ейлера проінтегроване, тобто знайдено сімейство екстремалей $y(x, \alpha_1, \alpha_2)$, то для вирішення питання про існування максимуму і мінімуму не треба проводити інше інтегрування. Шукану функцію можна утворити з похідних функції $y(x, \alpha_1, \alpha_2)$ по довільним сталим.

В задачі

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}$$

криві, що задовольняють рівняння Ейлера

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f_{y''} = 0,$$

залежать від чотирьох довільних сталих:

$$y(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

Якобі записав функції v, v_1, v_2, які є розв'язками системи (7), за допомогою функцій u і u_1, складених із похідних функцій $y(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ по довільним сталим:

$$u = a_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + a_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} + a_3 \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} + a_4 \frac{\partial y}{\partial \alpha_4},$$

$$u_1 = b_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + b_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} + b_3 \frac{\partial y}{\partial \alpha_3} + b_4 \frac{\partial y}{\partial \alpha_4},$$

де a_i, b_i (i=1,2,3,4) – довільні сталі.

Отже, для розв'язання системи (7), складеної Лежандром, і в цій задачі не треба робити будь-якого додаткового інтегрування, якщо знайдено загальний розв'язок рівняння Ейлера, що залежить від чотирьох довільних сталих. Якобі зазначає, що аналогічний результат справедливий і в загальному випадку, тобто в задачі

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}.$$

Далі Якобі говорить про основи свого методу: «Основне зерно знайденого результату полягає приблизно в таких розглядах. Відома для першої варіації форма

$$\int V \delta y \mathrm{d}x,$$

де $V = 0$ – рівняння, яке необхідно проінтегрувати. Отже, друга варіація має форму

$$\int \delta V \delta y \mathrm{d}x.$$

Якщо друга варіація не повинна змінювати знак, то вона не може і перетворюватися в нуль, отже, рівняння $\delta V = 0$, яке є лінійним відносно δy, не може мати розв'язку δy, для якого виконуються умови, необхідні для δy за природою проблеми. З цього бачимо, що рівняння $\delta V = 0$ відіграє в цих дослідженнях значну роль і скоро в дійсності виявиться його зв'язок з диференціальними рівняннями, які необхідно проінтегрувати для отримання критерію максимуму або мінімуму. Крім того, зараз же видно, що значенням δy, яке задовольняє диференціальне рівняння $\delta V = 0$, є кожна з частинних похідних від y по довільній сталій, яку y містить як інтеграл рівняння $V = 0$. Тому загальний вираз для δy отримують, якщо з усіх частинних похідних y утворюють лінійний вираз» [Jacobi, 1837a, с. 91].

Пояснимо коротко слова Якобі. Для найпростішої варіаційної задачі перша варіація має вигляд

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \right) \delta y \, \mathrm{d}x,$$

Якобі ввів позначення $V = f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}$ і отримав для першої варіації вираз $\int V \delta y \mathrm{d}x$.

Якщо функцію $y(x, \alpha_1, \alpha_2)$, яка є розв'язком рівняння

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0,$$

підставити в це рівняння, воно обернеться в тотожність. Продиференціюємо отриману тотожність по α_1. Дістанемо

$$f_{yy} \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + f_{yy'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(f_{yy'} \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + f_{y'y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha_1} \right) = 0.$$

Отже, функція $\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}$ є розв'язком диференціального рівняння

$$f_{yy} h(x) + f_{yy'} h'(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(f_{yy'} h(x) + f_{y'y'} h'(x) \right) = 0.$$

Так Якобі прийшов до рівняння, яке зараз носить його ім'я. Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Очевидно, що функція $\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}$ також є розв'язком цього диференціального рівняння. Якобі розглянув загальний розв'язок цього рівняння, що має вигляд

$$u = a \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + b \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}.$$

Отже, основний момент в даному міркуванні Якобі полягає в диференціюванні екстремалі $y(x, \alpha_1, \alpha_2)$ по довільним сталим α_1 і α_2. Він, таким чином, запропонував порівнювати екстремалі з різними значеннями α_1 і α_2. До Якобі шукану екстремаль $y(x)$ порівнювали з сусідніми кривими $y+\delta y$. При цьому δy розглядали як функцію від x.

Ейлер ще у 1744 р. вказував [Эйлер, 1934] на те, що екстремаль залежить від двох довільних сталих, але ці сталі використовувалися тільки для того, щоб з усіх екстремалей сімейства вибрати ту, що задовольняє задані граничні умови.

Сер Вільям Ровен Гамільтон, англ. Sir William Rowan Hamilton (1806-1865)

Порівняння екстремалей з різними значеннями α_1 і α_2, яке застосував Якобі для розв’язання задачі про знаходження екстремуму інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x,$$

провів Гамільтон при дослідженні інтеграла дії

$$\int_0^t 2T\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sum m(x'^2+y'^2+z'^2)\,\mathrm{d}t.$$

Він розглянув зміну інтеграла, яка відбувається при переході від шуканої траєкторії до сусідніх траєкторій.

Гамільтон дав розгорнуту характеристику свого методу: «Лагранж і інші, розглядаючи рух системи, показали, що варіація цього визначеного інтеграла зникає, коли дані крайні координати і стала *H*. Вони, мабуть, вивели з цього результату тільки добре відомий закон найменшої дії, а саме: 1) якщо уявити точки або тіла системи такими, що рухаються від даної групи початкових до даної групи кінцевих положень не так, як це насправді відбувається, і навіть не так, як вони могли б рухатися згідно із загальними законами динаміки або з диференціальними рівняннями руху, але так, щоб не порушувати будь-які можливі геометричні в'язі, а також ту єдину динамічну залежність між швидкостями і конфігураціями, яка становить закон живої сили; 2) якщо, окрім того, цей геометрично можливий, але динамічно неможливий рух змусити відрізнятися нескінченно мало від дійсного способу руху системи між заданими крайніми положеннями, то варійоване значення визначеного інтеграла, який називається дією або накопиченої живою силою системи, що знаходиться в представленому таким чином русі, буде відрізнятися нескінченно мало від дійсного значення цього інтеграла. Але коли цей закон найменшої або, як його краще було б назвати, стаціонарної дії застосовується до визначення фактичного руху системи, він служить тільки для того, щоб за правилами варіаційного числення отримати диференціальні рівняння руху другого порядку, які завжди можна отримати іншим шляхом. Тому Лагранж, Лаплас і Пуассон, мабуть, не без підстави зневажливо відгукувалися про корисність цього принципу при тодішньому стані динаміки. Можливо, що інший принцип, який вводиться в даній роботі під назвою закону змінної дії, в якому ми переходимо від дійсного руху до іншого, динамічно можливого руху, варіюючи крайні положення системи і в цілому величину H, і який служить для вираження у вигляді єдиної функції не тільки диференціальних рівнянь руху, але і їх проміжних і кінцевих інтегралів, зустріне іншу оцінку» [Вариационные принципы..., 1959, с. 180].

Гамільтон прямо підкреслював те нове, що лежить в основі його досліджень: раніше шукану траєкторію порівнювали з довільними сусідніми кривими, з «геометрично мислимими» рухами, а він пропонує порівнювати «динамічно можливий рух, варіюючи крайні положення системи», тобто порівнювати шукану траєкторію з сусідніми траєкторіями, змінюючи значення параметрів.

Робота Гамільтона опублікована у 1834 р. У тому ж році з нею познайомився Якобі і високо її оцінив. Відтоді він багато працював над теорією Гамільтона і згодом її значно вдосконалив.

У 1836 р. К. Якобі вирішив варіаційну проблему про достатні умови максимуму або мінімуму, що йому не вдавалося в попередні роки. Він написав про це братові Б.С. Якобі [Briefwechsel..., 1907, с. 49].

Все сказане дає підстави припускати, що диференціювання екстремалей по довільним сталим, яке відіграло основну роль у розв’язанні варіаційної проблеми, з'явилося у Якобі у зв'язку з його роботою над статтями Гамільтона. Справедливість висловленого припущення підтверджує ще одна обставина: сам Якобі неодноразово вказував на те, що своє відкриття він зробив завдяки застосуванню методу варіації сталих.

У листі до брата від 20 грудня 1836 р. Якобі пише [Briefwechsel..., 1907, с. 49], що йому вдалося проінтегрувати систему диференціальних рівнянь Лежандра «за допомогою нового застосування прекрасного методу варіації сталих». У «Замітці про інтегрування диференціальних рівнянь динаміки» Якобі про свою теорію другої варіації пише [Вариационные принципы..., 1959, с. 289]: «Тут можна також навести подробиці відкриття, про яке я раніше сповістив Академію: повне інтегрування диференціальних рівнянь, складених Лежандром, від яких залежить існування максимуму і мінімуму в ізопериметричній задачі. Метод, яким я користуюся, є новим і чудовим застосуванням відомого методу варіації сталих».

Метод варіації сталих широко застосовувався вченими XVIII і XIX ст. в механіці та астрономії. Якобі вперше застосував його в варіаційному численні. Перейдемо до подальшого аналізу його мемуара 1837 р.

Як відомо, рівняння Якобі можна подати в такому вигляді:

$$\left(f_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{yy'}\right)h(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_{y'y'}h'(x)\right)=0.$$

На цю обставину Якобі без доведення вказав у своєму мемуарі. У разі загальної задачі

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\,\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}$$

він стверджував, що відповідне рівняння має вигляд

$$Y = Ay + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A_1 y') + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(A_n y^{(n)}) = 0,$$

де $A, A_1, \ldots, A_n$ - функції від x.

Далі Якобі без доведення зазначив, що завдяки особливим властивостям рівняння $Y = 0$ другу варіацію досліджуваного інтеграла можна подати у вигляді

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} f_{y^{(n)}y^{(n)}} \omega^2 \, \mathrm{d}x.$$

Він вказав, що функції

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial \alpha_{2n}}$$

перетворюють у нуль другу варіацію $\delta^2 J$, і ввів функції $u_1, u_2, \ldots, u_n$, які мають вигляд

$$u_1 = a_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + a_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} + \ldots + a_{2n} \frac{\partial y}{\partial \alpha_{2n}},$$

$$u_2 = b_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + b_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} + \ldots + b_{2n} \frac{\partial y}{\partial \alpha_{2n}}, \text{ і т.д.}$$

Потім Якобі звернув увагу на те, що для розв’язання варіаційної проблеми необхідно знайти умови, за яких функції u_k не перетворюються у нуль. Після цього він сформулював свій критерій існування екстремуму таким чином.

«Якщо вищевказаний аналіз вимагає досить глибоких міркувань із області інтегрального числення, то виведений з нього критерій, дає рішення взагалі максимум чи мінімум, дуже просте. Я розгляну випадок, коли під знаком інтеграла стоїть функція y с похідними до порядку n включно, граничні значення $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, так само, як і самі границі, задані. Якщо підставити у розв'язки з їхніми $2n$ довільними сталими ці граничні значення, то довільні сталі будуть визначені. Але для цих сталих можна отримати кілька кривих, які задовольняють ті ж граничні умови і ті ж диференціальні рівняння. Якщо одна з таких кривих обрана, то розглядають одну граничну точку як закріплену і переходять від неї до наступних точок кривої. Якщо приймають одну з цих наступних точок за другу граничну точку, то, згідно зі сказаним, може статися, що через неї і першу точку проходять також інші криві, для яких $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ на обох границях мають ті ж самі значення і які задовольняють диференціальні рівняння варіаційної проблеми. Як тільки ми, рухаючись по кривій, досягнемо точки, для якої одна з цих інших кривих з нею збігається або, як можна сказати, до неї нескінченно наближається, то це - границя, до якої або за яку не можна поширити інтегрування, якщо максимум або мінімум повинен мати місце. Але якщо інтеграл поширений до точки, що лежить лівіше цієї границі, то завжди має місце максимум або мінімум за припущення, що $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$ між границями інтегрування зберігає свій знак» [Jacobi, 1837a, c. 93].

Проте, ані доведення цього критерію, ані натяку на спосіб його обгрунтування Якобі не навів. Таким чином, і ця частина мемуара, як і всі попередні, містить тільки формулювання.

Результати свого мемуара Якобі застосував до розв'язання задачі про рух точки на замкненій поверхні, при дослідженні якої виникла суперечка між Лагранжем і Пуассоном. Вони розглядали задачу

$$\int mV\mathrm{d}s \to \mathrm{extr}.$$

Лагранж стверджував [Лагранж, 1950б, т. 2, с. 207], що мова може йти тільки про мінімум. Пуассон вважав, що «в деяких випадках, наприклад в разі руху матеріальної точки по замкненій поверхні, мінімум можна замінити максимумом» (цит. за [Вариационные принципы..., 1959, с. 173]).

Цю суперечку вирішив Якобі. У лекціях з динаміки, прочитаних ним у зимовому семестрі 1842/43 р. і опублікованих у 1866 р., він говорив [Якоби, 1936, с.41]: «Найкоротші лінії зберігають свою властивість давати мінімум тільки між відомими границями. Наприклад, на сфері, де найкоротшими є великі кола, ця властивість не має місця, як тільки розглядається довжина, більша 180°. Щоб це побачити, не треба звертатися за допомогою до доповнення до 360°, що нічого не довело б, оскільки мінімуми повинні бути завжди тільки відносно нескінченно близько прилеглих ліній; ми переконуємося в цьому іншим способом».

Якобі навів таке доведення (рис. 6). Нехай B – полюс для A, $A\alpha B$ - дуга великого кола. Нескінченно близько до неї проводимо дугу великого кола $A\beta B$. Продовжимо велике коло $A\alpha B$ до точки C. Нехай точка β лежить нескінченно близько до точки B. Через β і C проведемо дугу великого кола. Тоді, очевидно, $\beta C < B\beta + BC$ і, отже, ламана лінія $A\beta + \beta C$ коротша, ніж велике коло $A\alpha BC$.

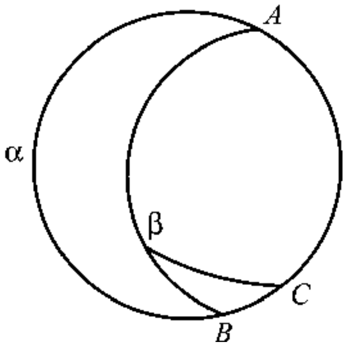


Рис. 6

Якобі вивчав тільки слабкий екстремум, хоча сам він на це обмеження не вказував. Дослідження сильного екстремуму було проведено в останній третині XIX ст. К. Веєрштрассом.

Обговоримо питання: що увійшло в варіаційне числення з роботою Якобі? Обмежимося для стислості найпростішою варіаційною задачею

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$$

Нехай $y(x)$ - дуга екстремалі, яка при $x = x_0$ проходить через фіксовану точку A з координатами (x_0, y_0). Якобі розглядає пучок екстремалей, що проходять через A. Якщо обвідна γ цього пучка має з кривою $y(x)$ спільну точку $B(\bar{x}, \bar{y})$, відмінну від A, то $\bar{x}$ - це та границя, про яку говорив Якобі в кінці свого мемуара. У сучасній термінології, що походить від лекцій Веєрштрасса, B називається точкою, спряженою з A. При цьому значення $\bar{x}$ називається спряженим зі значенням x_0.

У своєму мемуарі Якобі вказав, що якщо уздовж екстремалі $y(x)$ справджується умова Лежандра і якщо інтегрування поширене до точки x_1, де $x_1 < \bar{x}$, то крива $y(x)$ доставляє досліджуваному інтегралу максимальне або мінімальне значення в залежності від знака $f_{y'y'}$.

Отже, Якобі знайшов сукупність достатніх умов слабкого екстремуму. Він сформулював таку теорему: для того щоб крива $y(x)$ давала слабкий мінімум інтегралу $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ серед усіх кривих, що мають з нею спільні кінці $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$, достатньо, щоб виконувалися три умови:

1) крива $y(x)$ задовольняє рівняння Ейлера;

2) уздовж $y(x)$ має місце посилена умова Лежандра $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$;

3) інтервал $(x_0, x_1]$ не містить значень, спряжених з x_0.

Із умов Якобі випливає, зокрема, такий наслідок. Нехай вздовж деякої екстремалі $y = y(x)$ $a \le x \le b$ виконується $F''_{y'y'} > 0$, а коефіцієнти рівняння Якобі обмежені. Тоді *будь-який достатньо малий кусок цієї екстремалі* $a_1 \le x \le b_1$ *реалізує минімум фукціоналу* $\int\limits_{a_1}^{b_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ ($y(a_1) = \bar{y}(a_1)$, $y(b_1) = \bar{y}(b_1)$).

Аналогічне твердження справедливе і для функціоналів від кількох функцій, якщо матриця $(F''_{y'_i y'_j})$ має в кожній точці екстремалі всі додатні власні значення.

Зауважимо ще аналогічну властивість для функціоналів $\int\limits_{(G)} F(x, y, y'_x)\mathrm{d}G$ від функцій кількох змінних. Тут для реалізації мінімуму необхідно, щоб матриця $(F''_{p'_i p'_j})$ була невід'ємно визначеною, і достатньо, щоб вона була додатно визначеною, а область G – достатньо малою.

Ця локальна гарантованість екстремуму є особливо наочною при розгляді геодезичних ліній на заданій поверхні S, тобто ліній, довжина яких між будь-якими їхніми двома точками має стаціонарне значення.

Інакше кажучи, якщо мало змінити за відхиленням і за напрямком (тобто в сенсі C_1) будь-яку дугу (l_{AB}) такої лінії, не змінюючи кінців A, B цієї дуги і не виходячи із S, то довжина зміниться на малу вищого порядку. Оскільки відхилення на великій ділянці AB можна отримати в результаті накладення відхилень на малих ділянках (AB_1, A_1B_2 і A_2B на рис. 7), то достатньо вимагати, щоб довжина малих ділянок геодезичної лінія мала стаціонарне значення. (Це міркування має загальний характер, його можна застосувати і до інших варіаційних задач.) Але на малій ділянці завжди можна, вибравши відповідно декартові координати, задати поверхню рівнянням $z=\varphi(x,y)$, а лінію на ній – рівнянням $y=y(x)$, $z=\varphi(x,y(x))$. Отже, йдеться про стаціонарне значення функціоналу

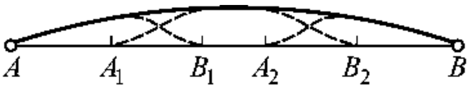


Рис. 7

$$\int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2+\left[\varphi'_x(x,y)+\varphi'_y(x,y)y'\right]^2}\,\mathrm{d}x \qquad (8)$$

при заданих значеннях $y(a)$, $y(b)$. Оскільки відповідне рівняння Ейлера другого порядку, то ми доходимо висновку, що через кожну точку S в кожному напрямку проходить рівно одна геодезична лінія. Оскільки $F''_{y'y'}>0$, то будь-яка мала дуга геодезичної лінії реалізує не тільки стаціонарне, але навіть мінімальне значення довжини (і можна показати, що не тільки слабкий, але навіть сильний мінімум).

Водночас великі ділянки геодезичних ліній можуть надавати довжині не мінімальне, а мінімаксне значення. Це добре видно, якщо за S взяти сферу, на якій геодезичними є дуги великих кіл, тобто перетинів сфери площинами, що проходять через її центр. Якщо така дуга менша півкола, то її довжина мінімальна порівняно з довжинами дуг з тими ж кінцями; можна уявити, наприклад, що між цими кінцями натягнута нитка, яка при такому натягу для будь-якої поверхні S має піти по геодезичній. Але якщо дуга великого кола більша півкола, то її довжина має мінімаксне значення, оскільки за допомогою як завгодно малої деформації цієї дуги, без зміщення її кінців, можна її довжину як збільшити, так і зменшити.

Якщо поверхня S довільна, то щоб з'ясувати, допоки геодезична лінія l, що виходить з деякої точки A, реалізує мінімум довжини, треба в силу умов Якобі взяти першу точку $\bar{A}$ перетину l з іншою геодезичною, що виходить із A по нескінченно близькому до l напрямку. Точка $\bar{A}$, спряжена з A вздовж l, і відокремлює дуги мінімальної довжини, з початком в A, від дуг мінімаксної довжини. Якщо зазначеного перетину немає, то всі дуги l з початком в A реалізують мінімальну довжину.

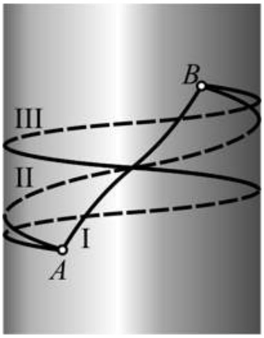


Рис. 8

На геодезичних лініях видно ще одну особливість багатьох задач варіаційного числення. Розглянемо дві точки A, B на поверхні прямого кругового циліндра (рис. 8). Оскільки при розгортанні циліндра на площину (як і при будь-якому згинанні поверхні без зміни довжин на ній) геодезичні переходять в геодезичні, а на площині геодезичними є прямі, то на прямому круговому циліндрі геодезичними є гвинтові лінії з довільним кроком h і їх граничні форми – кола (коли $h = 0$) і прямі ($h = \infty$). Однак точки A, B можна з'єднати нескінченною кількістю дуг гвинтових ліній (три з них показані на рис. 8), для кожної з яких довжина має мінімальне значення. Таким чином, задача про мінімальну довжину дуги, що з'єднує дві точки, має в даному разі нескінченну кількість розв'язків, з яких один реалізує тотальний мінімум (на рис. 8 це дуга *I*), а всі інші – тільки локальні. Така багатозначність розв'язання зустрічається в низці задач варіаційного числення, хоча, звичайно, вона зовсім не обов'язкова.

Геодезичні лінії на поверхні S мають цікаву механічну інтерпретацію, для отримання якої запишемо функціонал (8) в параметричній формі

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$$

зі скінченною в'яззю $H(x,y,z) = 0$ – рівнянням поверхні S. Щоб отримати геодезичні треба написати систему рівнянь Ейлера для допоміжної функції

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \lambda(t)H(x,y,z).$$

Це дає

$$-\lambda(t)H'_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \text{ і т.д.}$$

Помноживши ці рівняння на орти осей і додавши результати, дістанемо

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} + \lambda(t)\,\mathrm{grad}H = 0,$$

де τ – одиничний вектор дотичної до шуканої лінії L. Але оскільки вектор $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}$ спрямований по головній нормалі до L, а вектор $\mathrm{grad}H$ – по нормалі до S, то дістанемо, що головна нормаль до геодезичної має в кожній її точці збігатися з нормаллю до поверхні. Але у точки, що рухається без тангенціального прискорення по деякій лінії, вектор прискорення, а тому і сили спрямовані по головній нормалі до лінії. Тому траєкторіями матеріальних точок, що рухаються по поверхні «за інерцією», тобто без зовнішніх сил і без тертя, є геодезичні лінії на цій поверхні.

Поняття геодезичних ліній вводиться аналогічним чином у многовидах евклідових просторів будь-якої кількості вимірів, а також в загальних ріманових просторах. Ці геодезичні, властивості яких ті ж, що і для ліній на поверхні, відіграють в теорії цих многовидів і просторів центральну роль, ту ж, що прямі лінії для евклідових просторів.

Питання про необхідність умови, знайденої Якобі, обговорювалося в математиці протягом кількох десятиліть після публікації його мемуара. Ці роботи розглядатимуться далі.

5.2. Проблема розрізнення слабкого і сильного екстремумів

На початку другої половини XIX ст. вчені займалися доведенням критерію Якобі, його уточненням і поширенням на загальніші класи задач. Незабаром після публікації мемуара Якобі з'явилася велика кількість статей, в яких його твердження доводили і поширювалися на більш загальні варіаційні задачі.

Іван Дмитрович Соколов
(1812-1873)

Одним з перших математиків, які розвивали теорію Якобі, був учень Остроградського І.Д Соколов (1812-1873). Відзначимо, що І.Д. Соколову належить праця «Динаміка» (Харків, 1860) - один з кращих посібників з аналітичної механіки.

У 1842 р. в роботі «Дослідження деяких предметів, що стосуються варіаційного числення» [Соколов, 1842], опублікованій в Харкові, Соколов довів, що в задачі

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \to \mathrm{extr}.$$

точкою $x = m$, спряженою з точкою $x = x_0$, є перший після x_0 нуль визначника

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_{x=x_0} & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_{x=m} \\ \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)_{x=x_0} & \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha_2}\right)_{x=m} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

У 1841 р. в 6-му томі журналу Ліувілля були опубліковані статті професора математики з Бордо Віктора Лебега (1791-1875) і відомого астронома і математика професора Паризької політехнічної школи Шарля Делоне [Lebesgue, 1841, Delaunay, 1841]. Їхні автори вивчали властивості диференціального рівняння Якобі

$$Ay + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A_1 y') + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(A_n y^{(n)}) = 0.$$

Ряд статей присвячені доведенню того, що другу варіацію $\delta^2 J$ інтеграла $\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\mathrm{d}x$ можна подати у вигляді $\int_{x_0}^{x_1} f_{y^{(n)}y^{(n)}}\omega^2 \mathrm{d}x$. Це питання в роботах 1852 р. [Mainardi, 1852, Brioschi, 1852] розглянули італійські вчені - професор математики з Павії

Шарль-Ежен Делоне,
фр. Charles-Eugène
Delaunay
(1816-1872)

Г. Майнарді (1800-1879) і один з найбільших математиків XIX ст. Ф. Бріоско (1824 – 1897), відомий своїми дослідженнями в диференціальній геометрії.

У 1857 р. професор Вищої технічної школи в Відні Симон Шпітцер (1826 - 1887) в мемуарі [Spitzer, 1854] привів другу варіацію $\delta^2 J$ інтеграла $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', ..., y^{(n)})\mathrm{d}x$ для n=1,2,3 до вигляду

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f_{y^{(n)}y^{(n)}}(\delta y^{(n)} + \lambda_1 \delta y^{(n-1)} + ... + \lambda_n \delta y)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Він виразив λ_i як відношення функціональних визначників, ще не використовуючи термін «визначник». Дослідження Шпітцера продовжив Л. Гессе в [Hesse, 1857], де він привів другу варіацію до вигляду

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f_{y^{(n)}y^{(n)}} \left(\frac{\nabla}{\nabla_n}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

де ∇, ∇_n - функціональні визначники (див. [Коновалова, 1985]). Для найпростішої варіаційної задачі Гессе отримав визначник (9), розглянутий Соколовим ще в 1842 р. [Соколов, 1842]. Гессе довів, що рівність нулю визначника (9) означає, що екстремалі, які виходять з точки $x = x_0$, перетинаються в точці $x = m$.

У своєму мемуарі Якобі знайшов умови, при яких $\delta J = 0$ і $\delta^2 J > 0$, і стверджував, що вони є достатніми для існування мінімуму. Пізніше в «Лекціях з динаміки» [Якоби, 1936 , с. 42] він коротко вказав на те, що знайдені ним умови є необхідними: якщо перейти зазначену в критерії границю, то можна другу варіацію $\delta^2 J$ зробити від'ємною, вибравши відповідним чином δJ .

У 1855 р. Ж. Бертран висловив сумнів в необхідності знайденої Якобі умови. В примітках до «Аналітичної механіки» Лагранжа він писав, що Якобі, мабуть, зробив у своєму мемуарі невиправдано далекоглядний висновок. «Ясно, що умови, знайдені ним, є достатніми, але не є необхідними для існування мінімуму» [Lagrange, 1855 (Лагранж, 1950 т. 2, с. 52)]. Ці слова Бертрана не наведені у французькому виданні творів Лагранжа і в російському перекладі «Аналітичної механіки» в зв'язку з тим, що, як з'ясувалося пізніше, умова Якобі є необхідною.

Доведення необхідності умови Якобі вперше з'явилося в пресі у 1878 р. Воно належить вчителю гімназії з Кенігсберга Г. Ердману, який вивчав найпростішу варіаційну задачу. А. Клебш (1858) [Clebsch, 1858] знайшов умову Лежандра для задачі Лагранжа.

У першій половині XIX ст. всі дослідження у варіаційному численні проводилися методом варіацій. Для знаходження екстремуму інтеграла $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ розглядали різницю

$$\Delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,\mathrm{d}x - \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

і, використовуючи формулу Тейлора, представляли її у вигляді

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3 J + \ldots, \tag{10}$$

де

$$\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(f_y \delta y + f_{y'} \delta y'\right)\mathrm{d}x,$$

$$\delta^2 J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(f_{yy}\delta y^2 + 2 f_{yy'}\delta y \delta y' + f_{y'y'}\delta y'^2\right)\mathrm{d}x.$$

При знаходженні достатніх умов існування екстремуму і Лежандр, і Якобі без пояснень відкидали в (10) усі члени після $\delta^2 J$. Уточнення вніс Веєрштрасс.

Очевидно, що метод варіацій застосовний тільки до тих задач, де величина $\delta y'$ нескінченно мала, тобто до задач на слабкий екстремум. Ні Якобі, ні його сучасники не бачили цього обмеження.

У 1861 р. А. Тодхантер в своїй книзі [Todhunter, 1861,1962] першим звернув увагу на те, що у варіаційному численні зустрічаються задачі, в яких $\delta y'$ не є малою величиною. Він зауважив, що до них не застосовується розклад (10), на якому заснований метод варіацій. Звідси Тодхантер справедливо зробив висновок, що варіаційне числення не має засобів для розв'язання задач, в яких досліджувана крива порівнюється з ламаною лінією.

Особливе здивування у другій половині XIX ст. викликала задача Ньютона про форму тіла, на яке при русі в рідині діє найменший опір. Вона опублікована в 1687 р. в його знаменитому творі «Математичні начала натуральної філософії» (див. нарис 2).

Ньютон досліджує питання про опір сфери, циліндра і усіченого конуса, що рухаються в середовищі (він називав його рідким), яке складається з нерухомих частинок фіксованої маси, що є абсолютно пружними кулями.

Людвіг Отто Гессе,
нім. Ludwig Otto
Hesse
(1811 – 1874)

Жозеф Луї Франсуа
Бертран,
фр. Joseph Louis
François Bertrand
(1822 – 1900)

Рудольф Фрідріх
Альфред Клебш,
нім. Rudolf Friedrich
Alfred Clebsch
(1833 – 1872)

Айзек Тодхантер,
англ. Isaac Todhunter
(1820 – 1884)

Ньютон з'ясував, що серед всіх конусів, що мають дану ширину і висоту, найменший опір буде мати конус з кутом в 135°, і зауважив, що даний результат може бути «корисним при побудові судів». Після цього Ньютон пише [Крылов, 1936–1956, т. 7, с. 430]: «Коли ж крива *DNFG* буде така, що якщо з будь-якої її точки *N* опустити на вісь *AB* перпендикуляр і (з заданої точки *G*) провести пряму *GP*, паралельну до дотичної до кривої в точці *N*, що перетинає вісь у точці *P*, то (має місце пропорція) $MN : GP = GP^3 : (4BP \cdot GB^2)$, тоді тіло, що утворюється обертанням цієї кривої навколо осі *AB*, буде зазнавати найменшого опору у вищезгаданому рідкому середовищі серед інших тіл тієї ж довжини і ширини» (рис. 9, що належить Ньютону).

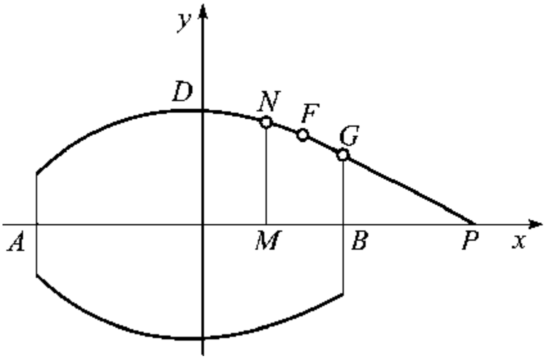


Рис. 9

Ньютон не дав ніяких пояснень, як він прийшов до свого розв’язку, і тому його задача не відразу привернула увагу математиків, загубившись серед великого числа інших задач «Начал» Ньютона. У 1699 р. Й. Бернуллі і Лопіталь записали пропорцію Ньютона у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2} = \frac{a}{4},$$

де $BG = a$, $MN = y$, і проінтегрували його підстановкою $y' = p$.

З’ясувалося, що крива, яка задовольняє рівняння Ейлера, складається з двох гілок із спільною вершиною в точці *M*, в якій спільна дотична нахилена до осі *Ox* під кутом 60° (рис. 10).

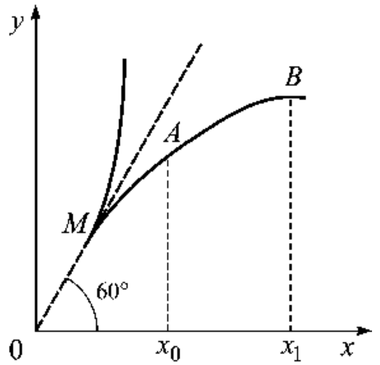


Рис. 10

У 1744 р. Ейлер вказав [Эйлер, 1934, с. 104], що в задачі Ньютона треба знайти криву, що дає мінімум інтегралу

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{yy'^3}{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

Тіло обертається навколо осі *Ox*.

Нагадаємо, що в сучасних підручниках (див. [Алексеев та ін., 1979, с. 34]) задача Ньютона ставиться так:

$$\int_{0}^{T} \frac{t}{1+\dot{x}^2}\mathrm{d}t \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(T)=\xi.$$

Тіло обертається навколо осі *Ox*. Про уточнення $\dot{x} \geq 0$ див. нарис 2.

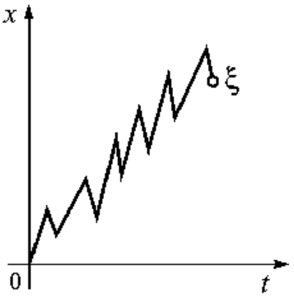


Рис. 11

Звідси відразу видно, що якщо взяти ламану з дуже великою за модулем похідною (рис. 11), то розглянутий інтеграл буде дуже малим. Вже зазначалося (на рис. 2), що вперше на цю обставину (як вказав Лежандр в [Legendre, 1788]) у 1760 р. звернув увагу Сен Жак де Сільвабель, директор обсерваторії в Марселі, який займався астрономією і математикою і присвятив ряд робіт теорії коливань маятника і питанням гідравліки. Він стверджував, що завжди можна побудувати ламану, на якій інтеграл $\int_{x_0}^{x_1} \frac{yy'^3}{1+y'^2}\mathrm{d}x$ приймає значення, менше, ніж на кривій *AB*, що є розв’язком диференціального рівняння Ейлера (рис. 10).

Гійом Сен-Жак де Сільвабель, фр. Guillaume de Saint-Jacques de Silvabelle (1722 – 1801)

Після публікації мемуара Якобі (1837) [Jacobi, 1837, 1936] було з'ясовано, що на кривій *AB* виконуються умови Ейлера, Лежандра та Якобі, проте мінімум на ній не досягається. Ця обставина здавалася парадоксальною і задачу стали викладати дуже коротко навіть в самих ґрунтовних курсах з варіаційного числення, в яких іншим задачам присвячувалися десятки сторінок.

Ось як писав про це в роботі «Про одну задачу варіаційного числення», виданій в Одесі у 1885 р. [Старков, 1885, с. 19], одеський математик, член

Новоросійського товариства дослідників природи О.П. Старков (1850-1903): «На початку другої половини дев'ятнадцятого століття задача Ньютона про поверхні найменшого опору зовсім викидається з підручників. Настільки повний та ґрунтовний курс варіаційного обчислення Муаньо (1861) [Moigno, 1861], що включає багато різноманітних, детально досліджених прикладів, не містить зовсім задачі про поверхні найменшого опору, і зрозуміло чому: ця задача була б прямим протиріччям прийнятої Муаньо, витончено ним викладеної теорії Якобі для розрізнення максимуму і мінімуму інтеграла, оскільки всі умови Якобі виконуються, а інтеграл на отриманій кривій, відповідно до вказівки ще Лежандра, minimum'a не надає».

Здивування, пов'язані із задачею Ньютона, були роз'яснені К. Веєрштрассом. Він показав, що в задачі Ньютона шукана крива порівнюється з ламаною, а при цьому $\delta y'$ вже не є нескінченно малою. Тому виконання умов Ейлера, Лежандра та Якобі не забезпечує існування екстремуму в цій задачі. Потрібно було розширити варіаційну теорію, і Веєрштрасс досяг цього в своїх лекціях з варіаційного числення.

5.3. Теорія сильного екстремуму. Функція Веєрштрасса

Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс, нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897)

Теорію сильного екстремуму побудував німецький математик Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс (1815-1897), результати якого склали епоху в розвитку варіаційного числення. Він вперше ввів *E*-функцію в лекціях 1879 р.

Особливістю варіаційного числення другої половини XIX ст. в порівнянні з його попереднім розвитком, як і математичного аналізу в цілому, є підвищення вимог до строгості доведень. Цьому насамперед сприяли роботи К. Веєрштрасса.

Процес уточнення доведень приводив до вдосконалення математичної теорії, в результаті самі математичні проблеми дають у цей період поштовх до розвитку числення. Так, наприклад, саме в процесі пошуку строгого доведення правила множників Лагранжа вчені прийшли до виділення нормального і анормального випадків в задачі Лагранжа (див. нарис 7). На шляху уточнень умов неперервності і диференційовності, що накладаються на досліджувані функції, була отримана умова Веєрштрасса-Ердмана. Втім, тут був і тісний зв'язок із застосуваннями, оскільки перші спроби знайти ці умови, хоча і невдалі, були зроблені Тодхантером на основі конкретних варіаційних задач. Ці дослідження Тодхантера продовжив Г. Ердман.

К. Веєрштрасс вперше у варіаційному численні побудував теорію сильного екстремуму. Результати, отримані Веєрштрассом, викладені в лекціях з варіаційного числення, які він регулярно читав в Берлінському університеті у 1865-1890 рр. Вони записувалися студентами і були широко відомі в Німеччині та за її межами. Багато пізніше лекції Веєрштрасса були опубліковані в 7-му томі зібрання його творів [Weierstrass, 1894–1927]. В основу публікації покладено записи лекцій, прочитаних у 1882 р., виконані К.В. Борхардтом і Г. Шварцем. За свідченням О. Больца в [Bolza, 1909a], основні результати Веєрштрасса містилися вже в його лекціях 1879 р. Але, оскільки ці лекції в XIX ст. не були опубліковані, сучасники Веєрштрасса в своїх статтях з варіаційного числення, як правило, на його результати не посилалися. Ситуація змінилася лише на початку XX ст., коли з'явився ряд чудових підручників [Kneser, 1925, Hadamard, 1910, Bolza, 1909a], в яких повністю викладалася теорія Веєрштрасса і підкреслювалися його заслуги в розвитку варіаційного числення. Результати Веєрштрасса були детально викладені також в статті А. Кнезера в німецькій «Енциклопедії математичних наук» [Kneser, 1904].

Оскар Больца,
нім. Oskar Bolza
(1857 – 1942)

Відзначимо основні досягнення Веєрштрасса.

1. Побудував теорію сильного екстремуму і повністю дослідив найпростішу варіаційну задачу в параметричній формі; знайшов умову, яка отримала в літературі назву умови Веєрштрасса-Ердмана; строго довів правило Ейлера для ізопериметричної проблеми, вперше виділив особливий випадок.

2. Змінив весь стиль робіт з варіаційного числення тим, що привернув увагу математиків до уточнення його основ. Його лекції відрізняються точністю формулювань, глибиною і ясністю у викладенні предмета.

Протягом багатьох років Веєрштрасс читав в Берлінському університеті лекції з теорії функцій, в яких істотно уточнив викладення основ математичного аналізу. Математику, за словами Веєрштрасса звісно, потрібно займатися конкретними проблемами, але кінцева мета, до якої завжди треба прагнути, полягає в досягненні правильних суджень про теоретичні основи науки. Точно так підійшов Веєрштрасс і до викладення варіаційного числення. О. Больца у 1909 р. в своєму підручнику писав [Bolza, 1909a], що «сучасне варіаційне числення створено в останні 30–40 років під впливом критичного напрямку в численні нескінченно малих і перш за все під впливом відкриттів Веєрштрасса, які створили епоху».

Веєрштрасс вперше сформулював обмеження, що накладаються на розглядувані в задачах варіаційного числення функції, вимагаючи їх неперервності, існування похідних до певного порядку і т.д. Він підкреслював, що ці обмеження зменшують загальність варіаційного числення через те, що екстремум шукається лише серед диференційовних достатню кількість раз кривих, але вони необхідні для того, щоб застосовувати до варіаційних задач апарат диференціального числення (наприклад, щоб розкладати підінтегральну функцію в ряд Тейлора, застосовувати інтегрування частинами і т. і.).

У всіх роботах до Веєрштрасса приймалося без будь-яких доведень, що умови $\delta J = 0$ і $\delta^2 J > 0$ забезпечують існування мінімуму. Таким чином, без будь-якого обґрунтування в розкладі (10) відкидалися всі члени вище другого порядку малості відносно δy і $\delta y'$. Веєрштрасс і тут вніс уточнення. Він запропонував розглядати розклад за формулою Тейлора із залишковим членом

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + R\,.$$

Отже, перша заслуга Веєрштрасса в області варіаційного числення - це дане ним строге обгрунтування цієї дисципліни.

Щоб досягти більшої загальності, Веєрштрасс ввів параметричне задання кривих, вказавши, що при цьому розширюється клас кривих серед яких шукається екстремум.

Веєрштрасс розглядає тільки найпростішу варіаційну задачу: знайти криву $x(t)$, $y(t)$, що дає максимум або мінімум інтегралу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

за умови $x'^2 + y'^2 \neq 0$, тобто шукається екстремум серед плоских кривих, що мають закріплені кінці, причому підінтегральна функція не містить похідних вище першого порядку. Він тільки коротко вказав на загальніші варіаційні задачі (знаходження екстремумів серед просторових кривих, дослідження кратних інтегралів і ін.). Веєрштрасс довів, що функція F має задовольняти умови однорідності

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y').$$

Криву, сусідню з шуканої кривою $x(t)$, $y(t)$, Веєрштрасс записує у вигляді $x+\xi$, $y+\eta$, відмовившись від традиційних позначень δx, δy, як він пише, «для більшої ясності» [Weierstrass, 1894–1927, т. 7, с. 130].

Раніше δy розглядали як нескінченно малий приріст, який отримує ордината y при переході від шуканої кривої до сусідньої; при цьому треба було якимось чином доводити можливість перестановки символів δ і d, тобто рівність $\delta \mathrm{d} y = \mathrm{d}\delta y$, на якій ґрунтувалися всі подальші перетворення.

У Веєрштрасса ξ і η - функції від *t*, тобто $\xi(t)$, $\eta(t)$ При переході від шуканої кривої $x(t)$, $y(t)$ до сусідньої кривої $x+\xi$, $y+\eta$ похідні $x'(t)$, $y'(t)$ набувають приростів $\xi'(t)$, $\eta'(t)$, а це рівносильно рівнянням

$$\delta x' = \xi'(t), \quad \delta y' = \eta'(t),$$

або

$$\delta x' = (\delta x)', \quad \delta y' = (\delta y)'.$$

Для вирішення питання про екстремум порівнюються значення інтеграла вздовж досліджуваної екстремалі і вздовж сусідньої кривої, тобто розглядається різниця

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} F(x+\xi, y+\eta, x'+\xi', y'+\eta')\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t.$$

Потім виділяється сукупність членів першого порядку відносно величин ξ, η, ξ', η'. Ця сукупність являє собою першу варіацію δJ розглядуваного інтеграла.

Нагадаємо для порівняння, що перша варіація для найпростішої варіаційної задачі в непараметричній формі має вигляд

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y \delta y + f_{y'} \delta y' \right) \mathrm{d}x.$$

За методом Лагранжа інтегруванням частинами δJ приводять до виду

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \right) \delta y \,\mathrm{d}x + f_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1}, \tag{11}$$

звідки отримують рівняння Ейлера

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0$$

і позаінтегральні члени $f_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}$, що відносяться до кінців кривої.

Веєрштрасс також інтегруванням частинами перетворює першу варіацію. В результаті дістає вираз

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial F}{\partial x'} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right] \Bigg|_{t_0}^{t_1},$$

із якого випливають два рівняння

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0, \quad G_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Веєрштрасс довів існування такої функції F_1, що

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = F_1 y'^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -F_1 x' y', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = F_1 x'^2,$$

і за допомогою цієї функції замінив два рівняння $G_1 = 0$ і $G_2 = 0$ одним

$$G = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - F_1 \left(x' \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} - y' \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} \right) = 0.$$

В результаті він записав першу варіацію у вигляді

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} G \cdot (x'\eta - y'\xi)\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{12}$$

Веєрштрасс вважає, що величини ξ, η, ξ', η' є малими. Він зауважує, що цим обмежується клас розглядуваних задач, але такі задачі зустрічаються особливо часто. Дослідженню цих задач присвячені глави 12–18 лекцій Веєрштрасса В них повністю вирішене питання про необхідні і достатні умови існування слабкого екстремуму. При цьому Веєрштрасс вперше доводить необхідність умови Лежандра. Пояснимо це, відмовившись для простоти від параметричної форми викладення.

Лежандр привів другу варіацію інтеграла $\delta^2 J$ до вигляду $\int\limits_{x_0}^{x_1} f_{y'y'}\omega^2 \mathrm{d}x$. Звідси він зробив висновок, що в разі коли $f_{y'y'} > 0$ на відрізку інтегрування $[x_0, x_1]$, то $\delta^2 J > 0$ і, отже, має місце мінімум. Таким чином, Лежандр говорив тільки про достатність знайденої ним умови.

Веєрштрасс довів необхідність умови $f_{y'y'} \geq 0$ (вперше з'являється нестрога нерівність). Потім Веєрштрасс довів, що одночасне виконання умов Ейлера, Лежандра та Якобі (якщо дві останніх дані в їх посиленій формі) забезпечує існування слабкого екстремуму.

Найважливішим досягненням Веєрштрасса в області варіаційного числення є побудова теорії сильного екстремуму. Покажемо коротко, як він це зробив.

Перш за все Веєрштрасс розглянув сукупність екстремалей, які виходять при $t = t_0$ із фіксованої точки A, і довів таку теорему: нехай AB - ділянка екстремалі, що не містить точок, спряжених з A, тоді AB можна включити в таку смугу, що з A в кожну точку B' смуги можна провести екстремалі. Сучасною мовою цю теорему можна сформулювати так: ділянку екстремалі, що не містить спряжених точок, можна оточити центральним полем екстремалей. При дослідженні сильного екстремуму Веєрштрасс спочатку знайшов четверту необхідну умову екстремуму. Він порівняв досліджувану екстремаль A_0A_1 з сусідньою кривою $A_0A_2A_1$, що є близькою за положенням в просторі, але відрізняється за напрямком дотичних на скінченні величини (рис. 12). У разі мінімуму повинна бути додатною різниця

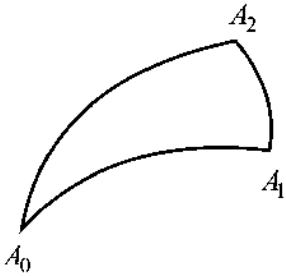


Рис. 12

$$J_{A_0A_2A_1} - J_{A_0A_1}. \tag{13}$$

Для її вивчення вже не можна застосувати розклад (10) за формулою Тейлора. І в цьому вся складність!

Веєрштрасс знайшов такий вихід. Він записав різницю (13) у вигляді

$$(J_{A_0A_2} - J_{A_0A_1}) + J_{A_2A_1}.$$

Вираз $J_{A_0A_2} - J_{A_0A_1}$ він знайшов, розглядаючи криву A_0A_2 як варіацію кривої A_0A_1 зі змінною правою границею. Щоб знайти інтеграл $J_{A_1A_2}$ Веєрштрасс на нескінченно малому відрізку A_1A_2 взяв середнє значення підінтегральної функції. В результаті він прийшов до функції *E*:

$$E(x,y,p,q,\overline{p},\overline{q}) = F(x,y,\overline{p},\overline{q}) - F_{x'}(x,y,p,q)\overline{p} - F_{y'}(x,y,p,q)\overline{q},$$

де (x,y) – точка на екстремалі, *p*, *q* - напрямні косинуси дотичної до екстремалі в цій точці, $\overline{p},\overline{q}$ - довільні числа, і довів, що в разі мінімуму повинна виконуватися умова $E \geq 0$.

Потім Веєрштрасс довів, що додавання до умов Ейлера, Лежандра, Якобі, які забезпечують слабкий мінімум, четвертої умови (*E*>0 в околі екстремалі) дає сукупність достатніх умов сильного мінімуму. При цьому йому треба було встановити, що

$$J_{\overline{(0,1)}} - J_{(0,1)} > 0,$$

де $\overline{(0,1)}$ - будь-яка крива, близька до (0,1) за положенням в просторі, (0,1) - досліджувана екстремаль, яка задовольняє вказані вище умови. Труднощі у вирішенні проблеми полягали в тому, що вже не можна було застосовувати розклад (10) за формулою Тейлора і розглядати криву $\overline{(0,1)}$ як варіацію кривої $(0,1)$.

Веєрштрасс зробив таким чином. Він ввів точку 2 на кривій $(0,1)$, положення якої визначається параметром *s* (рис. 13). Після цього він провів екстремаль $(0,2)$, спираючись на наведену вище теорему, і розглянув допоміжну функцію

$$\varphi(s) = J_{(0,2)} + J_{(2,1)} - J_{(0,1)}.$$

Потім він довів співвідношення

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = -E. \qquad (14)$$

З умови *E*>0 випливає, що $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} < 0$ і, отже, функція спадає. Якщо значення *s* таке, що точка 2 збігається з точкою 1, то $\varphi(s) = J_{(0,1)} - J_{(0,1)} = 0$. Значить, при менших значеннях *s* функція $\varphi(s)$ додатна. Зокрема, якщо значення *s* таке, що точка 2 збігається з точкою 0, то $\varphi(s) = J_{\overline{(0,1)}} - J_{(0,1)} = 0$. При цьому значенні *s* функція $\varphi(s)$ додатна. Тому $J_{\overline{(0,1)}} - J_{(0,1)} > 0$, що й треба було довести.

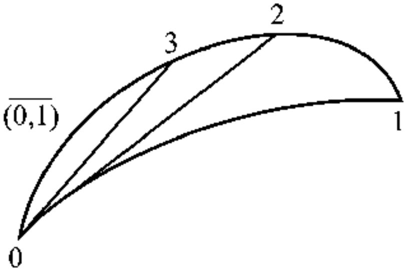


Рис. 13

Отже, дослідження Веєрштрасса повністю вирішили питання про необхідні і достатні умови існування сильного екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення.

У своїх лекціях Веєрштрасс розглянув ряд класичних задач – про брахістохрону, про найкоротші лінії на поверхні і ін. Особливе місце займає задача

Ньютона, якій він присвятив окрему главу. Веєрштрасс пояснив, чому знайдені до нього умови не забезпечували екстремуму в цій задачі. Саме для таких задач, в яких досліджувана крива порівнюється з ламаними лініями, Веєрштрасс розробив свою теорію сильного екстремуму.

Автори статей з варіаційного числення, що з'явилися в пресі у другій половині XIX ст. і стосуються варіаційних задач без обмежень, працювали в той же час, в який Веєрштрасс читав свої лекції, але в своїх статтях вони не посилалися на Веєрштрасса. Природно, не можна цілком певно сказати, чи був той чи інший вчений знайомий з відповідним розділом лекцій Веєрштрасса, чи отримав свої результати незалежно. Зазначимо тільки, що рукописи лекцій Веєрштрасса були відомими багатьом математикам. Згодом деякі з них викладали його ідеї в своїх книгах, не посилаючись на джерело.

Адольф Кнезер,
нім. Adolf Kneser
(1862 – 1930)

Давид Гільберт,
нім. David Hilbert
(1862 – 1943)

Нові ідеї були внесені у варіаційне числення в 1900 р. А. Кнезером і Д. Гільбертом. На відміну від своїх попередників вони постійно посилалися на результати Веєрштрасса і підкреслювали його засадничу роль у розвитку варіаційного числення.

5.4. Екстремалі з кутовими точками. Умови Веєрштрасса-Ердмана

Перш за все розглянемо питання про формування умов Веєрштрасса-Ердмана для кутових точок екстремалі. Існує дуже багато варіаційних задач, в яких шукана функція неперервна, а похідна її має розриви в окремих точках. Це так звані кутові точки. Такі, наприклад, задачі на відображення і заломлення світла.

Першим умову, яка має виконуватися в кутових точках, знайшов Веєрштрасс. При цьому важливу роль відіграла та обставина, що він досліджував варіаційну задачу в параметричній формі. Це помітно подовжувало обчислення і водночас виявилося дуже зручним при розв’язуванні цілого ряду задач.

У задачі про екстремуму інтеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

Веєрштрасс отримав для першої варіації δJ вираз (12). Тут позаінтегральні члени мають вигляд

$$\left(F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\right)\Big|_{t_0}^{t_1}. \qquad (15)$$

Із (15) Веєрштрасс відразу ж отримав умову для кутових точок екстремалі. За свідченням О. Больца [Bolza, 1909a, с. 367], він це зробив вже у 1865 р., тобто в першому курсі лекцій з варіаційного числення.

Веєрштрасс зазначав [Weierstrass, 1894–1927, т. 7, с. 110]: «Важливе значення має теорема: якщо крива в одному або кількох місцях раптом змінила напрямок дотичної, то величини $F_{x'}$ і $F_{y'}$ не зазнають розриву в припущенні, що таких точок в області $t_0 < t < t_1$ скінченна кількість».

Нехай $\bar{t}$ – кутова точка. Тоді умову $\delta J = 0$ Веєрштрасс, використовуючи вираз (12), подав у формі

$$\int_{t_0}^{\bar{t}} G\cdot(x'\eta - y'\xi)\,\mathrm{d}t + \int_{\bar{t}}^{t_1} G\cdot(x'\eta - y'\xi)\,\mathrm{d}t + \left(F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\right)\Big|_{t_0}^{\bar{t}-0} + \left(F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\right)\Big|_{\bar{t}+0}^{t_1} = 0.$$

Уздовж екстремалі G=0 кінці кривої закріплені, тобто варіації ξ і η дорівнюють нулю в точках t_0 і t_1. Тому з останньої рівності випливає, що

$$\left(F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\right)\Big|_{\bar{t}+0}^{\bar{t}-0} = 0.$$

Врахувавши, що варіації ξ і η довільні, Веєрштрасс отримав шукані умови для кутової точки

$$F_{x'}\Big|_{\bar{t}-0} = F_{x'}\Big|_{\bar{t}+0}, \quad F_{y'}\Big|_{\bar{t}-0} = F_{y'}\Big|_{\bar{t}+0}.$$

Однак, як зазначалося, знайшовши умову для кутових точок екстремалі у 1865 р., Веєрштрасс її не оприлюднив. Задачі з негладкими екстремалями з'явилися в пресі вперше у 1871 р. в книзі Айзека Тодхантера (1822 – 1884), виданій в Лондоні у 1871 р. ([Todhunter, 1871]). Розв'язки варіаційної проблеми, що містять кутові точки, тут названі розривними. Тодхантер розглянув велику кількість конкретних прикладів, але не зумів вивести якесь загальне твердження.

Отже, вважається, що умову, яка має задовольнятися в кутових точках, першим висловив Веєрштрасс у своїх лекціях у 1865 р. Але опублікована ця умова була багато пізніше, мабуть лише при виданні його учнями зібрання творів Веєрштрасса в семи томах. Зокрема, 7-ий том [Weierstrass,1927], присвячений варіаційному численню і редактований Рудольфом Ернстом Роте (1873 – 1942), з'явився у 1927 р. Тому не дивно, що у 1877 р. у відомому Берлінському математичному журналі «Journal fur die reine und angewandte Mathematik» з'явилася стаття [Erdmann,1877] про варіаційні задачі з кутовими точками Г. Ердмана з прикінцевою приміткою «Берлін, 15 листопада 1875 р.» (Berlin, den 15 November 1875). Оскільки в цьому журналі вказувалися і рецензенти статей, то відомо, що позитивний висновок для її публікування дав Адольф Майер. Чи читав цю статтю К. Веєрштрасс, невідомо.

У статті Г. Ердмана зазначається, що на дослідження задач з кутовими точками у варіаційному численні його надихнула вже вказана робота Тодхантера [Todhunter, 1871], а ім'я Веєрштрасса у його статті не згадується.

Відомо, що крім названої берлінської статті Г. Ердман опублікував ще три математичні роботи [Erdmann, 1877], [Erdmann, 1878], [Erdmann, 1881], відповідно, у 1877, 1878 і 1881 рр., видані у лейпцизькому збірнику «Zeitschrift fur Mathematik und Physik». Всі вони стосуються варіаційного числення, але в них вже зовсім не йдеться про варіаційні задачі з кутовим точками, а вивчаються гладкі розв'язки в таких задачах. Про автора Г. Ердмана зазначається: в [Erdmann, 1877] – що він вчитель гімназії в Берліні, в [Erdmann, 1878] – що він вчитель гімназії в Кенігсберзі, в [Erdmann, 1881] – що він вчитель гімназії в Інстербурзі. Після 1881 р. ім'я Г. Ердмана не згадується в математичних журналах.

Отже, вперше умови для кутових точок з'явилися в пресі у 1877 р. в статті Г. Ердмана [Erdmann, 1877]. Він теж використовує термін «розривні розв'язки», що йде ще від Ейлера. Ердман застосував свою теорему до ряду задач і вказав при цьому на помилки Тодхантера.

Покажемо, який вигляд мала перша варіація δJ в роботі Ердмана. Він розглядав найпростішу варіаційну задачу про екстремум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x.$$

У той час був поширений такий перехід від параметричної форми до звичайної. Позначимо

$$p = y'_x = y'/x', \quad y' = y'_t, \quad x' = x'_t.$$

Якщо $x' = 1$, то

$$F(x,y,1,p) = f(x,y,p).$$

За умовою однорідності функції F маємо

$$F(x,y,x',y') = F(x,y,x'\cdot 1, x'\cdot p) = x'f(x,y,p).$$

Звідси легко виводиться, що

$$F_{x'} = f(x,y,p) - pf_p(x,y,p), \quad F_{y'} = f_p.$$

Використовуючи ці формули і враховуючи, що у Веєрштрасса $\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, з (15) дістанемо

$$[(f(x,y,p) - pf_p(x,y,p))\delta x + f_p \delta y]\Big|_{x_0}^{x_1}.$$

Отже, за аналогією з виразом Веєрштрасса (12) першу варіацію інтеграла $\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ можна подати у вигляді

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \right) \delta y\,\mathrm{d}x + \left[(f - y'f_{y'})\delta x + f_{y'}\delta y \right]\Big|_{x_0}^{x_1}, \qquad (16)$$

що є більш загальним ніж (11). Саме у формі (16) записав першу варіацію δJ Ердман і таким шляхом отримав умови для кутових точок.

Нехай розглядаються неперервні екстремалі, які можуть мати злам в деякій точці $x = C$ (або в кількох точках). Тоді в точці зламу C повинні виконуватися умови

$$f_{y'}\Big|_{C-0} = f_{y'}\Big|_{C+0}, \quad (f - y'f_{y'})\Big|_{C-0} = (f - y'f_{y'})\Big|_{C+0}.$$

Їх називають зараз *умовами Веєрштрасса-Ердмана.*

Відзначимо ще одну перевагу параметричної форми, яку використовував Веєрштрасс. Він записав позаінтегральні члени першої варіації δJ у вигляді

$$\left(F_{x'}\xi + F_{y'}\eta\right)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

симетричному відносно ξ і η (тобто відносно δx і δy). До Веєрштрасса першу варіацію записували у вигляді (11), де x не змінюється, $\delta x = 0$ і, отже, кінці кривої рухаються лише по вертикалях $x = x_0$ і $x = x_1$.

Отже, дослідження Веєрштрасса і Ердмана, які записали першу варіацію δJ в формах (12) і (16), дали основу для вирішення задач з рухомими границями. Теорію вирішення таких задач розробив німецький математик А. Кнезер (1862–1930) у 1900 р. [Kneser, 1925].

Вже зазначалося, що в багатьох задачах вимога неперервності функції $y = y(x)$ і її похідної є неприродною, більш того, в деяких класах варіаційних задач розв'язок, як правило, досягається на екстремалях, що мають кутові точки. Такими є, наприклад, задачі на відбиття і переломлення екстремалей, які узагальнюють відповідні задачі на відбиття і переломлення світла.

5.4.1. Задача про відбиття екстремалей

Наведемо сучасне викладення способів вирішення таких задач і відповідні приклали. Сформулюємо задачу таким чином: знайти криву, що реалізує екстремум функціонала $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$, проходить через задані точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_2, y_2)$ і має дістатися точки B лише після відбиття від заданої лінії $y = \varphi(x)$ (рис. 14).

Очевидно, що в точці відбиття $C(x_1, y_1)$ може бути кутова точка шуканої екстремалі і, отже, в цій точці ліва похідна $y'(x_1 - 0)$ і права похідна $y'(x_1 + 0)$, взагалі кажучи, різні. Тому функціонал $v[y(x)]$ зручніше подати у вигляді

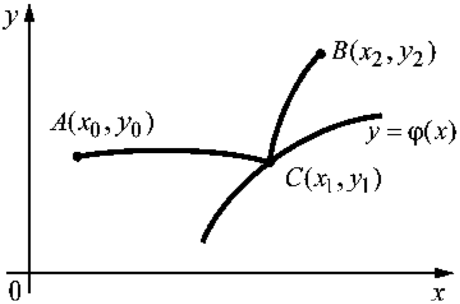


Рис. 14

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x,$$

де на кожному з інтервалів $x_0 \le x \le x_1$ і $x_1 \le x \le x_2$ похідна $y'(x)$ вважається неперервною і, отже, можна користуватися відповідними результатами.

Основна необхідна умова екстремуму $\delta v = 0$ набирає вигляду

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x = 0 .$$

Оскільки точка (x_1, y_1) може рухатися по кривій $y = \varphi(x)$, то при обчисленні варіацій $\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ і $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ є дійсними умови задачі з рухомою граничною точкою, яка переміщується по заданій кривій. Очевидно, що криві *AC* і *CB* є екстремалями, тобто на цих ділянках $y = y(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера, оскільки якщо вважати одну з цих кривих вже знайденою і варіювати тільки іншу, то задача зводиться до знаходження екстремуму функціонала $\int_{x_0}^{x_1} F\mathrm{d}x$ (або $\int_{x_1}^{x_2} F\mathrm{d}x$) в задачі із фіксованими граничними точками. Тому, обчислюючи варіацію функціонала, вважатимемо, що функціонал розглядається лише на екстремалях, що мають кутову точку *C*. Тоді

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x = \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x = x_1 - 0} \delta x_1$$

і

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x = -\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x = x_1 + 0} \delta x_1 ,$$

де позначення $x = x_1 - 0$ і $x = x_1 + 0$ вказують, що береться граничне значення величини, що стоїть в дужках, при наближенні до точки x_1 в першому випадку зліва (зі сторони значень x, менших за x_1) і в другому випадку справа (зі сторони значень x, більших за x_1). Оскільки в точці відбиття розрив має лише похідна y', то в першому випадку треба взяти в кутовій точці ліву похідну, а в другому випадку – праву похідну.

Умова $\delta v = 0$ набирає вигляду

$$\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x = x_1 - 0} \delta x_1 - \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x = x_1 + 0} \delta x_1 = 0 .$$

Оскільки δx_1 змінюється довільно,

$$\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x = x_1 - 0} = \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x = x_1 + 0} ,$$

або

$$F\left(x_1,y_1,y'(x_1-0)\right)+\left(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0)\right)F_{y'}\left(x_1,y_1,y'(x_1-0)\right)=$$
$$=F\left(x_1,y_1,y'(x_1+0)\right)+\left(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0)\right)F_{y'}\left(x_1,y_1,y'(x_1+0)\right).$$

Ця умова відбиття має особливо простий вигляд для функціоналів типу

$$v=\int\limits_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

а саме:

$$A(x_1,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1-0}=A(x_1,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1+0},$$

або, спрощуючи і скорочуючи на $A(x_1,y_1)$ в припущенні, що $A(x_1,y_1)\neq 0$, дістанемо

$$\left.\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1-0}=\left.\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1+0}.$$

Позначивши кут між дотичною до кривої $y=\varphi(x)$ і віссю абсцис через α, а кути нахилу до осі абсцис лівої і правої дотичних до екстремалі у точці відбиття *C*, відповідно, через β_1 і β_2 (рис. 15), матимемо

$$y'(x_1-0)=\tan\beta_1,\ y'(x_1+0)=\tan\beta_2,$$
$$\varphi'(x_1)=\tan\alpha\ .$$

Умова в точці відбиття набирає вигляду

$$\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta_1}{\sec\beta_1}=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta_2}{-\sec\beta_2}$$

або після спрощення і множення на $\cos\alpha$:

$$-\cos(\alpha-\beta_1)=\cos(\alpha-\beta_2).$$

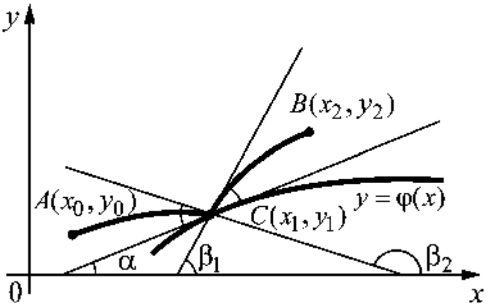


Рис. 15

Звідси випливає рівність кута падіння і кута відбиття.

Якщо точка рухається в деякому середовищі із швидкістю $v(x,y)$, то час *t*, що витрачається на переміщення точки з положення $A(x_0,y_0)$ в положення $B(x_1,y_1)$, дорівнює інтегралу $\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x$, який належить до розглядуваного виду функціоналів $\int\limits_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$, і, отже, для довільного закону зміни швидкості $v(x,y)$ у точці відбиття кут падіння дорівнює куту відбиття. Якби точки *A* і *B* були

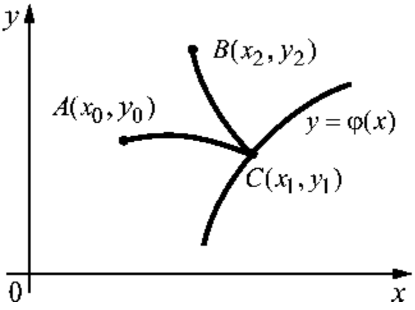


Рис. 16

розташовані інакше, наприклад так, як на рис. 16, то для отримання тієї ж умови в точці відбиття через двозначність функції $y=y(x)$ зручніше було б проводити дослідження у параметричній формі.

5.4.2. Переломлення екстремалей

Припустимо, що підінтегральна функція функціонала $v=\int_{x_0}^{x_2} F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x$ в розглядуваній області має лінію розриву $y=\varphi(x)$, а граничні точки A і B розташовані по різні сторони лінії розриву (рис. 17). Запишемо функціонал v у вигляді

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F_1\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} F_2\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x,$$

де $F_1(x,y,y')=F(x,y,y')$ з одного боку лінії розриву, а $F_2(x,y,y')=F(x,y,y')$ з іншого боку.

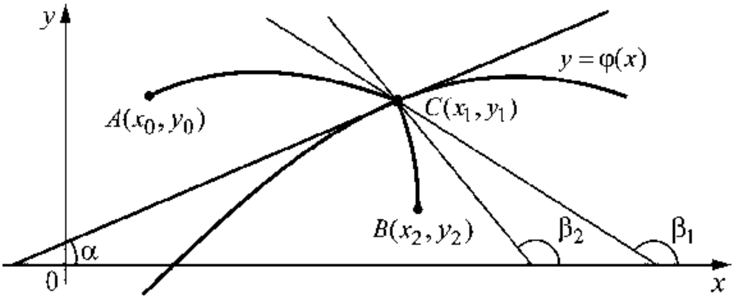


Рис. 17

Припустимо, що F_1 і F_2 тричі диференційовні. У точці C перетину шуканої кривої з лінією розриву природно очікувати на існування кутової точки. Дуги AC і CB, очевидно, є екстремалями (це знову випливає із того, що, фіксуючи одну з цих дуг і варіюючи тільки іншу, матимемо задачу із фіксованими граничними точками). Тому за криві порівняння можна брати лише ламані, що складаються з двох дуг екстремалей, і тоді варіація через рухомість граничної точки $C(x_1,y_1)$, яка переміщується по кривій $y=\varphi(x)$, має вигляд:

$$\delta v=\delta\int\limits_{x_0}^{x_1}F_1(x,y,y')\mathrm{d}x+\delta\int\limits_{x_1}^{x_2}F_2(x,y,y')\mathrm{d}x=$$

$$=\left[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}\right]_{x=x_1-0}\delta x_1-\left[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}\right]_{x=x_1+0}\delta x_1$$

і основна необхідна умова екстремуму $\delta v=0$ зводиться до рівності

$$\left[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}\right]_{x=x_1-0}=\left[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}\right]_{x=x_1+0}.$$

Оскільки в точці переломлення розривною може бути тільки y', то цю умову переломлення можна подати і у вигляді:

$$F_1(x_1,y_1,y'(x_1-0))+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{1y'}(x_1,y_1,y'(x_1-0))=$$

$$=F_2(x_1,y_1,y'(x_1+0))+(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0))F_{2y'}(x_1,y_1,y'(x_1+0)).$$

Ця умова разом з рівнянням $y_1=\varphi(x_1)$ дає можливість визначити координати точки *C*.

Якщо, зокрема, функціонал *v* має вигляд

$$\int\limits_{x_0}^{x_2}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int\limits_{x_0}^{x_1}A_1(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}A_2(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

то умова переломлення запишеться таким чином

$$A_1(x,y)\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_1-0}=A_2(x,y)\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_1+0},$$

або, зберігаючи позначення п. 5.4.1 $y'(x_1-0)=\tan\beta_1$, $y'(x_1+0)=\tan\beta_2$, $\varphi'(x_1)=\tan\alpha$, після спрощень і множення на $\cos\alpha$ дістанемо:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)}\quad\text{або}\quad\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]}=\frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)},$$

що є узагальненням відомого закону переломлення світла: відношення синуса кута падіння до синуса кута переломлення дорівнює відношенню швидкостей

$$v_1(x,y)=\frac{1}{A_1(x,y)}\quad\text{і}\quad v_2(x,y)=\frac{1}{A_2(x,y)}$$

у середовищах, на границі яких відбувається переломлення.

Екстремалі з кутовими точками з'являються не тільки в задачах на відбиття або переломлення екстремалей. Екстремум може досягатися на екстремалях з кутовими точками навіть в задачах на екстремум функціонала $v=\int\limits_{x_0}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x$, де функція *F* тричі диференційовна, і допустимі криві мають проходити через граничні точки *A* і *B* без будь-яких додаткових умов.

Розглянемо, наприклад, функціонал

$$v = \int_0^2 y'^2 (1 - y')^2 \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1.$$

Оскільки підінтегральна функція додатна, то $v \geq 0$, і отже, якщо на деякій кривій функціонал $v = 0$, то на цій кривій напевно реалізується абсолютний мінімум функціонала v, тобто найменше значення функціонала на допустимих кривих. Неважко бачити, що на ламаній $y = x$ при $0 \leq x \leq 1$ і $y = 1$ при $1 < x \leq 2$ (рис. 18) функціонал $v = 0$, оскільки на цій ламаній підінтегральна функція тотожно дорівнює нулю. Отже, на цій ламаній реалізується абсолютний мінімум функціонала.

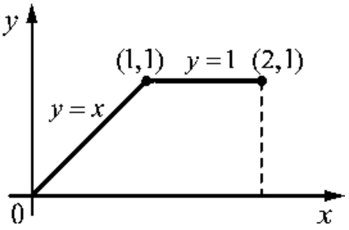


Рис. 18

Абсолютний мінімум функціонала $v = 0$, досягається також і на ламаних, зображених на рис. 19. З іншого боку, легко бачити, що на гладких кривих значення функціонала строго більші нуля, хоча і їх можна зробити як завгодно близькими до нуля. Справді, підінтегральна функція перетворюється в нуль тільки при $y = x + C_1$ або при $y = C_2$, але лінії, складені з відрізків прямих цих сімейств, що проходять через точки $A(0,0)$ і $B(2,1)$, можуть бути лише ламаними. Проте, згладжуючи точки переломлення шляхом відповідної зміни функції у як завгодно малому околі цих точок, можна отримати гладку криву, значення функціонала на якій як завгодно мало відрізняється від значень функціонала на ламаній. Таким чином, $v = 0$ є точною нижньою гранню значень функціонала v на гладких кривих, але ця точна нижня грань не досягається на гладких кривих, а досягається на кусково-гладких кривих.

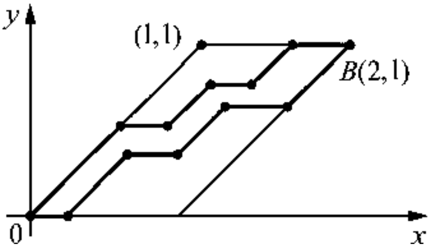


Рис.19

Запишемо умови, які мають задовольняти розв'язки з кутовими точками задачі про екстремум функціонала $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$. Очевидно, що окремі гладкі дуги, з яких складається ламана екстремаль, мають бути інтегральними кривими рівняння Ейлера. Це випливає з того, що при фіксуванні всіх ланок ламаної, окрім однієї, і варіюванні лише цієї однієї ланки, задача зводиться до найпростішої задачі із фіксованими границями і, отже, ця ланка має бути дугою екстремалі. Вважаючи для спрощення запису, що ламана екстремаль має лише одну кутову точку[1]), знайдемо умови, які повинні задовольнятися в точці переломлення:

---

[1] Якщо кутових точок кілька, то такі ж міркування застосовні до кожної з них.

$$v=\int_{x_0}^{x_2}F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}F\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x,$$

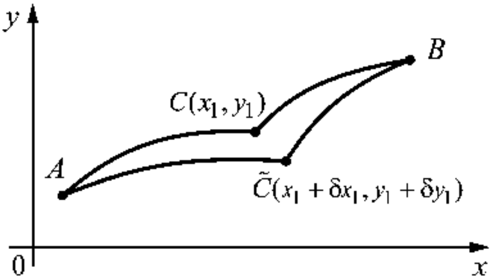


Рис. 20

де x_1 – абсциса точки переломлення (рис. 20). Вважаючи, що криві AC і CB є інтегральними кривими рівняння Ейлера і що точка C може довільно рухатися, дістанемо

$$\delta v=(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1-0}\delta x_1+F_{y'}\Big|_{x=x_1-0}\delta y_1-$$

$$(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1+0}\delta x_1-F_{y'}\Big|_{x=x_1+0}\delta y_1=0,$$

звідки

$$(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1-0}\delta x_1+F_{y'}\Big|_{x=x_1-0}\delta y_1=(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1+0}\delta x_1+F_{y'}\Big|_{x=x_1+0}\delta y_1,$$

або, оскільки δx_1 і δy_1 незалежні, маємо:

$$(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1-0}=(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1+0},\quad F_{y'}\Big|_{x=x_1-0}=F_{y'}\Big|_{x=x_1+0}. \qquad (17)$$

Ці умови є умовами Веєрштрасса-Ердмана і разом з умовами неперервності шуканої екстремалі дозволяють визначити координати точки переломлення.

Умови Веєрштрасса-Ердмана виглядають особливо просто, якщо скористатися канонічними змінними $p=F_{y'}$ і $H=-F+y'F_{y'}$. Умови Веєрштрасса-Ердмана означають, що канонічні змінні у кутовій точці мають бути неперервними.

Аналогічні умови можна отримати для розв'язків з кутовими точками задачі про екстремум функціонала $v=\int_{x_0}^{x_2}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$. У цьому разі має задовольнятися умова

$$\delta v=\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_1-0}\delta x_1+\left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]_{x=x_1-0}\delta y_1+F_{y''}\Big|_{x=x_1-0}\delta y_1'-$$

$$-\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_1+0}\delta x_1-\left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]_{x=x_1+0}\delta y_1-F_{y''}\Big|_{x=x_1+0}\delta y_1'=0,$$

звідки

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_1-0}\delta x_1+\left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]_{x=x_1-0}\delta y_1+F_{y''}\Big|_{x=x_1-0}\delta y_1'=$$

$$=\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_1+0}\delta x_1+\left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]_{x=x_1+0}\delta y_1+F_{y''}\Big|_{x=x_1+0}\delta y_1'.$$

Оскільки δx_1, δy_1 і $\delta y_1'$ незалежні, дістанемо

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_1-0}=\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_1+0},$$

$$\left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]_{x=x_1-0}=\left[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]_{x=x_1+0},$$

$$F_{y''}\Big|_{x=x_1-0}=F_{y''}\Big|_{x=x_1+0}.$$

Як і в попередньому випадку, із цих умов разом з умовами неперервності шуканої екстремалі можна визначити координати точки переломлення.

Розглянемо, наприклад, функціонал

$$J=\frac{1}{2}\int_0^l y'^2 dx-\int_0^l q_x y\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_l^{2l} y'^2\mathrm{d}x.$$

Граничні умови:

$$y(0)=0,\ y(l)=\frac{q_x l^2}{2},\ y'(0)=q_x l,\ y'(l)=0.$$

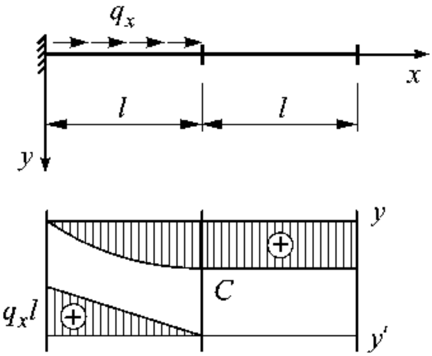


Рис. 21

Екстремум функціонала при заданих граничних умовах є розв'язком задачі, показаної на рис. 21.

Для цього функціонала на відрізку $[0,l]$ $F_{y'}=y'$, $F_y=-q_x$. Рівняння Ейлера $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$ має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-q_x.$$

Маємо:

$$y'=-q_x x+C_1,\ y=\frac{-q_x x^2}{2}+C_1x+C_2.$$

Із граничних умов дістанемо $C_1=q_x l$, $C_2=0$. Отже,

$$y=\frac{-q_x x^2}{2}+q_x lx.$$

На відрізку $[l,2l]$ $y=\frac{-q_x l^2}{2}$.

Таким чином, точка C є кутовою. Для цієї точки з урахуванням того, що на вертикальній лінії переломлення екстремалей $\delta x=0$, виконуються умови Веєрштрасса-Ердмана.

5.5. Формулювання достатніх умов сильного та слабкого екстремумів

Наука - це насамперед класифікація.
А. Пуанкаре

Наведемо використовувані в наш час формулювання, означення і пояснення щодо достатніх умов сильного і слабкого екстремумів.

Якщо на площині xOy через кожну точку деякої області D проходить одна і тільки одна крива сімейства $y=(x,C)$, то кажуть, що це сімейство кривих в області D є *полем*, або, точніше, *власним полем*. Кутовий коефіцієнт дотичної $p(x,y)$ до кривої сімейства $y=(x,C)$, що проходить через точку (x,y), називається *нахилом поля* в точці (x,y).

Наприклад, всередині кола $x^2+y^2 \le 1$ паралельні прямі $y=x+C$ утворюють поле і нахил цього поля $p(x,y)=1$. Сімейство парабол $y=(x-a)^2-1$ всередині того ж кола не є полем, оскільки всередині цього кола параболи сімейства перетинаються (рис. 22).

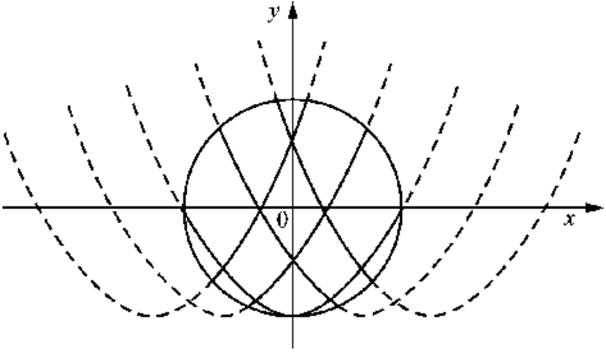


Рис. 22

Якщо всі криві сімейства $y=(x,C)$ проходять через деяку точку (x_0,y_0), тобто утворюють пучок кривих, то у разі коли центр пучка знаходиться в цій області, криві, очевидно, не утворюють власного поля в області D. Проте, якщо криві пучка покривають всю область D і ніде, крім центра пучка, в цій області не перетинаються, тобто у всіх точках, які не є центром пучка, виконуються вимоги, що накладаються на поле, то кажуть, що сімейство $y=(x,C)$ також утворює поле, але на відміну від власного поля таке поле називається *центральним* (рис. 23).

Наприклад, пучок синусоїд $y=C\sin x$ у достатньо малому околі відрізка осі абсцис $0 \le x \le a$, $a<\pi$ є центральним полем (рис. 24). Той самий пучок синусоїд у достатньо малому околі відрізка осі абсцис $\delta \le x \le a$, $\delta>0$, $a<\pi$ є власним полем (рис. 24). Той же пучок синусоїд у околі відрізка осі абсцис $0 \le x \le a_1$, $a_1>\pi$ не є полем.

Якщо власне або центральне поле утворене сімейством екстремалей деякої варіаційної задачі, то воно називається *полем екстремалей.*

Поняття поля майже без змін переноситься на випадок простору довільної кількості вимірів. Сімейство $y_i = (x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ є полем в області D простору $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, якщо через кожну точку в області D проходить одна і тільки одна крива сімейства $y_i = (x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Функціями нахилу поля $p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ називають частинні похідні від функцій $y_i = (x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ по x, обчислені в точці $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Отже, щоб мати $p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ треба знайти $\frac{\partial}{\partial x} y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ і замінити $C_1, C_2, \ldots, C_n$ їх виразами через координати $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Аналогічно можна визначити і центральне поле.

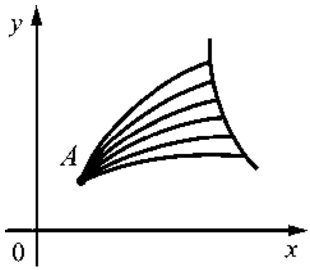


Рис. 23

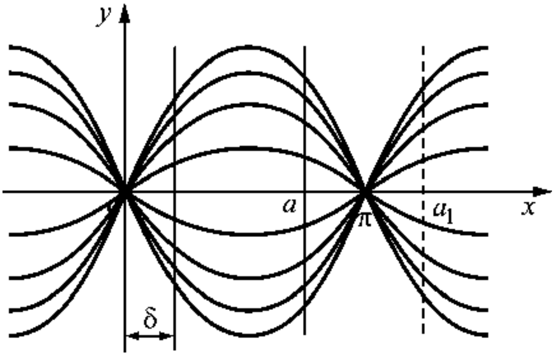


Рис. 24

Нехай крива $y = y(x)$ є екстремаллю варіаційної задачі про екстремум найпростішого функціонала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x .$$

Вважатимемо, що граничні точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ нерухомі. Кажуть, що екстремаль $y = y(x)$ включена в поле екстремалей, якщо існує сімейство екстремалей $y = (x, C)$, що утворює поле в деякій області D, яке при певному значенні $C = C_0$ містить екстремаль $y = y(x)$ і ця екстремаль не лежить на границі області D (рис. 25). Якщо пучок екстремалей з центром у точці $A(x_0, y_0)$ в околі екстремалі $y = y(x)$, що проходить через цю точку, є полем, то він і є центральним полем, що включає дану екстремаль. За параметр сімейства в такому разі можна прийняти кутовий коефіцієнт дотичної до кривих пучка в точці $A(x_0, y_0)$ (рис. 26).

Відомо [Бермант, 1956], що дві нескінченно близькі криві сімейства $F(x,y,C)=0$ перетинаються в точках C-дискримінантної кривої, яка визначається рівняннями

$$F(x,y,C)=0\,,\ \frac{\partial F}{\partial C}=0\,.$$

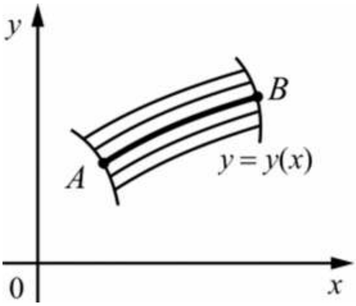


Рис. 25

Нагадаємо, що до C-дискримінантної кривої, зокрема, належать обвідна сімейства і геометричні місця кратних точок сімейства. Якщо $F(x,y,C)=0$ є рівнянням пучка кривих, то центр пучка також належить C-дискримінантній кривій. Тому, якщо для пучка екстремалей $y=y(x,C)$, що проходять через точку (x_0,y_0), визначити його C-дискримінантну криву $\Phi(x,y)=0$, то близькі криві сімейства $y=y(x,C)$ перетинатимуться поблизу кривої $\Phi(x,y)=0$. Зокрема, криві цього сімейства, близькі до розглядуваної екстремалі $y=y(x)$, що проходить через точки $A(x_0,y_0)$ і $B(x_1,y_1)$, перетинатимуться в точках, близьких до точок дотику (або перетину) кривої $y=y(x)$ і C-дискримінантної кривої (рис. 27). Якщо дуга AB екстремалі $y=y(x)$ не має відмінних від точки A спільних точок з C-дискримінантною кривою пучка екстремалей, то достатньо близькі до дуги AB екстремалі пучка не перетинаються, тобто утворюють у околі дуги AB центральне поле, що включає цю дугу (рис. 28).

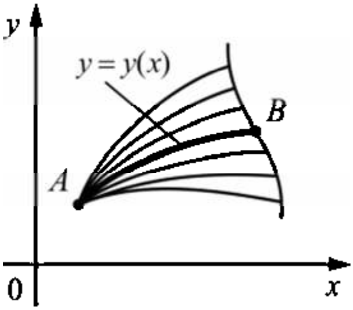


Рис. 26

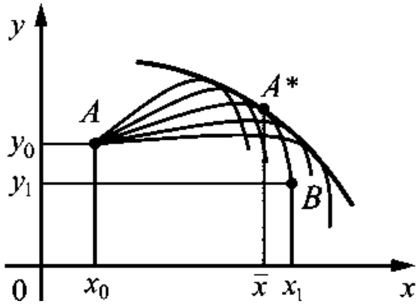


Рис. 27

Якщо дуга AB екстремалі $y=y(x)$ має відмінну від A спільну точку A^* із C-дискримінантною кривою пучка $y=y(x,C)$, то близькі до $y=y(x)$ криві пучка можуть перетинатися між собою і з кривою $y=y(x)$ поблизу точки A^* і, взагалі кажучи, поля не утворюють (рис. 27). Точка A^* називається *точкою, спряженою з точкою A*.

Отриманий результат можна сформулювати так: *для побудови центрального поля екстремалей з центром у точці A, що*

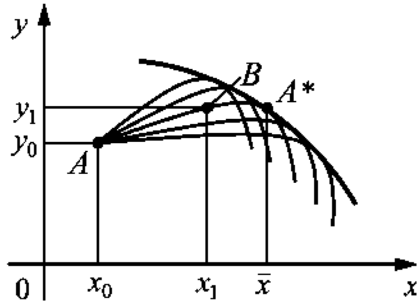


Рис. 28

містить дугу екстремалі AB, достатньо, щоб точка A^*, спряжена з точкою A, не лежала на дузі AB. Ця умова можливості побудови поля екстремалей, яке включає дану екстремаль, має назву *умови Якобі.*

Умову Якобі можна сформулювати і аналітично. Нехай $y = y(x, C)$ − рівняння пучка екстремалей з центром у точці *A*. Для визначеності можна вважати, що параметр *C* співпадає з кутовим коефіцієнтом y' екстремалей пучка в точці *A*. *C*-дискримінантна крива визначається рівняннями

$$y = y(x, C),\ \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Вздовж кожної фіксованої кривої сімейства похідна $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ є функцією лише від x. Цю функцію позначимо через u: $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, де *C* задане; звідси $u'_x = \frac{\partial^2 y(x, C)}{\partial C \partial x}$. Функції $y = y(x, C)$ є розв'язками рівняння Ейлера, тому

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}(x, y(x, C), y'_x(x, C)) \equiv 0.$$

Після диференціювання цієї тотожності по *C* із урахуванням $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = u$ дістанемо

$$F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{yy'}u + F_{y'y'}u') = 0$$

або

$$(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{yy'})u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'y'}u') = 0.$$

У цьому поданні функції $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$, $F_{y'y'}(x, y, y')$ є відомими функціями від x, оскільки другий аргумент y є розв'язком рівняння Ейлера $y = y(x, C)$ при значенні $C = C_0$, що визначає екстремаль *AB*. Це лінійне однорідне рівняння другого порядку відносно u називається *рівнянням Якобі.*

Якщо розв'язок цього рівняння $u = \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, що дорівнює нулю у центрі пучка при $x = x_0$ (центр пучка завжди належить *C*-дискримінантній кривій), дорівнює нулю ще в якій-небудь точці інтервалу $x_0 < x < x_1$, то спряжена із *A* точка, яка визначається рівняннями

$$y = y(x, C_0) \text{ і } \frac{\partial y(x, C)}{\partial C} = 0 \text{ або } u = 0,$$

лежить на дузі екстремалі *AB*. Зауважимо, що всі нетривіальні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку, які задовольняють умову $u(x_0) = 0$, відрізняються один від одного лише відмінним від нуля сталим множником і тому перетворюються на нуль одночасно. Якщо існує розв'язок рівняння Якобі, який дорівнює нулю при $x = x_0$ і не дорівнює нулю у всіх інших точках відрізка $x_0 \leq x \leq x_1$, то точок, спряжених з *A*, на дузі *AB* немає, − умова Якобі виконана, і дугу екстремалі *AB* можна включити в центральне поле екстремалей з центром у точці *A*.

Умова Якобі є необхідною для досягнення екстремуму, тобто для кривої *AB*, що реалізує екстремум, спряжена із *A* точка не може належати інтервалу $x_0 < x < x_1$.

Припустимо, що у найпростішій задачі про екстремум функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x\,,\ y(x_0) = y_0\,,\ y(x_1) = y_1$$

умова Якобі виконується і екстремаль *C*, що проходить через точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$, можна включити в центральне поле, нахил якого дорівнює $p(x, y)$ (рис. 29). (Можна було б також припустити, що екстремаль включена не в центральне, а у власне поле.) Розглянемо приріст Δv функціонала *v* при переході від екстремалі *C* до деякої близької екстремалі $\tilde{C}$:

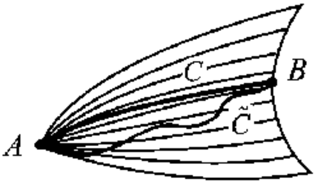


Рис. 29

$$\Delta v = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y')\mathrm{d}x - \int_{C} F(x, y, y')\mathrm{d}x\,.$$

Символи $\int_{\tilde{C}} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ і $\int_{C} F(x, y, y')\mathrm{d}x$ у цьому поданні позначають значення функціонала $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$, взяті відповідно по дугах кривих $\tilde{C}$ і *C*. Для визначення знаку приросту Δv запишемо його у іншому, зручнішому для використання, вигляді.

Розглянемо допоміжний функціонал

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - p\right) F_p(x, y, p)]\mathrm{d}x\,, \tag{18}$$

який на екстремалі *C* перетворюється на $\int_{C} F(x, y, y')\mathrm{d}x$, оскільки на екстремалях поля $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$. Цей інтеграл є *інваріантним інтегралом Гільберта* (про інтеграл Гільберта докладніше див. нарис 6). Його значення полягає в тому, що для екстремалі *C*, яка включена в центральне поле, інтеграл Гільберта дозволяє функціонал (18) для цієї екстремалі записати у вигляді інтеграла, який можна брати по будь-якій кривій, що з'єднує кінці екстремалі C.

Цей допоміжний функціонал

$$\int_{\tilde{C}}[F(x,y,p)+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-p\right)F_p(x,y,p)]\mathrm{d}x\,,$$

або

$$\int_{\tilde{C}}\left[F(x,y,p)-pF_p(x,y,p)\right]\mathrm{d}x+F_p(x,y,p)\mathrm{d}y \tag{19}$$

є інтегралом від точного диференціала. Дійсно, диференціал функції $\overline{v}(x,y)$, в яку перетворюється функціонал $v[y(x)]$ на екстремалях поля, має вигляд

$$\mathrm{d}\overline{v}=\left[F(x,y,y')-y'F_{y'}(x,y,y')\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+F_{y'}(x,y,y')\mathrm{d}y$$

і лише позначенням кутового коефіцієнта дотичної до екстремалей поля відрізняється від підінтегрального виразу у інтегралі (19).

Інтеграл $\int_{\tilde{C}}\left[F+(y'-p)F_p\right]\mathrm{d}x$ на екстремалі C збігається з інтегралом $\int_{C}F(x,y,y')\mathrm{d}x$, а оскільки функціонал $\int_{\tilde{C}}[F+(y'-p)F_p]\mathrm{d}x$ є інтегралом від точного диференціала і тому не залежить від шляху інтегрування, то

$$\int_{C}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\int_{\tilde{C}}[F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)]\mathrm{d}x$$

не тільки при $\tilde{C}=C$, але і при будь-якому $\tilde{C}$.

Отже, приріст

$$\Delta v=\int_{\tilde{C}}F(x,y,y')\mathrm{d}x-\int_{C}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

можна подати у такому вигляді:

$$\Delta v=\int_{\tilde{C}}F(x,y,y')\mathrm{d}x-\int_{\tilde{C}}\left[F(x,y,p)+(y'-p)F_p(x,y,p)\right]\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{\tilde{C}}\left[F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right]\mathrm{d}x\,.$$

Підінтегральна функція називається *функцією Веєрштрасса* і позначається $E(x,y,p,y')$:

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\,.$$

У цих позначеннях

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y')\mathrm{d}x\,.$$

Очевидно, що достатньою умовою досягнення функціоналом v мінімуму на кривій C буде невід'ємність функції E, оскільки якщо $E \geq 0$, то і $\Delta v \geq 0$, а достатньою умовою максимуму буде $E \leq 0$, оскільки в такому разі і $\Delta v \leq 0$. При цьому для слабкого мінімуму достатньо, щоб нерівність $E(x, y, p, y') \geq 0$ (або $E(x, y, p, y') \leq 0$ для максимуму) виконувалася для значень x, y, близьких до значень x, y на досліджуваній екстремалі C, і для значень y', близьких до $p(x, y)$ на цій же екстремалі, а для сильного мінімуму та сама нерівність має виконуватися для тих же x, y, але вже для довільних y', оскільки для сильного екстремуму близькі криві можуть мати довільні напрямки дотичних, а для слабкого екстремуму значення y' на близьких кривих близькі до значень $y' = p$ на екстремалі C.

Таким чином, достатніми умовами досягнення функціоналом v екстремуму на кривій C є такі умови.

Для слабкого екстремуму

1. Крива C є екстремаллю, яка задовольняє граничні умови.
2. Екстремаль C можна включити в поле екстремалей.
   Цю умову можна замінити умовою Якобі.
3. Функція $E(x, y, p, y')$ не змінює знаку у всіх точках (x, y), близьких до кривої C, і для близьких до $p(x, y)$ значень y'. У разі мінімуму $E \geq 0$, у разі максимуму $E \leq 0$.

Для сильного екстремуму

1. Крива C є екстремаллю, що задовольняє граничні умови.
2. Екстремаль C можна включити в поле екстремалей.
   Цю умову можна замінити умовою Якобі.
3. Функція $E(x, y, p, y')$ не змінює знаку у всіх точках (x, y), близьких до кривої С, і для довільних значень y'. У разі мінімуму $E \geq 0$, у разі максимуму $E \leq 0$.

Можна довести, що умова Веєрштрасса є необхідною. Точніше, якщо в центральному полі, що включає екстремаль C, у точках екстремалі для деяких y' функція E має протилежні знаки, то сильний екстремум не досягається. Якщо ця властивість має місце при як завгодно близьких до p значеннях y', то не досягається і слабкий екстремум.

Дослідження знаку функції E є досить не простою задачею, і тому бажано умову збереження знаку функцією E замінити легшою для перевірки умовою.

Припустимо, що функція $F(x, y, y')$ є тричі диференційовною по аргументу y'. За формулою Тейлора маємо

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + (y'-p)F_p(x,y,p) + \frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q),$$

де q знаходиться між p і y'.

Після заміни $F(x, y, y')$ її розкладом за формулою Тейлора функція

$$E(x,y,p,y') = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_p(x,y,p)$$

набирає вигляду

$$E(x,y,p,y') = \frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q).$$

Звідси видно, що функція E зберігає знак, якщо зберігає знак $F_{y'y'}(x,y,q)$. При дослідженні на слабкий екстремум функція $F_{y'y'}(x,y,q)$ має зберігати знак для значень x і y в точках, близьких до точок досліджуваної екстремалі, і для значень q, близьких до p. Якщо $F_{y'y'}(x,y,y') \neq 0$ у точках екстремалі *C*, то внаслідок неперервності ця друга похідна зберігає знак і у точках, близьких до кривої *C*, і для значень y', близьких до значень y' на кривій *C*. Отже, при дослідженні на слабкий мінімум умову $E \geq 0$ можна замінити на умову $F_{y'y'} > 0$ на екстремалі *C*, а при дослідженні на слабкий максимум умову $E \leq 0$ можна замінити умовою $F_{y'y'} < 0$ на кривій *C*. Умова $F_{y'y'} > 0$ (або $F_{y'y'} < 0$) має назву *умови Лежандра.* Умову $F_{y'y'} > 0$ (або $F_{y'y'} < 0$) часто називають посиленою умовою Лежандра, а умовою Лежандра називають нерівність $F_{y'y'} \geq 0$ (або $F_{y'y'} \leq 0$).

При дослідженні на сильний мінімум умову $E \geq 0$ можна замінити вимогою $F_{y'y'}(x,y,q) \geq 0$ в точках (x,y), близьких до точок кривої *C* при довільних значеннях q. При цьому, звичайно, припускається, що розклад за формулою Тейлора

$$F(x,y,y') = F(x,y,p) + (y'-p)F_p(x,y,p) + \frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,y,q)$$

справедливий при будь-яких y'. При дослідженні на сильний максимум матимемо умову $F_{y'y'}(x,y,q) \leq 0$ при тих самих припущеннях щодо області зміни аргументів і розкладності функції $F(x, y, y')$ за формулою Тейлора.

Підсумовуючи, наведемо формулювання достатніх умов екстремуму.

Слабкий мінімум	*Сильний мінімум*
1. $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$.	1. $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$.

2. Умова Якобі.	2. Умова Якобі.
3. $F_{y'y'}>0$ на досліджуваній екстремалі.	3. $F_{y'y'}(x,y,y')\geq 0$ для точок (x,y), близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для довільних значень y'. При цьому вважається, що функція $F(x,y,y')$ є тричі диференційовною по y' для будь-яких y'.

Інакше достатні умови екстремуму функціонала можна подати у такому вигляді.

Слабкий мінімум	*Сильний мінімум*
1. $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$.	1. $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$.
2. Умова Якобі.	2. Умова Якобі.
3. $E(x,y,p,y')\geq 0$ для точок (x,y), близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для y', близьких до $p(x,y)$.	3. $E(x,y,p,y')\geq 0$ для точок (x,y), близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для довільних значень y'.

Можна сформулювати ще одне подання достатніх умов екстремуму.

Слабкий мінімум	*Сильний мінімум*
1. $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$.	1. $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$.
2. Існує поле екстремалей, яке включає дану екстремаль.	2. Існує поле екстремалей, яке включає дану екстремаль.
3. $E(x,y,p,y')\geq 0$ для точок (x,y), близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для y', близьких до $p(x,y)$.	3. $E(x,y,p,y')\geq 0$ для точок (x,y), близьких до точок на досліджуваній екстремалі, і для довільних значень y'.

Для отримання достатніх умов максимуму у всіх наведених варіантах формулювання достатніх умов треба знаки нерівностей замінити на протилежні.

Розглянемо, наприклад, дослідження на екстремум функціоналу

$$v[y(x)]=\int_{0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x,\ y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$$

(див. задачу про брахістохрону, нарис 3).

Екстремалями є циклоїди

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2,$$

$y = C_1(1-\cos t)$.

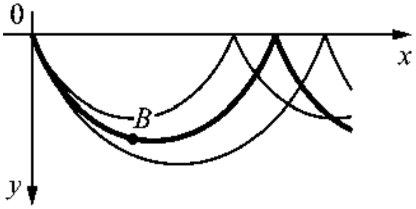


Рис. 30

Пучок циклоїд $x = C_1(t-\sin t)+C_2$, $y = C_1(1-\cos t)$ з центром у точці (0,0) є центральним полем, яке включає екстремаль

$$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),$$

де a визначено із умови проходження циклоїди через другу граничну точку $B(x_1, y_1)$, якщо $x_1 < 2\pi a$ (рис. 30).

Маємо

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}},\ F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

для будь-яких y'. Отже, при $x_1 < 2\pi a$ на циклоїді

$$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)$$

реалізується сильний мінімум.

Наведена теорія без значних змін переноситься на функціонали виду

$$v\left[y_1, y_2, \dots, y_n\right] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\mathrm{d}x,$$

$$y_i(x_0) = y_{i0},\ y_i(x_1) = y_{i1},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Функція E для таких функціоналів має вигляд

$$E = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') - F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(y_i - p_i)F_{p_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

де p_i – функції нахилу поля, на яке накладаються певні обмеження.

Умова Лежандра $F_{y'y'} \ge 0$ замінюється такими умовами

$$F_{y_i'y_i'} \ge 0,\ \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} \ge 0,\ \dots,\ \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \cdots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \cdots & F_{y_2'y_n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \cdots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix} \ge 0.$$

Достатні умови слабкого мінімуму як у найпростішій задачі, так і у складніших, можна дістати також іншим методом, який ґрунтується на дослідженні знаку другої варіації. Введемо необхідні загальні поняття.

Функціонал $L[x, y]$, що залежить від двох функцій називається *білінійним*, якщо при фіксованому x він є лінійним функціоналом від y, а при фіксованому y – лінійним функціоналом від x. Тобто функціонал $L[x, y]$ білінійний, якщо

$$L[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha L[x_1, y] + \beta L[x_2, y],$$
$$L[x, \gamma y_1 + \delta y_2] = \gamma L[x, y_1] + \delta L[x, y_2].$$

Якщо у білінійному функціоналі вважати, що $y = x$, дістанемо вираз, який називається *квадратичним* функціоналом.

Наприклад, вираз $\int\limits_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ є білінійний функціоналом, а $\int\limits_a^b x^2(t)\mathrm{d}t$ – квадратичним функціоналом.

Нагадаємо, що функціонал $v[y]$ називається диференційовним, якщо його приріст $\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$ можна подати у вигляді $\Delta v = L[\delta y] + \beta \max|\delta y|$, де $L[\delta y]$ – лінійний відносно δy функціонал, $\max|\delta y|$ – максимальне значення $|\delta y|$ і $\beta \to 0$ при $\max|\delta y| \to 0$. Головна лінійна відносно δy частина $L[\delta y]$ приросту називається диференціалом або варіацією функціонала і позначається δv.

Поняття другої варіації (другого диференціала) функціонала вводиться таким чином. Вважається, що функціонал $v[y]$ має другу варіацію, якщо його приріст можна подати у вигляді

$$\Delta v = L_1[\delta y] + L_2[\delta y] + \beta \max|\delta y|^2,$$

де $L_1[\delta y]$ – лінійний функціонал (варіація), $L_2[\delta y]$ – квадратичний функціонал і $\beta \to 0$ при $\max|\delta y| \to 0$. Квадратичний функціонал $L_2[\delta y]$ називається *другою варіацією* (другим диференціалом) функціонала $v[y]$ і позначається $\delta^2 v$.

Застосовуючи формулу Тейлора, подамо приріст функціонала у найпростішій задачі в такому вигляді

$$\Delta v = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y'\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'} \delta y'\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_{yy}\delta y^2 + 2F_{yy'}\delta y \delta y' + F_{y'y'}\delta y'^2\right)\mathrm{d}x + R,$$

де R має порядок вищий другого відносно δy і $\delta y'$. При дослідженні на слабкий екстремум δy і $\delta y'$ достатньо малі і в такому разі знак приросту Δv визначається знаком доданку у правій частині, який містить найнижчі степені δy і $\delta y'$. На екстремалі перша варіація

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'} \delta y'\right)\mathrm{d}x = 0$$

і тому знак приросту Δv, взагалі кажучи, збігається із знаком другої варіації

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2 \right) \mathrm{d}x .$$

Умова Лежандра разом з умовою Якобі і є умовами, що забезпечують сталість знаку другої варіації, а разом з тим і сталість знаку приросту Δv в задачі про слабкий екстремум. Дійсно, розглянемо інтеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\omega'(x) \delta y^2 + 2\omega(x) \delta y \delta y' \right) \mathrm{d}x , \tag{20}$$

де $\omega(x)$ – довільна диференційовна функція. Цей інтеграл дорівнює нулю. Справді,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\omega'(x) \delta y^2 + 2\omega(x) \delta y \delta y' \right) \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} d(\omega \delta y^2) \mathrm{d}x = [\omega(x) \delta y^2] \Big|_{x_0}^{x_1} = 0 ,$$

через те, що $\delta y \big|_{x_0} = \delta y \big|_{x_1} = 0$.

Додаючи інтеграл (20) до другої варіації, дістанемо

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} \Big[(F_{yy} + \omega') \delta y^2 + 2(F_{yy'} + \omega) \delta y \delta y' + F_{y'y'} \delta y'^2 \Big] \mathrm{d}x .$$

Виберемо функцію $\omega(x)$ так, щоб підінтегральний вираз з точністю до множника був точним квадратом. Для цього $\omega(x)$ має задовольняти рівняння

$$F_{y'y'} (F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0 .$$

При такому виборі функції ω друга варіація набирає вигляду

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'} \left(\delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}} \delta y \right)^2 \mathrm{d}x ,$$

і тому знак другої варіації збігається зі знаком $F_{y'y'}$. Таке перетворення можливе лише за припущення, що диференціальне рівняння

$$F_{y'y'} (F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

має на відрізку (x_0, x_1) диференційовний розв’язок $\omega(x)$.

Перетворимо це рівняння, вводячи нові змінні підстановкою

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'} \frac{u'}{u} ,$$

де u – нова невідома функція. В результаті дістанемо

$$(F_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{yy'}) u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (F_{y'y'} u') = 0$$

– рівняння Якобі.

Якщо існує розв’язок цього рівняння, що не перетворюється у нуль при $x_0 < x \le x_1$, тобто задовольняється умова Якобі, то для тих самих значень x існує неперервний і диференційовний розв’язок

$$\omega(x) = -F_{yy} - F_{y'y'} \frac{u'}{u}$$

рівняння

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0 .$$

Отже, умова Лежандра і умова Якобі гарантують збереження знаку другої варіації.

Леонард Ейлер,
нім. Leonhard Euler
(1707-1783)

Для ілюстрації наведеного розглянемо відому задачу Ейлера про втрату стійкості шарнірно опертої балки, під дією сили *P*, що діє уздовж осі балки. При втраті стійкості в балці з'являються прогини $y(x)$ і згинальні моменти $M(x)$, причому в перерізі з довільною координатою x маємо

$$M(x) = P \cdot y(x). \tag{21}$$

Своєю чергою, зовнішнє навантаження (сила *P*) виконує роботу на переміщенні Δ, що визначається виразом

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 \mathrm{d}x , \tag{22}$$

тобто горизонтальні переміщення виникають тільки внаслідок поворотів, а не в результаті малих поздовжніх деформацій, якими можна знехтувати.

Оскільки задача є геометрично нелінійною, то функціонал типу Кастільяно можна подати у такому вигляді [Баженов, 2014]

$$\Pi^K[M, N, y'] = -\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI} \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l N(y')^2 \mathrm{d}x . \tag{23}$$

З урахуванням (21) і, оскільки $N = -P = const$, функціонал (23) можна подати у вигляді

$$\Pi[y, y'] = \frac{1}{2}\int_0^l \left[P(y')^2 - \frac{1}{EI}(Py)^2 \right] \mathrm{d}x. \tag{24}$$

Таким чином, умовою втрати стійкості є набуття силою *P* значення, при якому змінюється характер стаціонарного розв'язку варіаційної задачі

$$\delta J[y] = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad P > 0 , \tag{25}$$

де

$$J[y] = \int_0^l \left[(y')^2 - \frac{P}{EI} y^2 \right] \mathrm{d}x . \tag{26}$$

Рівняння Ейлера для розглядуваного функціонала має вигляд

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y')-\frac{P}{EI}2y=0,$$

або

$$y''+k^2y=0, \tag{27}$$

де

$$k^2=\frac{P}{EI}.$$

Його загальним розв'язком є функція $y=C_1\sin(kx)+C_2\cos(kx)$. Із граничної умови $y(0)=0$ випливає, що $C_2=0$. Далі, при $k\neq n\frac{\pi}{l}$ задовольнити граничну умову $y(l)=0$ можна тільки при $C_1=0$, тобто єдиним розв’язком рівняння Ейлера в цьому разі є функція $y(x)=0$.

Перевіримо виконання умови Якобі. Підставимо в рівняння Якобі

$$(F_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'})u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'y'}u')=0$$

значення $F_{yy}(x,y,y')=-2k^2$, $F_{yy'}(x,y,y')=0$, $F_{y'y'}(x,y,y')=2$ і дістанемо

$$k^2u+u''=0.$$

Оскільки $u(0)=0$, то $u=C\sin(kx)$, і якщо $kl<\pi$, то криві пучка утворюють центральне поле, яке включає в себе екстремаль, і умова Якобі виконується.

Оскільки функція F тричі диференційовна по y' і $F_{y'y'}(x,y,y')=2>0$ при довільних значеннях y, то на прямій $y(x)=0$ при $kl<\pi$ реалізується сильний мінімум функціоналу типу Кастільяно.

Водночас при $kl>\pi$ умова Якобі не виконується, отже можна стверджувати, що в цьому разі екстремум на прямій $y(x)=0$ не досягається.

Також не виконується умова Якобі (відсутність спряжених точок) і при $k=k_{cr}=\frac{\pi}{l}$. У цьому разі можливі два розв'язки рівняння Ейлера (27): $y(x)=0$ і $y=C_1\sin(k_{cr}x)$, $C_1\neq 0$. Таким чином, при досягненні силою P значення $\frac{\pi^2}{l^2}EI$ система переходить в критичний стан.

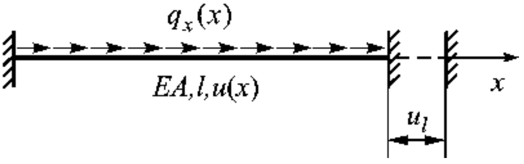


Рис. 31

Проілюструємо наведені вище теоретичні положення також прикладом, пов'язаним з одноосьовим НДС, що виникає в прямому стержні, на який діє розподілене поздовжнє навантаження. Кінці стержня затиснені, причому правий кінець примусово зміщений на величину u_l (рис. 31). Визначення деформованого стану стержня зводиться до розв'язання найпростішої варіаційної задачі

$$\delta\Pi[u]=0,\quad u(0)=0,\quad u(l)=u_l, \tag{28 }$$

де

$$\Pi[u]=\int_0^l\left[\frac{EA}{2}(u')^2-q_x u\right]\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Для знаходження допустимої екстремалі складемо рівняння Ейлера

$$F_u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u'}=0,$$

або оскільки, $F=\frac{EA}{2}(u')^2-q_x u$, $F_u=-q_x, F_{u'}=EAu'$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{u'}=EAu''$, то

$$u''=-\frac{q_x}{EA}\ . \tag{30}$$

Розв’язок рівняння Ейлера залежить від функції навантаження. Якщо, наприклад, $q_x=q_0(x-l)$, то після дворазового інтегрування виразу (30) дістанемо

$$u(x)=-\frac{q_0}{6EA}x^3+\frac{q_0}{2EA}lx^2+C_1x+C_2.$$

З граничних умов визначимо константи $C_2=0$, $C_1=\frac{u_l}{l}-\frac{q_0 l^2}{3EA}$ і остаточно матимемо

$$u(x)=-\frac{q_0}{6EA}(x^3-3lx^2+2l^2x)+\frac{u_l}{l}x. \tag{31}$$

Перевіримо для знайденої екстремалі виконання необхідних і достатніх умов екстремуму. Оскільки $F_{u'u'}=EA>0$, то виконана посилена необхідна умова Лежандра слабкого (а, отже, і сильного) мінімуму. Для перевірки умови Якобі запишемо рівняння Якобі

$$F_{uu}h+F_{uu'}h'-\frac{d}{dx}(F_{uu'}h+F_{u'u'}h')=0.$$

З урахуванням того, що $F_{uu}=0,\ F_{uu'}=0,\ F_{u'u'}=EA,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{u'u'}h')=EAh''$, рівняння Якобі є однорідним диференціальним рівнянням $h''=0$, розв’язок якого при початкових умовах $h(0)=0,\ h'(0)=1$ має вигляд $h(x)=x$. Цей розв’язок на відрізку $0\le x\le l$ має тільки один корінь $x=0$, тобто спряжених точок немає, і тому для допустимої екстремалі виконується умова Якобі. Таким чином, виконані достатні умови слабкого мінімуму.

Легко переконатися, що екстремаль (31) доставляє сильний мінімум функціоналу (29). Для цього запишемо функцію Веєрштрасса

$$E(x,u,p,u') = F(x,u,u') - F(x,u,p) - (u' - p)F_p(x,u,p),$$

яка з урахуванням того, що $F(x,u,u') = \frac{EA}{2}(u')^2 - q_x u$ і $F_p(x,u,p) = EAp$, набирає вигляду

$$E(x,u,p,u') = \frac{EA}{2}\left[(u')^2 - p^2\right] - (u' - p)EAp = \frac{EA}{2}(u' - p)^2. \qquad (32)$$

Оскільки ця функція $E(x,u,p,u')$ невід'ємна при довільних значеннях u', то отримана екстремаль є точкою сильного мінімуму.

Відзначимо також, що в даній задачі можна було встановити сильний мінімум, не виписуючи функцію Веєрштрасса. Простіше зауважити, що функція F є тричі диференційовною і $F_{u'u'} = EA > 0$ при довільних значеннях u', що забезпечує знакосталість функції $E(x,u,p,u')$.

НАРИС 6

ТЕОРІЯ ПОЛЯ ЕКСТРЕМАЛЕЙ. КНЕЗЕР, ГІЛЬБЕРТ. ТЕОРЕМА НЕТЕР

> *Будь-яку задачу варіаційного числення можна розв'язати, якщо тільки слову "розв'язок" надати відповідний сенс.*
>
> Д. Гільберт

6.1. Теорія поля екстремалей

Для розвитку варіаційного числення у другій половині XIX ст., як і для всієї історії цієї математичної дисципліни, характерним є тісний зв'язок із застосуваннями. Її результати використовувалися при розв'язанні великої кількості конкретних геометричних і механічних задач, що своєю чергою спонукало до створення нових теорій. Такими були, зокрема, задача Ньютона, задача про геодезичні лінії на поверхні і численні задачі механіки, де екстремум шукається в класі кривих, що відповідають системі диференціальних рівнянь.

6.1.1. Поле екстремалей. Умови трансверсальності

На лекціях Веєрштрасса з варіаційного числення вчилися багато математиків. В останні десятиліття XIX ст. з'явилася велика кількість статей та дисертацій, в яких ідеї Веєрштрасса розвивалися і узагальнювались. Одним з найважливіших результатів є формування поняття поля екстремалей, яке введено німецькими математиками Адольфом Кнезером (1862-1930) і Давідом Гільбертом (1862-1943) на зламі XIX і XX ст. і узагальнено А.М. Майером у 1905 р. Теорія поля екстремалей є зручним апаратом для дослідження різних узагальнень найпростішої варіаційної задачі: задачі, де розглядаються інтеграли, що містять *n* невідомих функцій, задачі з рухомими границями, задачі з обмеженнями.

Адольф Кнезер,
нім. Adolf Kneser
(1862 – 1930)

Давид Гільберт,
нім. David Hilbert
(1862 – 1943)

У Веєрштрасса поняття поля ще не виділяється. При доведенні достатності знайдених ним умов Веєрштрасс говорить тільки про таку «смугу площини» поблизу екстремалі *AB*, що через кожну точку *B'* цієї смуги можна провести екстремаль *AB'*.

Якобі і Веєрштрасс розглядали тільки центральне поле - всі екстремалі перетинаються в початковій точці *A* з абсцисою $x = x_0$.

Формування поняття поля екстремалей сталося в результаті двох відкриттів: 1) геометричної теорії Кнезера і 2) теорії Гільберта, побудованої на основі його «теорем незалежності».

Роботи А. Кнезера відносяться до різних розділів математики (алгебри, геометрії і інш.), але основні його досягнення стосуються аналізу і його застосувань, в першу чергу теорії інтегральних рівнянь і варіаційного числення. А.Кнезер був членом-кореспондентом Берлінської академії наук. У 1924 р. обраний іноземним членом-кореспондентом АН СРСР. У своєму поданні на Кнезера в члени-кореспонденти АН СРСР В.А. Стєклов, П.П. Лазарєв і А.А. Білопільський

Карл Густав Якоб Якобі,
нім. Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851)

Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс,
нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
(1815-1897)

писали: «Особливою популярністю користуються дослідження Кнезера з варіаційного числення, де він є продовжувачем того класичного напряму, який надали цьому розділу математики роботи Ейлера, Лагранжа, Якобі і Майера. Цей вельми важливий розділ науки зобов'язаний Кнезеру істотними вдосконаленнями. Всі ці дослідження опубліковані в різних періодичних виданнях (між іншим, в «Повідомленнях Харківського математичного товариства» і головним чином в «Mathematischen Annalen»), в систематичній переробці викладені ним потім в роботі «Lehrhuch der Variationrechmmg», яка разом з роботою Адамара «Calcul des Variations» є в даний час настільною книгою для кожного, хто працює в цій області» [Стеклов, 1982, с. 453] (див. Також [Стеклов, 1980, с. 21]).

Геометрична теорія Кнезера викладена ним в підручнику 1900 р. [Kneser, 1925]. Вона грунтується на плідній думці про поширення на загальні варіаційні задачі понять і законів теорії геодезичних ліній на поверхні, розвиненої здебільшого в роботах Гаусса і Дарбу.

У своїх роботах з геодезії і геофізики Гаусс підійшов до проблеми побудови загальної теорії поверхонь. У 1812–1816 рр. він вивчав геодезичні лінії еліптичного сфероїда. У 1816 р., узагальнюючи проблеми картографії, Гаусс прийшов до загального питання про конформне відображення довільних поверхонь одна на одну і запропонував це питання Копенгагенському вченому товариству як тему на здобуття премії. Ця тема була оголошена в 1822 р., і в тому ж році Гаусс представив роботу «Загальне вирішення задачі: відобразити частину заданої поверхні на частину іншої заданої поверхні так, щоб відображення було подібним до відображеного в найдрібніших частинах», опубліковану в 1825 р. [Gauss, 1863–1933, т. 4, с. 187–216]. Другою роботою Гаусса з теорії поверхонь є його знаменитий мемуар «Загальні дослідження про криві поверхні» [Гаусс, 1956], опублікований у 1828 р.

Для варіаційного числення особливе значення мають теореми Гаусса про геодезичні лінії.

1. Нехай R - деяка крива на поверхні. Через кожну точку R проведемо геодезичні лінії, ортогональні до R, і на цих геодезичних лініях відкладемо дуги рівної довжини. Тоді кінці дуг утворюють деяку криву на поверхні, ортогональну до геодезичних ліній.

2. Дві траєкторії, ортогональні до сімейства геодезичних ліній, відсікають на них дуги рівної довжини.

Йоганн Карл Фрідріх Гаусс, нім. Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Жан Ґасто́н Дарбу́, фр. Jean Gaston Darboux (1842-1917)

Нехай точки кривої R визначаються параметром v. Розглянемо на R деяку точку $M(v)$, проведемо в цій точці геодезичну, ортогональну до R, і відкладемо на ній дугу довжини u. В результаті отримаємо деяку точку на поверхні $A(u,v)$. Так вводиться система криволінійних координат (u,v), де $v = \text{const}$ – сімейство геодезичних ліній, $u = \text{const}$ - сімейство ортогональних траєкторій.

Г. Дарбу (1889) [Darboux,1887–1896, т.2], (1894) [Darboux,1887–1896, т. 3] при дослідженні геодезичних ліній на поверхні виходить з того, що кожна точка розглядуваної частини поверхні однозначно визначається за допомогою координат u та v, тобто спирається на те, що геодезичні лінії утворюють поле.

Кнезер поширив методи Дарбу на варіаційну задачу про екстремум інтеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\mathrm{d}t\,. \qquad (1)$$

Узагальнивши умову ортогональності, Кнезер отримав умову трансверсальності: в точці P перетину екстремалі з кривою R має виконуватися рівність

$$F_{x'}(x, y, x', y')\overline{x}' + F_{y'}(x, y, x', y')\overline{y}' = 0\,,$$

де x', y' - похідні до екстремалі в точці P, а $\overline{x}', \overline{y}'$ – похідні до кривої R в тій же точці.

Отже, умова трансверсальності пов'язує напрямки дотичних вздовж досліджуваної екстремалі і вздовж деякої кривої R, з якою екстремаль перетинається. Трансверсаль - це лінія, при перетині якої з кожною екстремаллю виконується умова трансверсальності. При перекладі на мову конкретної задачі про геодезичні лінії на поверхні екстремалі - це геодезичні лінії, а трансверсалі - ортогональні траєкторії.

Кнезер розглянув сімейство екстремалей і сімейство трансверсалей і побудував криволінійну систему координат, ґрунтуючись на теоремах, аналогічних наведеним вище теоремам Гаусса.

1. Нехай R - деяка крива на поверхні. Через кожну точку, що лежить на R, проведемо екстремаль, при перетині якої з R справджується умова трансверсальності. Відкладемо на цих екстремалях дуги, на яких розглядуваний інтеграл (1) приймає стале значення. Тоді кінці дуг утворюють криву, трансверсальну до всіх екстремалей сімейства.

2. Дві траєкторії, трансверсальні до сімейства екстремалей, відсікають на екстремалях дуги, на яких розглядуваний інтеграл має стале значення.

Побудовані Кнезером сімейства екстремалей і трансверсалей стали зручним геометричним апаратом для вирішення варіаційних задач.

Кнезеру належить теорема про обвідні, яка носить його ім'я. У випадку геодезичних на поверхні вона формулюється так: довжина дуги геодезичної еволюти до кривої Г дорівнює різниці довжин відрізків геодезичних нормалей кривої Г, що торкаються еволюти в кінцях цієї дуги.

Використовуючи цей результат, Кнезер дав геометричну інтерпретацію спряжених точок. Його аналіз поглибив і збагатив цей розділ варіаційного числення, засновником якого був Якобі.

6.1.2. Варіаційні задачі з рухомими границями

Важливою заслугою Кнезера є дослідження задач зі змінною кінцевою точкою (задач з рухомими границями) і відкриття фокальних точок. Зазначимо, що вперше така задача була поставлена Я. Бернуллі. Одночасно із задачею про брахістохрону він сформулював задачу про криву, рухаючись вздовж якої матеріальна точка досягне даної вертикальної прямої за найкоротший час (рис. 1). Розв’язання цієї задачі Я. Бернуллі не навів.

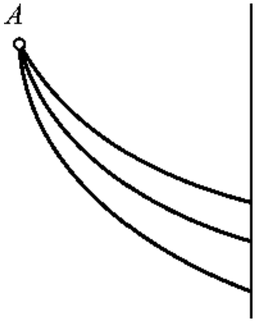


Рис. 1

Для задач з рухомими границями, тобто таких, де шукається екстремум інтеграла, взятого вздовж кривих на площині, лівий кінець яких нерухомий, а правий рухається вздовж даної кривої *R*, розглядається пучок екстремалей, що виходять із фіксованої точки *O* (рис. 2). Кнезер показав, що для розв'язання задачі треба вибрати ту екстремаль пучка G_O, при перетині якої з даною кривою *R* виконується умова трансверсальності.

У 1900 р. в підручнику [Kneser, 1925] Кнезер вперше ввів у варіаційне числення терміни: екстремалі, трансверсалі, поле екстремалей, сильний (stark) і слабкий (schwach) екстремуми. Ця термінологія відразу ж стала загальноприйнятою.

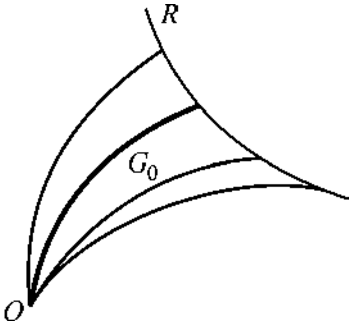


Рис. 2

Покажемо, як виглядають умови трансверсальності для функціонала

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

якщо вважати, що одна або обидві граничні точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) можуть зміщуватися. У такому разі крім кривих порівняння, які мають спільні граничні точки з досліджуваною кривою, можна розглядати також криві із рухомими граничними точками. Тому, якщо крива $y = y(x)$ реалізує екстремум в задачі з рухомими граничними точками, то екстремум тим більше досягається на кривих, які мають спільні граничні точки з кривою $y = y(x)$. Отже функція $y = y(x)$ має задовольняти основну необхідну умову екстремуму в задачі із нерухомими границями, тобто $y = y(x)$ є розв'язком рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0.$$

Отже, криві, на яких реалізується екстремум в задачі з рухомими границями, мають бути екстремалями.

Загальний розв'язок рівняння Ейлера містить дві довільні сталі C_1 і C_2, для визначення яких треба мати дві умови. У задачі з нерухомими граничними точками такими умовами є

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1.$$

У задачі з рухомими границями одна або обидві ці умови відсутні і для визначення довільних сталих загального розв'язку рівняння Ейлера використовують основну необхідну умову екстремуму − рівність нулю варіації δv.

Як вже зазначалося, в задачі з рухомими границями екстремум досягається лише на розв'язках $y = y(x, C_1, C_2)$ рівняння Ейлера, тому значення функціонала можна розглядати лише на функціях цього сімейства. При цьому функціонал $v[y(x, C_1, C_2)]$ є функцією параметрів C_1 і C_2 та меж інтегрування x_0 і x_1, а варіація функціонала співпадає з диференціалом цієї функції. Для спрощення припустимо, що одна з граничних точок, наприклад (x_0, y_0), закріплена, а інша (x_1, y_1) може зміщуватися і переходить у точку $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$, або, як позначають у варіаційному численні, $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Прирости δx_1 і δy_1 називають варіаціями граничних значень x_1 і y_1.

Допустимі криві $y = y(x)$ і $y = y(x) + \delta y$ вважатимемо близькими, якщо малими є модулі варіацій δy і $\delta y'$ та модулі варіацій граничних значень δx_1 і δy_1. Екстремалі, що проходять через точку (x_0, y_0), утворюють пучок екстремалей $y = y(x, C_1)$, і функціонал $v\left[y(x, C_1)\right]$ на кривих цього пучка є функцією C_1 і x_1. Якщо криві пучка у околі розглядуваної екстремалі не перетинаються, то $v\left[y(x, C_1)\right]$ можна розглядати як однозначну функцію x_1 і y_1, оскільки значення x_1 і y_1 задають екстремаль пучка і тим самим визначають значення функціонала.

Обчислимо варіацію функціонала $v\left[y(x, C_1)\right]$ на екстремалях пучка $y = y(x, C_1)$ при зміщенні граничної точки із положення (x_1, y_1) у положення $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Оскільки функціонал v на кривих пучка є функцією x_1 і y_1, то його варіація співпадає з диференціалом цієї функції. Виділимо із приросту Δv головну лінійну частину відносно δx_1 і δy_1. Приріст Δv подамо у вигляді

$$\Delta v = \int\limits_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y'\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right]\mathrm{d}x . \quad (2)$$

До першого доданку правої частини застосуємо теорему про середнє значення

$$\int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right)\mathrm{d}x = F\Big|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1 ,$$

де $0 < \theta < 1$.

Враховуючи неперервність функції F, маємо

$$F\Big|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')\Big|_{x=x_1} + \varepsilon_1 ,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$ при $\delta x_1 \to 0$ і $\delta y_1 \to 0$. Отже,

$$\int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right)\mathrm{d}x = F(x, y, y')\Big|_{x=x_1}\delta x_1 + \varepsilon_1\delta x_1 .$$

Використаємо розклад підінтегральної функції у другому доданку правої частини подання (2) за формулою Тейлора:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F_y\left(x, y, y'\right)\delta y + F_{y'}\left(x, y, y'\right)\delta y'\right]\mathrm{d}x + R_1 ,$$

де R_1 є нескінченно малою вищого порядку ніж δy або $\delta y'$. Інтегруючи другий доданок підінтегральної функції частинами, дістанемо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F_y\left(x, y, y'\right)\delta y + F_{y'}\left(x, y, y'\right)\delta y'\right]\mathrm{d}x = \left[F_{y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x.$$

Оскільки за припущенням гранична точка (x_0, y_0) нерухома, $\delta y\Big|_{x=x_0} = 0$. Тому

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F_y\delta y + F_{y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x = \left[F_{y'}\delta y\right]_{x=x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x .$$

Зауважимо, що $\delta y\big|_{x=x_1}$ не дорівнює δy_1 – прирosту y_1, оскільки δy_1 є приростом y_1 при переміщенні граничної точки в положення $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$, а $\delta y\big|_{x=x_1}$ є приростом ординати в точці x_1 при переході від екстремалі, яка проходить через точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1), до екстремалі, що проходить через точки (x_0, y_0) і $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ (рис. 3). З рисунку видно, що $BD=\delta y\big|_{x=x_1}$, $FC=\delta y_1$, $EC\approx y'(x_1)\delta x_1$, $BD=FC-EC$, або $\delta y\big|_{x=x_1}\approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$. Наближена рівність справедлива з точністю до нескінченно малих вищого порядку.

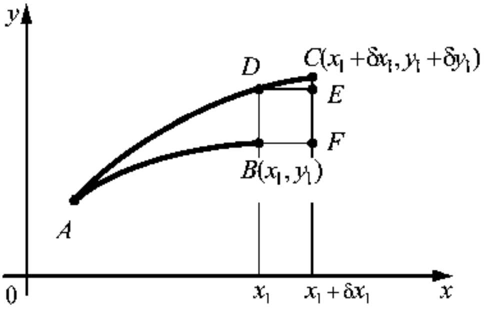


Рис. 3

Остаточно маємо

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\mathrm{d}x \approx F\big|_{x=x_1}\delta x_1;$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right)-F\left(x, y, y'\right)\right]\mathrm{d}x \approx$$

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1}\left(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1\right)+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x,$$

де наближені рівності також справедливі з точністю до членів порядку вище першого відносно δx_1 і δy_1.

З урахуванням цих рівностей із подання (2) дістанемо

$$\delta v = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\cdot\left(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1\right)+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=$$

$$=\left(F-y'F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x.$$

Якщо значення функціонала розглядаються лише на екстремалях, то $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\equiv 0$ і

$$\delta v = (F-y'F_{y'})\,\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\,\big|_{x=x_1}\delta y_1 .$$

Якщо позначити через $\overline{v}(x_1, y_1)$ функцію, в яку перетворився функціонал v на екстремалях $y=y(x, C_1)$, а через $\mathrm{d}x_1=\Delta x_1=\delta x_1$, $\mathrm{d}y_1=\Delta y_1=\delta y_1$ – прирости координат граничної точки, то

$$\mathrm{d}\overline{v}\left(x_1, y_1\right)=(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1}\mathrm{d}x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\mathrm{d}y_1 .$$

За припущення, що точка (x_0, y_0) також є рухомою, аналогічно можна показати, що варіація функціонала задається поданням

$$\delta v = (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0} \delta x_0 - F_{y'}\Big|_{x=x_0} \delta y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \delta y \mathrm{d}x,$$

або на екстремалях

$$\delta v = (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0} \delta x_0 - F_{y'}\Big|_{x=x_0} \delta y_0 .$$

Основна необхідна умова екстремуму $\delta v = 0$ набирає вигляду

$$(F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 - (F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0} \delta x_0 - F_{y'}\Big|_{x=x_0} \delta y_0 = 0 . \qquad (3)$$

Якщо всі варіації δx_0, δy_0, δx_1 і δy_1 незалежні, то звідси випливає, що

$$(F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0} = 0 , \quad F_{y'}\Big|_{x=x_0} = 0 ,$$

$$(F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} = 0 , \quad F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0 .$$

Однак, частіше доводиться розглядати випадок, коли не всі варіації δx_0, δy_0, δx_1 і δy_1 є незалежними. Нехай, наприклад, ліва гранична точка (x_0, y_0) може зміщуватися по деякій кривій $y_0 = \varphi(x_0)$, а права гранична точка (x_1, y_1) по кривій $y_1 = \psi(x_1)$. Тоді $\delta y_0 \approx \varphi'(x_0)\delta x_0$, $\delta y_1 \approx \psi'(x_1)\delta x_1$, і умова (3) набирає вигляду

$$\delta v = (F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} \delta x_1 - (F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0} \delta x_0 = 0$$

або, враховуючи що δx_0 і δx_1 – незалежні прирости, маємо

$$(F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_1} = 0 , \ (F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0} = 0 ,$$

тобто

$$\left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 , \ \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0 .$$

Ці умови, які задають залежність між кутовими коефіцієнтами φ', ψ' та y' у граничних точках, і є умовами трансверсальності. Якщо крива $y = y(x)$ задовольняє ці умови, то вона трансверсальна кривим $\varphi(x)$ та $\psi(x)$. Умови трансверсальності разом з умовами $y_0 = \varphi(x_0)$ та $y_1 = \psi(x_1)$ дозволяють, взагалі кажучи, визначити одну або кілька екстремалей пучка, на яких може досягатися екстремум.

Зауважимо, що до Кнезера за всю двохсотлітню історію варіаційного числення було розв'язано дуже мало задач з рухомими границями.

Й. Бернуллі, розглядаючи падіння кульки з точки *A*, шукав геометричне місце точок, що досягаються кулькою за однаковий час. Він показав, що шукана крива «зустрічає під прямим кутом всі циклоїди, що мають спільний початок в точці *A*» [Бернулли, 1937, с. 23].

Йоганн Бернуллі,
нім. Johann Bernoulli
(1667-1748)

Жозе́ф-Луї́ Лагра́нж,
фр. Joseph-Louis
Lagrange
(1736-1813)

Лагранж в листі до Ейлера від 20 листопада 1755 р. розв'язав задачу: кулька рухається з точки *A* в яку-небудь точку на кривій Г. Як шукану криву він отримав циклоїду, що перетинає криву Г під прямим кутом.

У цих задачах на границях виконуються умови ортогональності. Умова трансверсальності Кнезера включає ортогональність як окремий випадок. Пояснення просте: для інтегралів виду $v[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ умова трансверсальності рівносильна умові ортогональності.

Дійсно, для таких фунціоналів

$$F_{y'} = f(x,y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{Fy'}{1+y'^2},$$

і умова трансверсальності набирає вигляду

$$F + (\psi' - y')F_{y'} = \frac{F(1+y'\psi')}{1+y'^2} = 0.$$

Вважаючи, що в граничній точці $F(x,y) \neq 0$, дістанемо $1+y'\psi'=0$ або $y' = -\frac{1}{\psi'}$. Аналогічно на іншому кінці $y' = -\frac{1}{\varphi'}$. Тобто для розглядуваного функціонала умова трансверсальності є умовою ортогональності.

Як приклад розглянемо задачу про центральний розтяг стержня під дією рівномірно розподіленого повздовжнього навантаження *p* і кінематичного навантаження у вигляді горизонтального переміщення на лівому кінці стержня −Δ (рис. 4), яка зводиться, як буде показано далі, до варіаційної задачі з рухомими границями для функціонала Лагранжа

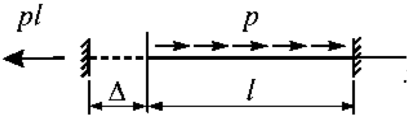


Рис. 4

$$J=\int\limits_{0}^{l}(\frac{1}{2}y'^2-py)\mathrm{d}x\,, \qquad (4)$$

де l є невідомою границею.

Тобто треба дослідити екстремум функціонала (4) при таких граничних умовах

$$y(0)=\Delta,\quad y(l)=0\,,$$

а також додатковій умові, яка для цієї задачі витікає із варіаційного рівняння для задач з рухомими границями (3)

$$y'(l)=0\,.$$

Рівняння Ейлера

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})=0,$$

має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-p.$$

Послідовно отримаємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-px+C_1,$$

$$y=-\frac{px^2}{2}+C_1x+C_2,$$

$$C_1=pl,\quad C_2=-\Delta,\quad l=\sqrt{2\Delta/p}.$$

Ще одним прикладом є дослідження на екстремум функціоналу $\int\limits_{0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x$, де $y(0)=0$, а $y_1=x_1-5$ (рис. 5). Інтегральними кривими рівняння Ейлера є кола $\left(x-C_1\right)^2+y^2=C_2^2$. Із першої граничної умови $C_1=C_2$. Оскільки умова трансверсальності для даного функціоналу зводиться до умови ортогональності, то пряма $y_1=x_1-5$ має бути діаметром кола, і центр шуканого кола знаходиться у точці (0,5) перетину прямої $y_1=x_1-5$ з віссю абсцис. Тому $\left(x-C_1\right)^2+y^2+C_2^2$, або $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$. Отже, екстремум досягається лише на дугах кола $y=\sqrt{10x-x^2}$ і $y=-\sqrt{10x-x^2}$. Якщо гранична точка (x_1,y_1) може рухатися лише по вертикаляній прямій (рис. 6) і тому $\delta x_1=0$, то умова (3) записується як $F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$. Нехай, наприклад, в задачі про брахістохрону ліва гранична точка нерухома, а права може рухатися по

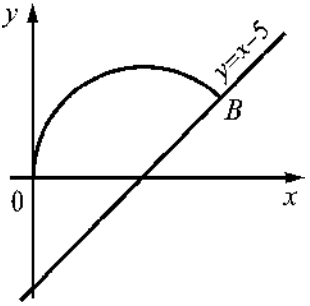


Рис. 5

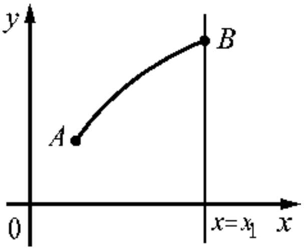


Рис. 6

вертикальній прямій. Екстремалями функціоналу $v=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$ є циклоіди, рівняння яких з урахуванням умови $y(0)=0$ набирають вигляду

$$x=C_1\left(t-\sin t\right),$$
$$y=C_1\left(1-\cos t\right).$$

Для визначення C_1 використаємо умову $F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$, або в цьому разі

$$\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_1}=0,$$

звідки $y'(x_1)=0$, тобто шукана циклоіда має перетинати пряму $x=x_1$ під прямим кутом і тому точка з координатами $x=x_1$, $y=y_1$ є вершиною циклоіди (рис. 7). Оскільки вершині відповідає значення $t=\pi$, то $x_1=C_1\pi$, $C_1=\frac{x_1}{\pi}$. Отже, екстремум реалізується лише на циклоїді

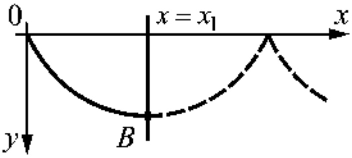


Рис. 7

$$x=\frac{x_1}{\pi}\left(t-\sin t\right),\quad y=\frac{x_1}{\pi}\left(1-\cos t\right).$$

Якщо гранична точка (x_1,y_1) в задачі про екстремум функціоналу $v=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ може рухатися по горизонтальній прямій $y=y_1$, то $\delta y_1=0$ і умова (3), або умова трансверсальності має вигляд

$$\left[F-y'F_{y'}\right]_{x=x_1}=0.$$

Відзначимо, щ згодом за допомогою методу Кнезера було вирішено велику кількість варіаційних задач: про екстремум інтеграла на площині з двома рухомими границями, про екстремум інтеграла в просторі, взятого вздовж кривих, кінці яких ковзають по заданих поверхнях і ін.

Розглянемо функціонал $v[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$, що містить другу похідну. При дослідженні на екстремум таких функціоналів в граничних точках задаються значення функції $y(x)$ і її першої похідної:

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_0',\ \ y(x_1)=y_1,\ \ y'(x_1)=y_1'.$$

У разі, коли значення хоча б деяких з цих величин не фіксовані, розглядувана варіаційна задача називається задачею з рухомими границями.

Якщо в задачі з рухомими границями на кривій *C* реалізується екстремум, то на цій кривій реалізується екстремум також і для більш вузького класу близьких кривих, які мають спільні граничні точки і спільні напрямки дотичних в граничних точках з кривою *C,* і тому крива *C* має бути інтегральною кривою рівняння Ейлера-Пуассона

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 0 .$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння четвертого порядку $y = y(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$ містить чотири довільні сталі, для визначення яких треба мати чотири рівняння. Ці рівняння можна отримати із основної необхідної умови екстремуму $\delta v = 0$.

Для скорочення викладень припустимо, що граничні значення y і y' у точці x_0 задані: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, а друга гранична точка рухома. Тоді з цих граничних умов можна, взагалі кажучи, визначити дві довільні сталі в загальному рівнянні Ейлера-Пуассона, а дві інші довільні сталі визначаються із умови $\delta v = 0$. При обчисленні варіації можна вважати, що функціонал v визначений лише на розв'язках рівняння Ейлера-Пуассона, оскільки тільки на цих розв'язках може досягатися екстремум. Головна лінійна частина приросту функціонала

$$\Delta v = \int\limits_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y''\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', y''\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y''\right)\mathrm{d}x +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y''\right) - F\left(x, y, y', y''\right)\right]\mathrm{d}x .$$

Застосовуючи теорему про середнє і враховуючи неперервність функції F і функцій $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, дістанемо

$$\Delta v = F\left(x, y, y', y''\right)\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y''\right)\mathrm{d}x + R ,$$

де R є нескінченно мала величина порядку вищого ніж найбільший з модулів $|\delta x_1|$, $|\delta y_1|$, $|\delta y|$, $|\delta y'|$, $|\delta y''|$. Отже,

$$\delta v = F\big|_{x=x_1} \delta x_1 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y''\right)\mathrm{d}x .$$

Інтегруючи другий доданок підінтегральної функції частинами один раз, а третій – два рази і беручи до уваги, що

$$\delta y\big|_{x=x_0}=0\,,\ \delta y'\big|_{x=x_0}=0 \text{ і } F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\equiv 0\,,$$

дістанемо

$$\delta v=[F\delta x_1+F_{y'}\delta y+F_{y''}\delta y'-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\delta y]_{x=x_1}\,.$$

Використовуючи отриману раніше рівність $\delta y_1=y'(x_1)\delta x_1+\delta y\big|_{x=x_1}$ і аналогічну для $\delta y_1'$: $\delta y_1'=y''(x_1)\delta x_1+\delta y'\big|_{x=x_1}$, матимемо

$$\delta v=[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})]_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})]_{x=x_1}\delta y_1+F_{y''}\big|_{x=x_1}\delta y_1'\,.$$

Отже, основна необхідна умова екстремуму $\delta v=0$ набирає вигляду

$$[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})]_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})]_{x=x_1}\delta y_1+F_{y''}\big|_{x=x_1}\delta y_1'=0. \quad (5)$$

Якщо δx_1, δy_1 і $\delta y_1'$ незалежні, то коефіцієнти при δx_1, δy_1 і $\delta y_1'$ у (5) для $x=x_1$ дорівнюють нулю. Якщо між цими варіаціями є деяка залежність, наприклад $y_1=\varphi(x_1)$, $y_1'=\psi(x_1)$, то знаходимо $\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1$ і $\delta y_1'=\psi'(x_1)\delta x_1$ і, підставивши у (5), дістанемо

$$[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})+(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})\varphi'+F_{y''}\psi']_{x=x_1}\delta x_1=0\,,$$

звідки

$$[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})+(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})\varphi'+F_{y''}\psi']_{x=x_1}=0\,.$$

Ця умова разом з рівняннями $y_1=\varphi(x_1)$ $y_1'=\psi(x_1)$, взагалі кажучи, визначає x_1, y_1, і y_1'.

Якщо x_1, y_1, і y_1' зв'язані одним рівнянням $\varphi(x_1, y_1, y_1')=0$, то дві варіації із δx_1, δy_1 і $\delta y_1'$ залишаються довільними, а третя визначається з рівняння

$$\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1+\varphi'_{y_1'}\delta y_1'=0\,.$$

Наприклад,

$$\delta y_1'=-\frac{\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1}{\varphi'_{y_1'}}\,,\ \text{якщо } \varphi'_{y_1'}\neq 0\,.$$

Підставляючи $\delta y_1'$ в (5) і прирівнюючи нулю коефіцієнти при незалежних варіаціях δx_1 і δy_1, матимемо два рівняння в точці $x=x_1$, які разом з рівнянням $\varphi(x_1, y_1, y_1')=0$, взагалі кажучи, дозволяють визначити x_1, y_1, і y_1'. Якщо точка $A(x_0, y_0)$ є рухомою, для неї також можна отримати аналогічні умови.

Розглянемо задачу про згин невагомої балки нескінченної довжини на жорсткій основі під дією кінематичного навантаження на лівому кінці у вигляді вертикального переміщення $y(0)=-1$ і кута повороту $y'(0)=1$ (рис. 8), яка

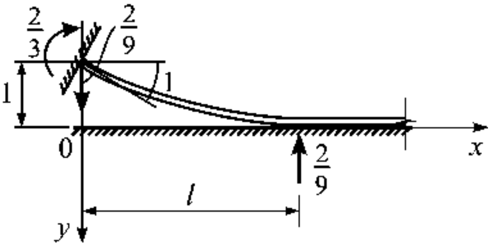


Рис. 8

зводиться, як буде показано далі, до варіаційної задачі з рухомими границями для функціонала Лагранжа, пропорційного $J=\int_0^l y''^2 \mathrm{d}x$, де l являє собою невідому змінну границю – величину відриву лівої частини балки від жорсткої основи. Тобто треба дослідити на екстремум функціонал J при таких граничних умовах:

$$y(0)=-1,\quad y(l)=0,\quad y'(0)=1,\quad y'(l)=0,$$

а також додатковій граничній умові, яка витікає для цієї задачі із варіаційного рівняння (5) для задач з рухомими границями:

$$y''(l)=0. \tag{6}$$

Послідовно отримаємо:

$$y(x)=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4,\qquad C_4=-1,$$

$$y'(x)=3C_1x^2+2C_2x+C_3,\qquad C_3=1,$$

$$C_1=\frac{l-2}{l^3},\quad C_2=\frac{-2l+3}{l^2},$$

$$y''(x)=6C_1x+2C_2.$$

Умова (6) дає:

$$\frac{3(l-2)}{l^2}+\frac{-2l+3}{l^2}=0;\quad l=3.$$

Відповідно:

$$y(x)=\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{3}x^2+x-1,\ \ y'(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1,\ \ y''(x)=\frac{2}{9}x-\frac{2}{3},\ \ y'''(x)=\frac{2}{9}.$$

Величини $y''(0)=-\frac{2}{3}$, $y'''(0)=\frac{2}{9}$, $y''(l)=0$ і $y'''(l)=\frac{2}{9}$ пропорційні згинаючим моментам і поперечним силам на кінцях з відповідними знаками, схема їх дії показана на рис. 8.

Для функціонала $\mathrm{v}[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ варіаційне рівняння $\delta\mathrm{v}=0$ можна подати у вигляді

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\delta y\big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})\delta y\mathrm{d}x=0,$$

а для функціонала $\mathrm{v}[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$ рівняння $\delta\mathrm{v}=0$ має вигляд

$$(F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})\big|_{x=x_1}\,\delta x_1+(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})\delta y\big|_{x_0}^{x_1}+F_{y''}\delta y'\big|_{x_0}^{x_1}+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''})\delta y\mathrm{d}x=0.$$

Зазначимо, що якщо гранична точка $x=x_1$, не може зміщуватись по горизонталі, то ці вирази співпадають з традиційними

$$F_{y'}\delta y\big|_{x_0}^{x_1}+\int\limits_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'})\delta y\mathrm{d}x=0,$$

$$(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})\delta y\big|_{x_0}^{x_1}+F_{y''}\delta y'\big|_{x_0}^{x_1}+\int\limits_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''})\delta y\mathrm{d}x=0,$$

реалізація яких дозволяє для функціоналів Лаґранжа і Кастільяно отримати як природні граничні умови ті граничні умови, які не були визначені [Баженов, 2014].

Для функціоналів, які залежать від першої похідної (розтяг-стиснення)

Пряма задача – функціонал Лаґранжа	*Двоїста задача – функціонал Кастільяно*
$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b EFu'^2\mathrm{d}x-\int\limits_a^b q_x u\mathrm{d}x-\bar{N}u\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}.$	$\Pi^{\text{К}}(N)=-\int\limits_a^b\frac{N^2}{2EF}\mathrm{d}x+\bar{u}N\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}.$
Додаткові умови	Додаткові умови
$N=EF\varepsilon;\ \varepsilon=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x};\ u\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}=\bar{u}\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}.$	$N=EF\varepsilon;\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}+q_x=0;\ N\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}=\bar{N}\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}.$
Варіаційне рівняння	Варіаційне рівняння
$\delta\Pi^{\text{Л}}(u)=0,$	$\delta\Pi^{\text{К}}(N)=0,$
$\int\limits_a^b\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}+q_x\right)\delta u\mathrm{d}x-(N-\bar{N})\delta u\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}=0.$	$\int\limits_a^b\left(\varepsilon-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\delta N\mathrm{d}x+(u-\bar{u})\delta N\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}=0.$

Для функціоналів, які залежать від другої похідної

Пряма задача – функціонал Лаґранжа	*Двоїста задача – функціонал Кастільяно*
$\Pi^{\text{Л}}(w)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b EIw''^2\mathrm{d}x-\int\limits_a^b qw\mathrm{d}x-\bar{M}'w\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}.$	$\Pi^{\text{К}}(M)=-\frac{1}{2}\int\limits_a^b\frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x+\bar{w}M'\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'M\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}.$
Додаткові умови	Додаткові умови
$\kappa=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2};\ w\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}=\bar{w}\bigr\rvert_{a_2}^{b_2};\ w'\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}=\bar{w}'\bigr\rvert_{a_2}^{b_2}.$	$\frac{\partial^2M}{\partial x^2}+q=0;\ M\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}=\bar{M}\bigr\rvert_{a_1}^{b_1};\ M'\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}=\bar{M}'\bigr\rvert_{a_1}^{b_1}.$

Варіаційне рівняння

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(w)=0,$$

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(w)=-\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q\right)\delta w\mathrm{d}x+$$

$$+(M'-\bar{M}')\delta w\Big|_{a_1}^{b_1}-(M-\bar{M})\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1}=0.$$

Варіаційне рівняння

$$\delta\Pi^{\text{K}}(M)=0,$$

$$\delta\Pi^{\text{K}}(M)=-\int_a^b\left(\kappa+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\delta M\mathrm{d}x+$$

$$+(\bar{w}-w)\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2}-(\bar{w}'-w')\delta M\Big|_{a_2}^{b_2}=0.$$

Зазначимо, що за прийнятою в класичному варіаційному численні класифікацією задач з рухомими границями, тільки кінематично і статично визначувані задачі відносяться до задач з нерухомими границями, оскільки вони мають фіксовані значення функцій в граничних точках [Эльсгольц,1958, Эльсгольц, 1965], [Баженов, 2014].

Далі розглянемо клас варіаційних задач, для яких можливе горизонтальне переміщення точки $x=x_1$, що дає додаткову умову, яка для функціонала $\nu[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ має вигляд:

$$(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_1}\delta x_1=0.$$

Для прямої задачі –
функціонал Лаґранжа

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{1}{2}\int_0^l EFu'^2\mathrm{d}x-\int_0^l q_x u\mathrm{d}x.$$

$$F=\frac{1}{2}EFu'-q_x u,$$

$$F_{u'}=EFu',$$

$$F-u'F_{u'}=-EFu'-q_x u=0.$$

Для двоїстої задачі –
функціонал Кастільяно

$$\Pi^{\text{K}}(N)=-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{N^2}{EF}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x.$$

$$F=-\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}u,$$

$$F_{N'}=-u,$$

$$F-u'F_{u'}=-\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF}.$$

Якщо $u\big|_{x=x_1}=0$, то маємо умову на правому кінці

$$u'\big|_{x=x_1}=0\,.$$

$$N\big|_{x=x_1}=0.$$

Аналогічна умова для функціонала $\nu[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$ має вигляд:

$$(F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})\Big|_{x=x_1}\delta x_1=0.$$

Для прямої задачі –
функціонал Лаґранжа

$$\Pi^{\text{Л}}(w)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b EIw''^2\mathrm{d}x-\int\limits_a^b qw\mathrm{d}x-$$

$$-\bar{M}'w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$F=\frac{1}{2}EIw''^2-qw,$$
$$F_{w'}=0,\;\; F_{w''}=EIw'',$$
$$F-w''F_{w''}=-\frac{1}{2}EIw''^2-qw.$$

При $w\big|_{x=x_1}=0$ маємо умову: $w''\big|_{x=x_1}=0$.

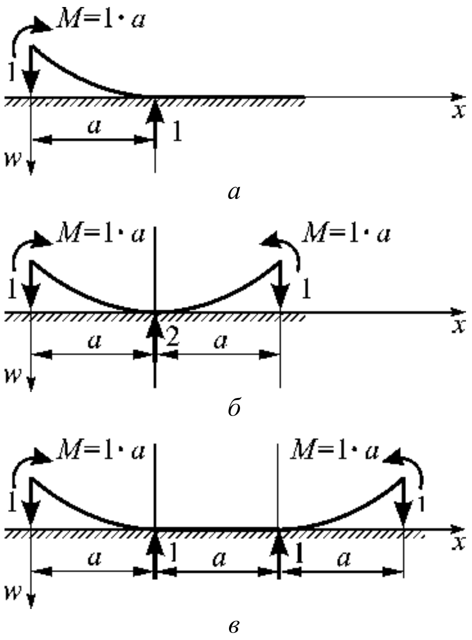
Для двоїстої задачі –
функціонал Кастільяно

$$\Pi^{\text{К}}(M)=-\frac{1}{2}\int\limits_a^b\frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x-\int\limits_a^b\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}w\mathrm{d}x+$$

$$+\bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'M\Big|_{a_2}^{b_2}.$$

$$F=-\frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}-\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}w,$$
$$F_{M'}=0,\;\; F_{M''}=-w,$$
$$F-M''F_{M''}=-\frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}.$$
$$M\big|_{x=x_1}=0.$$

Розглянемо таку задачу. Нехай невагома балка лежить на жорсткій основі (рис. 9,*а*). Після того, як переріз $x=0$ зазнає дії зосередженої одиничної сили та згинального моменту $M_0=1\cdot a$, де a – це деякий параметр, який має розмірність довжини, ліва частина буде знаходитись у стані поперечного згину, а права, яка контактує з жорсткою основою, залишиться недеформованою.



а

б

в

Рис. 9

Задачу про визначення напружено-деформованого стану частини такої балки можна розглядати як варіаційну з рухомою границею для функціонала Лаґранжа $J=\int\limits_0^l\frac{1}{2}EI(w'')^2\mathrm{d}x$, де l – це невідома довжина лівої ділянки, яка не контактує із основою. Рівняння Ейлера-Пуассона для функціонала, який залежить від другої похідної w'', має вигляд

$$F_w-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{w'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{w''}=0,$$

при цьому в нашому випадку $F=\frac{1}{2}EI(w'')^2$ і відповідно

$$F_w=0, F_{w'}=0, F_{w''}=EIw'',\;\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{w''}=w^{IV}.$$

Таким чином, екстремум функціоналу реалізується на розв’язку рівняння

$$w^{IV}=0\,, \tag{7}$$

який має задовольняти умову

$$\left(F-w'F_{w'}-y''F_{w''}+w'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{w''}\right)\delta l\Big|_{x=l}+\left(F_{w'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{w''}\right)\delta w\Big|_{x=l}+F_{w''}\delta w'\Big|_{x=l}=0\,, \tag{8}$$

звідки випливає

$$w''(l)=0\,.$$

Оскільки це рівнозначно тому, що в перерізі $x=l$ згинальний момент дорівнює нулю, то з умови рівноваги відсіченої деформованої частини

$$M_l=1\cdot a-1\cdot l=0$$

знаходимо

$$l=a\,,$$

тобто параметр a - це довжина зігнутої ділянки.

Для визначення деформівної осі балки при $x\leq a$ скористаємось тим, що загальний розв’язок рівняння (7) має вигляд

$$w(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3\,, \tag{9}$$

а граничні умови для знаходження довільних констант C_0, C_1, C_2, C_3 відомі:

$$w(a)=0,\ w'(a)=0,\ -EIw''(0)=M_0=1\cdot a\,,\ -EIw'''(0)=Q_0=-1\,. \tag{10}$$

Використовуючи умови (10) в зворотній послідовності, знаходимо

$$C_3=\frac{1}{6EI}\,,\ C_2=-\frac{a}{2EI}\,,\ C_1=\frac{a^2}{2EI}\,,\ C_0=-\frac{a^3}{6EI}\,.$$

Отже,

$$w(x)=\frac{1}{6EI}\left(x^3-3ax^2+3ax-a^3\right)=\frac{(x-a)^3}{6EI}\,. \tag{11}$$

Найбільший прогин має місце в перерізі $x=0$, де $w(0)=\Delta=-\dfrac{a^3}{6EI}$. Крім того, як завжди в таких задачах, в точці, де починається контакт пружної балки та жорсткої основи, виникає зосереджена сила.

Розглянемо тепер симетричний згин балки довжиною $2a$ під дією кінцевих навантажень (рис. 9,*б*). Цей приклад можна розглядати як задачу з односторонніми варіаціями.

Виходячи з результатів розв’язання попередньої задачі (рис. 9,*а*), припустимо, що деформівна вісь балки розташована в області $\varphi(x,w)=w+\dfrac{a^3}{6EI}\geq 0$, при цьому

$$w(0)=w(2a)=-\frac{a^3}{6EI}\,. \tag{12}$$

Крива $w=w(x)$, яка мінімізує функціонал J, має задовольняти три умови. По-перше, всередині області ця крива повинна бути екстремаллю, тобто задовольняти рівняння (7). По-друге, оскільки в усіх точках границі маємо $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}=1\geq 0$, то і величина w^{IV} в цих точках повинна бути невід’ємною. Нарешті, третя умова полягає в тому, що в точках переходу з області на обмеження, яке задане рівнянням $w = g(x)$, має виконуватися рівність

$$F - w'F_{w'} - w''F_{w''} + w'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{w''} + \left(F_{w'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{w''}\right)g'(x) + F_{w''}g''(x) - F\left(x, w(x), g'(x), g''(x)\right) = 0.$$

Оскільки наше обмеження задане рівнянням $w = g(x) = 0$, то будь-яка похідна в точках на обмеженні дорівнює нулю, і отже, друга умова виконується автоматично. З цієї ж причини третя умова набирає вигляду

$$F - w'F_{w'} - w''F_{w''} + w'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{w''} = 0. \qquad (13)$$

Знайдемо рівняння лівої ділянки деформівної осі балки, що задовольняє рівняння (7), (12) і (13), а також силові граничні умови

$$-w''(0) = a/(EI), \quad -w'''(0) = -1/(EI). \qquad (14)$$

Знову скористаємось виразом для екстремалі у загальному вигляді (9). Гранична умова (12) дозволяє визначити константу C_0:

$$C_0 = w(0) = -\frac{a^3}{6EI}.$$

За допомогою силових граничних умов знаходимо

$$w''' = 6C_3 = \frac{1}{EI} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{6EI}, \quad w''(0) = 2C_2 = -\frac{a}{EI} \Rightarrow C_2 = -\frac{a}{2EI}. \qquad (15)$$

Для того, щоб скористатись третьою умовою екстремальності функціонала і визначити C_1, запишемо:

$$F = \frac{1}{2}EI(w'')^2, \quad F_{w'} = 0, \quad F_{w''} = EIw'', \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{w''}) = EIw''',$$

тому умова (13) перетворюється на

$$2w'w''' - (w'')^2 = 0. \qquad (16)$$

З іншого боку, виходячи із виразу для загального розв’язку (9), маємо:

$$w' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2, \quad w'' = 2C_2 + 6C_3x, \quad w''' = 6C_3,$$

що після підстановки у вираз (13) дає

$$3C_1C_3 - C_2{}^2 = 0,$$

звідки, використовуючи отримані вище значення C_2 і C_3, знаходимо:

$$C_1 = \frac{C_2{}^2}{3C_3} = \frac{a^2}{2EI}.$$

Отже, ліва частина екстремалі описується рівнянням

$$w(x) = -\frac{a^3}{6EI} + \frac{a^2}{2EI}x - \frac{a}{2EI}x^2 + \frac{1}{6EI}x^3 = \frac{(x-a)^3}{6EI}, \quad 0 \le x \le a,$$

яке повністю збігається з виразом (11), що описує деформацію зігнутої частини балки в першому прикладі. Контакт цієї частини балки і одностороннього обмеження відбувається в точці $x = a$.

Якщо повторити всі викладення для правої симетричної ділянки балки, то отримаємо вираз

$$w(x) = \frac{(a-x)^3}{6EI}, \quad a \le x \le 2a .$$

Таким чином, і ця частина балки контактує з обмеженням тільки в точці $x=a$ (рис. 9,*б*), і хоча довжина ділянки, вздовж якої відбувається контакт балки і обмеження, прямує до нуля, ліва і права частини деформуються незалежно одна від одної.

Якщо тепер збільшити довжину балки до $3a$, але зберегти величину обмежень і навантажень, то при цьому до величини a збільшиться тільки довжина недеформованої ділянки контакту балки і жорсткого обмеження (рис. 9,*в*). Деформовані ділянки матимуть таку саму форму і розміри , як і в попередньому прикладі:

$$w(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-a)^3}{6EI}, & 0\le x\le a, \\ 0, & a<x<2a, \\ \dfrac{(2a-x)^3}{6EI}, & 2a\le x\le 3a. \end{cases}$$

Слід зазначити, що наявність зосереджених реакцій пояснюється застосуванням елементарної теорії згину балок [Феодосьев, 1973], [Рівкін, Баженов, 1966].

6.1.3. Інтеграл Гільберта. Теорема незалежності

Подальшим просуванням теорія поля зобов'язана Д. Гільберту. У зимовому семестрі 1899/1900 р. він прочитав в Геттінгені курс з варіаційного числення, а у 1900 р. на Міжнародному математичному конгресі в Парижі у своїй знаменитій доповіді «Математичні проблеми» [Проблемы Гильберта, 1969] як одну із основних проблем, що стоять перед математикою на порозі нового століття, сформулював задачу подальшого розвитку методів варіаційного числення (23-тя проблема).

Гільберт високо оцінив дослідження Кнезера. Говорячи про те, що варіаційне числення, на його думку, ще «не користується в широких колах тією повагою, на яку воно заслуговує», він писав: «Тим більш значущим є той факт, що Кнезер в роботі, яку нещодавно побачив світ, представив варіаційне числення з нової точки зору і на сучасному рівні строгості» [Проблемы Гильберта,1969, с. 57].

Розв’язуючи найпростішу варіаційну задачу про екстремум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 ,$$

Гільберт запропонував розглянути інтеграл

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[f + (y_x - p) f_p \right] \mathrm{d}x, \quad f = f(x, y, p)$$

і з'ясувати, як вибрати функцію $p(x,y)$, щоб значення інтеграла J^* не залежало від обраного шляху, тобто від вибору функції $y(x)$; такі інтеграли називають симетричними.

Для вирішення питання Гільберт запропонував розглянути однопараметричне сімейство екстремалей диференціального рівняння Ейлера

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0, \qquad (17)$$

яке утворює поле. Оскільки при цьому через кожну точку проходить одна і тільки одна екстремаль сімейства, то однозначно визначається величина похідної до екстремалі в кожній точці поля. Вона є функцією $p(x,y)$ від координат точки x і y; $p(x,y)$ називається функцією нахилу поля. Гільберт показав, що при такому виборі функції $p(x,y)$ інтеграл J^* не залежить від шляху інтегрування. Це є його «теорема незалежності». Теорема Гільберта про незалежність поряд з теоремою Нетер вважається однією з найголовніших теорем варіаційного числення.

На основі теореми незалежності Гільберт встановив зв'язок між рівнянням Ейлера і рівнянням Гамільтона-Якобі. Він представив J^* у вигляді

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[f_p y' + (f - p f_p) \right] \mathrm{d}x.$$

Для того щоб інтеграл J^* не залежав від шляху інтегрування, має виконуватися умова

$$\frac{\partial f_p}{\partial x} + \frac{\partial (p f_p - f)}{\partial y} = 0. \qquad (18)$$

Отже, функція $p(x,y)$ має задовольняти рівняння в частинних похідних (18). Таким чином, інтегральні криві рівняння (17) водночас є характеристиками рівняння (18).

Гільберт вказав, що цей зв'язок має для варіаційного числення засадниче значення. Рівняння (18) вперше у 1868 р. отримав професор університету Болоньї Е. Бельтрамі, тому іноді говорять про теорію Бельтрамі-Гільберта.

Гільберт показав, як, використовуючи теорему незалежності, можна легко дістати умову Веєрштрасса, що стосується функції E. За допомогою його теореми зазвичай доводять достатність знайдених Веєрштрассом умов існування сильного екстремуму. Доведення, дане

Едже́ніо Бельтра́мі,
італ. Eugenio Beltrami
(1835- 1900)

Веєрштрассом в його лекціях, носило штучний характер і в подальшому не викладалося в підручниках.

Отже, Гільберт істотно розвинув теорію поля екстремалей. Він розглянув функцію нахилу поля $p(x, y)$, ввів інваріантні інтеграли, які на екстремалях збігаються з інтегралами, досліджуваними на екстремум. Завдяки цьому варіаційна теорія значно спрощується. Гільберт вказав на це ще на початку своєї доповіді на підтвердження своєї думки про те, що «строгі методи є в той же час найпростішими і найдоступнішими». «Особливо разючий приклад, - пише Гільберт [Проблемы Гильберта, 1969, с. 17], - який ілюструє мою думку, являє варіаційне числення. Дослідження першої і другої варіацій визначеного інтеграла призводило до вкрай складних обчислень, а відповідні дослідження старожитніх математиків були позбавлені необхідної строгості. Веєрштрасс вказав нам шлях до нового і цілком надійно обґрунтованого варіаційного числення. На прикладі простого і подвійного інтегралів я коротко окреслю в кінці моєї доповіді, як дотримування цього шляху приводить в той же час до вражаючого спрощення варіаційного числення».

Гільберт підкреслює зв'язок своїх робіт з дослідженнями Веєрштрасса. Дуже ймовірно, що він прийшов до «теореми незалежності», сама постановка якої на перший погляд видається абсолютно несподіваною, в зв'язку з рівністю, яку знайшов в своїх дослідженнях Веєрштрасс при доведенні достатності для сильного екстремуму. Ця рівність

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = -E$$

показує, що вираз $-E\mathrm{d}s$ є повним диференціалом, що наводить на думку про інтеграл, який залежить тільки від початкової і кінцевої точок інтегрування, але не від шляху інтегрування.

Гільберт зауважив, що його теорему незалежності неважко поширити на просторову задачу і на випадок подвійного інтеграла. В результаті цього можна «без громіздких обчислень», за словами Гільберта, побудувати систему необхідних і достатніх умов екстремуму для загальних варіаційних задач. У доповіді «Математичні проблеми» Гільберт як приклад розглянув задачу про екстремум подвійного інтеграла $\iint F(x, y, z, z_x, z_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

У 1903 р. А. Майер ([Mayer, 1903]) поширив теорію Гільберта на задачу про екстремум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\mathrm{d}x.$$

При цьому він ввів до розгляду сімейство екстремалей у просторі, яке утворює поле. У 1906 р. Гільберт показав, як узагальнити теорему незалежності для задачі про екстремум інтеграла [Hilbert, 1906].

Поле екстремалей в просторі не є простим розширенням відповідного поняття на площині. Для побудови варіаційної теорії в просторі треба розглядати сімейства екстремалей, що задовольняють дві умови: 1) через кожну точку простору проходить одна і тільки одна екстремаль (ця умова була у разі площини); 2) має існувати поверхня, що перетинає всі екстремалі сімейства, на якій інтеграл Гільберта не залежить від шляху інтегрування. Другу умову можна висловити і в іншій формі, використовуючи геометричну мову теорії Кнезера: повинна існувати поверхня, при перетині якої з кожною екстремаллю сімейства виконується умова трансверсальності.

Отже, наприкінці XIX – початку XX ст. була створена теорія поля екстремалей, яка являла собою зручний апарат для перенесення результатів Ейлера, Лежандра, Гамільтона, Якобі, Веєрштрасса на загальні варіаційні задачі. Особливо важливий клас задач складають варіаційні задачі з обмеженнями - ізопериметрична, задача Лагранжа, задача Майера. Історія вирішення цих задач розглядатиметься в нарисі 7.

6.2. Теорема Нетер

> *Такою була Е. Нетер, найбільша серед жінок математиків, великий учений, дивовижний учитель, незабутня людина.*
>
> П.С. Александров

В основі застосування і фізичного сенсу варіаційних принципів механіки лежать дві теореми: теорема незалежності Гільберта і теорема Нетер. Перша дає математичне обґрунтування варіаційних принципів, друга - розкриває їх фізичний зміст, пов'язуючи їх з центральною фізичної проблемою - проблемою інваріантів різних груп перетворень.

Еммі Амалі Нетер,
нім. Amalie Emmy Noether
(1882—1935)

Фундаментальне значення груп перетворень і їхніх інваріантів у варіаційному численні і фізиці показала у 1918 р. видатний німецький математик Еммі Амалі Нетер (1882-1935).

«Саме вона навчила нас мислити в простих і загальних алгебраїчних поняттях - гомоморфне відображення, група або кільця з операторами, ідеал, - а не в складних алгебраїчних викладеннях, і тому відкрила шлях до знаходження алгебраїчних закономірностей», ... пише про Е. Нетер академік П.С. Александров, який відзначав вплив Е. Нетер на його власні роботи, роботи Понтрягіна, Колмогорова, Ван дер Вардена, Хопфа, Хассе, Вейля, Куроша і ін.

Для Е. Нетер математика була завжди пізнанням світу, а не грою символів. В основі всієї її математичної творчості лежало глибоке почуття реальності.

Наведемо слова П.С. Александрова: «В особі Е. Нетер пішла в могилу одна з найпривабливіших людських істот, з якими мені коли-небудь доводилося зустрічатися. Її незвичайна душевна доброта, чужа будь-якому хизуванню і нещирості; її життєрадісність і простота; її здатність не помічати того, що в житті є несуттєвим - створювали навколо неї атмосферу тепла, спокою і легкої радості ... Вона мала свої думки і вміла їх обстоювати з великою силою і наполегливістю ... Зворушливою була її любов до своїх учнів, ... які заміняли відсутню у неї сім'ю ... Велике почуття гумору ... Марнославство і гонитва за зовнішнім успіхом були їй чужі ... Такою була Е. Нетер, найбільша серед жінок математиків, великий вчений, дивовижний вчитель, незабутня людина ... Вона любила людей, науку, життя з усім теплом, зі всією радістю, з усією безкорисливістю і з усією ніжністю, на яку здатна глибоко чуйна - і до того ж жіноча - душа».

Еммі Нетер отримала звання приват-доцента у 1919 р. лише в результаті наполегливості Д. Гільберта і Ф. Клейна, які з величезними труднощами подолали опір університетських кіл, для яких перешкодою була ... стать Е. Нетер. «Як можна допустити, щоб жінка стала приват-доцентом: адже, ставши ним, вона зможе бути професором і членом Університетського Ради; чи дозволено, щоб жінка увійшла в Сенат?». На цю заяву Гільберт у притаманному йому дусі зауважив: «Панове, адже Сенат не лазні, чому ж жінка не може увійти туди!» По суті ж опір реакційних академічних кіл був викликаний всім відомими лівими переконаннями Нетер і її національністю.

З великими труднощами Е. Нетер отримала приват-доцентуру, а потім і позаштатну професуру; завдяки зусиллям Куранта вона отримала невеликий гонорар від Міністерства освіти за доручені їй курси. У цьому положенні, не маючи навіть гарантованої платні, вона і дожила до вигнання з Німеччини.

Ось що пише Г. Вейль в некролозі, присвяченому Е. Нетер: «Коли я отримав кафедру в Німеччині у 1930 р. (кафедру Гільберта в Геттінгенському університеті, оскільки Гільберт досяг граничного віку; ця кафедра вважалася першою математичною кафедрою в Німеччині і була пов'язана з підвищеним окладом), я робив серйозні спроби домогтися від Міністерства поліпшення умов для неї. Мені було соромно займати привілейоване перед нею положення, в той час як я розумів, що вона як математик вища за мене у багатьох відношеннях. Я не досяг успіху... Традиції, забобони, зовнішні міркування переважили її наукові заслуги і наукову велич, яка в цей час вже не заперечувалася ніким. В мої Геттінгензькі роки (1930-1933 р.; у 1933 р. Г. Вейль емігрував.) вона була там поза всяким сумнівом найсильнішим центром математичної активності... ».

Розвиток теоретико-групових представлень в застосуванні до проблем геометрії знайшов найяскравіше вираження у знаменитій Ерлангензькій програмі Ф. Клейна. Основна ідея Ерлангензької програми полягає в тому, що об'єктом геометрії є система інваріантів деякої групи перетворень неперервного многовиду і що різні системи геометрії відрізняються одна від іншої настільки, наскільки відмінні структури груп, покладених в їх основу.

У цій програмі, що має назву «Порівняльний огляд новітніх геометричних досліджень», Ф. Клейн так визначає узагальнення геометрії в теоретико-груповому сенсі: «Як узагальнення геометрії виходить, таким чином, наступна багатоосяжна задача.

Дано многовид і в ньому група перетворень; потрібно досліджувати ті властивості образів, що належать многовиду, які не змінюються від перетворення групи. Щодо сучасної термінології, яку, втім, звичайно застосовують тільки до певної групи - групи всіх лінійних перетворень - можна висловитися ще так: дано многовид і в ньому група перетворень. Потрібно розвинути теорію інваріантів цієї групи» [Клейн, 1956, с. 402].

Зауважимо, що це означає існування різних геометрій, які відрізняються одна від одної характером елементів того чи іншого многовиду і будовою групи, причому істотне значення має саме будова групи.

Як зазначає П.С. Александров, Е. Нетер, хоч і була противницею будь-якої алгоритміки в математиці, але прекрасно нею володіла, що доводиться її класичними роботами 1918 р. про диференціальні інваріанти і інваріанти варіаційної проблеми. Уже в цих роботах виявилася основна властивість її математичного обдарування: вміння розкрити логічну природу проблеми, давши їй найадекватніше загальне формулювання. Роботи з інваріантів написані нею в Геттінгені під великим впливом Гільберта. Однак не ці чудові роботи, які вже самі по собі забезпечили б їй славу першорядного математика, а її пізніші основні дослідження в області загальної, абстрактної алгебри зробили її творцем нового напрямку в алгебрі, того напрямку, який П.С. Александров називає begriffliche Mathematik.


Джеймс Джозеф Сильвестр,
англ. James Joseph Sylvester
(1814-1897)

Вперше термін «інваріант» введений Д. Сильвестром у 1851 р. в статті «On the general theory of associated algebraical forms» [Sylvester, 1857]. Ідеї цієї статті він розвинув далі у 1852 р. в статті «On the principles of the calculus of forms» [Sylvester, 1852], в якій вперше з'явилися терміни «коградієнтний» і «контраградієнтний». Таким чином, поняття інваріанта, як і багато інших, з'явилося в математиці задовго до того, як отримало значення в теоретичній фізиці.

У роботі 1918 р «Invariante Variationsproblem» Е. Нетер [Noether, 1918, вип. 2, с. 235–258]. розглянула проблему інваріантів варіаційних задач, грунтуючись на поєднанні методів варіаційного числення з методами теорії груп Лі. У цій роботі наводиться загальний алгоритм, який дозволяє знайти повну систему інваріантів будь-якої фізичної теорії, що формулюється в термінах лагранжового або гамільтонового формалізму. Цей алгоритм грунтується на зв'язку інваріантів групи Лі зі сталими інтегрування рівнянь Гамільтона або Лагранжа. Хоча алгоритм Нетер застосовний тільки до неперервних перетворень, що обмежує його застосування до багатьох задач, проте він є одним з найзагальніших і плідних алгоритмів сучасної теоретичної фізики. Дуже красивий і наочний висновок теореми Нетер дано в книзі М.М. Боголюбова і Д.В. Ширкова [Боголюбов та ін., 1957, с. 20–23]. Внесок теореми Нетер є особливо значним в задачах, пов'язаних з побудовою теорії квантованих полів.

Вимоги інваріантності насамперед виражають основні властивості простору і часу, хоча вони аж ніяк не обмежуються лише цими останніми властивостями.

Перетворення, які залишають рівняння полів і частинок інваріантними в просторі-часі такі:

1) перенесення початку координат, що виражає однорідність простору-часу;

2) тривимірні просторові обертання, що виражають ізотропність тривимірного простору;

3) спеціальний принцип відносності, що виражає властивості чотиривимірного простору-часу, який включає інваріантність рівнянь відносно чотиривимірних обертань, що включають як звичайні обертання, так і перетворення Лоренца у власному розумінні слова;

4) дзеркальні відображення (інверсії) і оберненість часу;

5) довільні точкові перетворення до будь-якої криволінійної системи координат - загальний принцип відносності, - виражають відсутність в природі будь-яких обраних систем.

Теорема Е. Нетер стверджує, що всякому неперервному перетворенню координат, що перетворює в нуль варіацію дії, при якому заданий також закон перетворення функцій поля, відповідає певний інваріант, тобто комбінація функцій поля і їхніх похідних, що зберігається.

Таким чином, відповідно до цього - одного з найширших узагальнень сучасної фізики - кожній властивості простору і часу, що виражається у коваріантності рівнянь щодо певної групи перетворень, відповідає особливий закон збереження. Коваріантності рівнянь поля або, що те ж саме, інваріантності лагранжевої функції відносно переміщення початку відліку в просторі (однорідності простору) відповідає закон збереження кількості руху. Інваріантності лагранжевої функції відносно переміщення початку відліку часу (однорідності часу) відповідає закон збереження енергії. Інваріантності відносно просторових поворотів (ізотропності простору) відповідає закон збереження моменту кількості руху. Інваріантність відносно перетворень Лоренца, тобто обертань в площинах (x, t) (y, t) (z, t), приводить до узагальненого закону збереження руху центру тяжіння. Таким чином, у чотиривимірному просторі-часі маємо всього десять фундаментальних законів збереження.

Згідно з теоремою Нетер кожній диференційовній симетрії відповідає інтеграл руху, тобто закони збереження пов’язуються з симетріями системи. Наприклад, однорідності простору відповідає закон збереження імпульсу. Відповідно, інші типи симетрії мають свої інтеграли руху: однорідність часу - закон збереження енергії, ізотропність простору - закон збереження моменту імпульсу, калібрувальна інваріантність - закон збереження електричного заряду. Теорема звичайно формулюється для систем, що мають функціонал дії, і виражає інваріантність лагранжіана відносно деякої неперервної групи перетворень. Закони збереження мають глибинне походження, пов'язане із інваріантністю опису механічної системи відносно деякої групи перетворень часу і координат. Теорема Нетер, стверджує, що для системи диференціальних рівнянь, які можна отримати як рівняння Ейлера із деякого варіаційного принципу, із інваріантності варіаційного функціоналу відносно однопараметричної неперервної групи перетворень випливає існування одного закону збереження. Якщо група має l параметрів, то із інваріантності функціоналу буде випливати існування l законів збереження.

Наведемо результати, пов'язані з формулюваннями теореми Нетер у задачах варіаційного числення.

6.2.1. Канонічний вигляд рівнянь Ейлера

Рівняння Ейлера

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'_i} = 0\,,$$

що відповідають функціоналу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i)\mathrm{d}x\,,$$

який залежить від n функцій, утворюють систему n рівнянь другого порядку. Таку систему можна звести до системи $2\,n$ рівнянь першого порядку. Наприклад, можна прийняти $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ за n нових невідомих функцій і розглядати систему

$$\begin{cases} F_{y_i} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'_i} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = y'_i\,, \end{cases} \tag{19}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ − невідомі функції, а x − незалежна змінна. Тут і далі в цьому розділі через y'_i позначатимуться нові змінні (що є загальноприйнятим у розглядуваній тематиці). Похідні функцій y_i позначатимемо $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}$. Для рівнянь Ейлера можна отримати зручнішу, більш симетричну форму, вводячи замість $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ іншу систему змінних − так звані канонічні змінні.

Розглянемо такі величини:

$$p_i = F_{y'_i}\,, \tag{20}$$

$$H = -F + \sum_{i=1}^{n} y'_i p_i\,. \tag{21}$$

Виразивши із $p_i = F_{y'_i}$ величини $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ через $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ і $p_1, p_2, \ldots, p_n$, можна $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ і $p_1, p_2, \ldots, p_n$ вважати новими змінними замість змінних $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$. Зробимо таку заміну в рівняннях Ейлера (19). Функцію $F(x, y_i, y'_i)$ в рівнянні Ейлера виразимо через нову функцію $H(x, y_i, p_i)$, що зв'язана з F рівністю

$$H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i$$

(тут y_i' − відповідні функції від x, y_i, p_i). Визначена цим поданням функція $H(x, y_i, p_i)$ називається *функцією Гамільтона*, що відповідає даному функціоналу

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y_i')\mathrm{d}x\,.$$

Змінні x, y_i, p_i, H, зв’язані із старими змінними x, y_i, y_i', F співвідношеннями (20) і (21), називаються *канонічними змінними*, що відповідають функціоналу $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y_i')\mathrm{d}x$. Перехід від старих змінних до нових можливий, якщо функціональний детермінант $\dfrac{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}$, тобто детермінант матриці, утвореної із похідних

Сер Вільям Ровен Гамільтон,
англ. Sir William Rowan Hamilton
(1806-1865)

$$\left\| F_{y_i' y_k'} \right\|,$$

відмінний від нуля. Вважатимемо, що ця умова виконується.

Зауважимо, що вказана умова забезпечує лише локальну розв’язуваність рівнянь $p_i = F_{y_i'}$ відносно $y_1', y_2', \ldots, y_n'$, але не гарантує можливості виразити $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ як функції від x, y_i, p_i, визначені у всій розглядуваній області. Отже, всі наведені міркування мають локальний характер.

З’ясуємо, як змінюється рівняння Ейлера (19) при переході до канонічних змінних. Щоб здійснити в рівняннях Ейлера вказану заміну, треба частинні похідні F_{y_i}, тобто частинні похідні F по y_i, взяті при фіксованих $y_1', y_2', \ldots, y_n'$, виразити через частинні похідні H_{y_i}, які беруться при фіксованих $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Для спрощення викладень, пов’язаних із безпосереднім обчисленням цих похідних, скористаємося виразом диференціала функції H. Оскільки перший диференціал є інваріантним стосовно вибору незалежних змінних, можна не зважати на те, здійснений вже перехід до нових змінних чи ні.

Виходячи з вигляду функції H (21) її диференціал

$$\mathrm{d}H = -\mathrm{d}F + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}y_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' \mathrm{d}p_i\,,$$

тобто

$$\mathrm{d}H = -\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}\mathrm{d}y_i' + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}y_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' \mathrm{d}p_i . \tag{22}$$

Щоб отримати звідси вирази для частинних похідних функції H, необхідно було б виразити $\mathrm{d}y_i'$ через x, y_i, і p_i. Однак (це і є важлива особливість канонічних змінних), із рівностей

$$\frac{\partial F}{\partial y_i'} = p_i ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

випливає, що у (22) доданки, які містять $\mathrm{d}y_i'$, взаємно знищуються і в результаті маємо

$$\mathrm{d}H = -\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' \mathrm{d}p_i .$$

Частинні похідні функції H це є коефіцієнти при відповідних диференціалах у правій частині, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ y_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Використовуючи наведені вирази, рівняння Ейлера (19) можна подати у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Ці $2n$ рівнянь першого порядку утворюють систему, еквівалентну (19), яка називається *канонічною системою рівнянь Ейлера* розглядуваного функціонала $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y_i')\mathrm{d}x$.

6.2.2. Перші інтеграли рівнянь Ейлера. Теорема Нетер у випадку однієї незалежної змінної

Нагадаємо, що першим інтегралом деякої системи диференціальних рівнянь називається функція, яка вздовж кожної інтегральної кривої цієї системи зберігає стале значення. З'ясуємо, які перші інтеграли може мати канонічна система

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{23}$$

а отже і еквівалентна їй вихідна система

$$\begin{cases} F_{y_i} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = y_i' . \end{cases}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли функція F, що визначає функціонал, не залежить явно від x, тобто $F = F\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right)$. Тоді функція $H = -F + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i' p_i$ також не містить явно x і тому

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x} = 0,$$

звідки

$$H = \mathrm{const}$$

вздовж кожної екстремалі. Так само неважко перевірити, що у разі коли H залежить від x справедлива формула $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial x}$. Отже, *якщо F не залежить явно від x, то функція $H(y_i, p_i)$ є першим інтегралом рівняння Ейлера.*

Розглянемо тепер деяку довільну функцію

$$\Phi = \Phi\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$$

і з'ясуємо, за яких умов вона буде першим інтегралом системи (23). При цьому вже не припускатимемо, що F не залежить явно від x, а розглянемо загальний випадок. Вздовж кожної інтегральної кривої системи (23) маємо

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}\right) = \sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y_i}\right)$$

.

Вираз

$$[\Phi, H] = \sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y_i}\right)$$

називається *дужкою Пуассона* функцій Φ і H. Справедлива формула

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = [\Phi, H].$$

Отже, *для того щоб функція $\Phi = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ була першим інтегралом системи рівнянь Ейлера* (19) *необхідно і достатньо, щоб дужка Пуассона $[\Phi, H]$ тотожно дорівнювала нулю.*

Сімеон-Дені Пуассон,
фр. Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

Якщо не тільки H але і Φ може явно залежати від x, то легко перевірити, що справедлива рівність

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + [\Phi, H].$$

Вище показано, що система рівнянь Ейлера, яка відповідає функціоналу

$$\int_a^b F(y_i, y_i')\mathrm{d}x, \qquad (24)$$

де F не залежить явно від x, має перший інтеграл

$$H = \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'} - F .$$

Той факт, що F не залежить явно від x, рівносильний, очевидно, такому: якщо ввести нову змінну

$$x^* = x + \alpha, \qquad (25)$$

то функція F, а тому і інтеграл (24) при цьому не зміниться. Отже, H є першим інтегралом системи рівнянь Ейлера тоді і лише тоді, коли функціонал $\int_a^b F\mathrm{d}x$ не змінюється при перетворенні (25). Те, що H є першим інтегралом *лише* тоді, випливає із формули $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial H}{\partial x}$, оскільки $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ тільки якщо $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

Покажемо, що зв'язок між першими інтегралами системи рівнянь Ейлера і інваріантністю функціонала відносно деяких перетворень змінних x і $y_1, y_2, \ldots, y_n$ існує також і у загальному випадку.

З'ясуємо перш за все поняття інваріантності функціонала відносно перетворення змінних. Нехай задано функціонал

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y_i')\mathrm{d}x .$$

Розглянемо таке перетворення:

$$\left.\begin{array}{l} x^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right\}. \qquad (26)$$

Це перетворення переводить деяку криву γ, задану рівняннями

$$y_i = \eta_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

у іншу криву γ^*, рівняння якої можна дістати, підставивши у рівності (26), що зв'язують x, y_i із x^*, y_i^*, замість $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функції $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$, які задають рівняння кривої γ, і виключивши x із отриманих таким чином $n+1$ рівностей. В результаті цієї операції матимемо n рівнянь виду

$$y_i^* = \eta_i^*(x^*),$$

які і будуть рівняннями кривої γ^*. Функціонал $v[\gamma]$ називається інваріантним відносно даного перетворення, якщо

$$v[\gamma] = v[y^*],$$

тобто

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_i, \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \int_{x_0^*}^{x_1^*} F\left(x^*, y_i^*, \frac{\mathrm{d}y_i^*}{\mathrm{d}x^*}\right)\mathrm{d}x^* .$$

Як приклад розглянемо функціонал

$$v[\gamma] = \int_a^b y'^2 \mathrm{d}x ,$$

який є інваріантним відносно перетворення

$$x^* = x + c\,,\ y^* = y\,. \tag{27}$$

Дійсно, якщо крива γ задається рівнянням

$$y = \eta(x), \quad a \le x \le b\,,$$

то крива γ^*, отримана внаслідок перетворення, задається рівнянням

$$y^* = \eta(x^* - c) \equiv \eta^*(x^*), \quad a \le x^* - c \le b\,.$$

Маємо

$$v\left[\gamma^*\right] = \int_{a+c}^{b+c} \left(\frac{\mathrm{d}\eta^*(x^*)}{\mathrm{d}x^*}\right)^2 \mathrm{d}x^* = \int_{a+c}^{b+c} \left(\frac{\mathrm{d}\eta(x^* - c)}{\mathrm{d}x^*}\right)^2 \mathrm{d}x^* = \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = v[\gamma]\,.$$

Іншим прикладом є інтеграл

$$v[\gamma] = \int_a^b x y'^2 \mathrm{d}x$$

який є функціоналом, не інваріантним відносно перетворення (27). Справді, виконуючи такі дії як і в попередньому прикладі, дістанемо

$$v\left[\gamma^*\right] = \int_{a+c}^{b+c} x^* \left(\frac{\mathrm{d}\eta^*(x^*)}{\mathrm{d}x^*}\right)^2 \mathrm{d}x^* = \int_{a+c}^{b+c} x^* \left(\frac{\mathrm{d}\eta(x^* - c)}{\mathrm{d}x^*}\right)^2 \mathrm{d}x^* =$$

$$= \int_a^b (x + c)\left(\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = v\left[x\right] + c\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Нехай задано сукупність оборотних перетворень змінних $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, яка залежить від деякого параметра α:

$$x^* = \varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha)\,,\ y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{28}$$

де функції φ_0 і φ_i диференційовні, а значенню $\alpha = 0$ відповідає тотожне перетворення, тобто

$$\varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) \equiv x\,,\ \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0) \equiv y_i\,.$$

Справедлива така *теорема (Нетер). Кожному перетворенню виду* (28)*, що залишає інтеграл* (24) *інваріантним, відповідає деякий перший інтеграл системи рівнянь Ейлера.*

Вигляд цього першого інтеграла буде наведений нижче.

Доведення цієї теореми проведемо для частинного випадку перетворень виду

$$x^* = x\,,\ y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha)\,. \tag{28'}$$

Вважаючи величину α нескінченно малою, матимемо

$$y_i^* - y_i = \varphi'_{i\alpha}(x, y_k, 0)\alpha + o(\alpha)\,.$$

Позначимо

$$\left.\frac{\partial\varphi_i(x, y_k, \alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \psi_i(x, y_k)\,,$$

тобто

$$y_i^* - y_i = \alpha\psi_i + o(\alpha)\,.$$

Вважаючи, що крива, яка визначається рівняннями

$$y_i = y_i(x)\,,$$

є екстремаллю, напишемо вираз для варіації функціонала (24), що відповідає переходу від y_i до $y_i + \alpha\psi_i$. Використаємо формулу для варіації

$$\delta v = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\,\delta y_i\Big|_{x_0}^{x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right)\delta x\Big|_{x_0}^{x_1}\,. \tag{29}$$

Враховуючи, що в нашому випадку x не варіюється, тобто $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, а $\delta y_i = \alpha\psi_i$, маємо

$$\delta v = \alpha\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\,\psi_i\Big|_{x_0}^{x_1}\,.$$

Під δy_i тут розуміється головна лінійна відносно α частина приросту y_i, а не сам цей приріст. Легко бачити, що це не позначається на результаті, але дає можливість не враховувати малі вищих порядків.

Оскільки за умовою функціонал (24) є інваріантним відносно перетворення (28), то варіація δv цього функціонала, що відповідає $\delta y_i = \alpha\psi_i$, дорівнює нулю. Прирівнюючи δv до нуля, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\,\psi_i\Big|_{x_0}^{x_1} = 0\,,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\,\psi_i\Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\,\psi_i\Big|_{x=x_1}\,.$$

Оскільки ця рівність справедлива для довільних точок x_0 і x_1, то вздовж кожної екстремалі

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \psi_i = \mathrm{const},$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \left. \frac{\partial \varphi_i(x, y_k, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \mathrm{const}.$$

Таким чином, по заданому перетворенню (26), що залишає функціонал (24) інваріантним, побудовано вираз, який вздовж кожної екстремалі залишається сталим, тобто побудовано деякий перший інтеграл системи рівнянь Ейлера. Теорему доведено.

Розглянемо тепер частинний випадок, коли підінтегральна функція F не залежить явно від x. Незалежність F від x означає, що інтеграл (24) є інваріантним відносно перетворення

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x + \alpha, \\ y_i^* &= y_i. \end{aligned} \right\} . \tag{30}$$

Дійсно, воно переводить інтеграл $\int_a^b F(x, y_i, y_i')\mathrm{d}x$ у

$$\int_a^b F(x + \alpha, y_i, y_i')\mathrm{d}x .$$

Ці два інтеграли рівні між собою тоді і лише тоді, коли F не залежить явно від x. Обчисливши варіацію функціонала (24), що відповідає перетворенню (30), матимемо

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum (F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}) \delta y_i \mathrm{d}x - H \cdot (-\alpha) \Big|_{x_0}^{x_1} .$$

Прирівнюючи цей вираз до нуля і розглядаючи його лише на кривих, що задовольняють рівняння Ейлера, дістанемо

$$H(y_i, p_i)\big|_{x=x_0} = H(y_i, p_i)\big|_{x=x_1},$$

тобто $H = \mathrm{const}$ вздовж інтегральної кривої. Таким чином, ми знову маємо вже встановлений раніше результат: *для функціоналів, які явно не залежать від часу, функція H є першим інтегралом відповідної системи рівнянь Ейлера.*

6.3. Варіаційні задачі з частинними похідними

Розглянемо питання, що стосуються функціоналів, залежних від функцій двох або більшої кількості змінних, до яких приводять, зокрема, задачі механіки, що відносяться до систем з нескінченною кількістю ступенів свободи. Для таких задач розглянемо загальні методи отримання законів збереження (теорема Нетер), які у попередніх розділах викладені для систем, складених із скінченної кількості матеріальних точок.

6.3.1. Основна формула для варіації функціонала у випадку фіксованої області

Розглянемо функціонал

$$J(u)=\int\limits_G F\left(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n}\right)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n\,, \tag{31}$$

залежний від функції u змінних $x_1,\dots,x_n$ та її частинних похідних першого порядку, і обчислимо його варіацію, вважаючи, що область інтегрування G не варіюється, а функція $u(x_1,\dots,x_n)$ переходить у

$$u^*(x_1,\dots,x_n)=u(x_1,\dots,x_n)+\varepsilon\psi(x_1,\dots,x_n)+\dots, \tag{32}$$

де крапки позначають члени вище першого порядку мализни по ε. При цьому під варіацією функціонала (31) розуміється головна лінійна відносно ε частина різниці

$$J(u^*)-J(u)\,.$$

Обчислимо цю різницю. Для скорочення запису писатимемо $u(x)$, $\psi(x)$ замість $u(x_1,\dots,x_n)$, $\psi(x_1,\dots,x_n)$, $\mathrm{d}x$ замість $\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$ і тому подібне. Отримаємо

$$J(u^*)-J(u)=\int\limits_G\Big[F\left(x,u(x)+\varepsilon\psi(x),u_{x_1}(x)+\varepsilon\psi_{x_1}(x),\dots,u_{x_n}(x)+\varepsilon\psi_{x_n}(x)\right)-$$

$$-F\left(x,u(x),u_{x_1}(x),\dots,u_{x_n}(x)\right)\Big]\mathrm{d}x=\varepsilon\int\limits_G\left[F_u\psi(x)+\sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}}\psi_{x_k}\right]\mathrm{d}x+\dots,$$

де крапки праворуч знову позначають сукупність членів вище першого порядку відносно ε. Вираз

$$\delta J=\varepsilon\int\limits_G\left[F_u\psi(x)+\sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}}\psi_{x_k}\right]\mathrm{d}x \tag{33}$$

і є варіацією функціонала (31).

Поставимо задачу, важливу для подальшого: представити варіацію функціонала (31) як інтеграл від виразу вигляду

$$B(x)\psi(x)+\mathrm{div}(\dots)\,.$$

Інакше кажучи, треба перетворити вираз (33) так, щоб похідні ψ_{x_k} містилися лише в такій комбінації членів, яку можна представити у вигляді дивергенції. З цією метою у формулу (33) замість

$$F_{u_{x_k}}\psi_{x_k}(x)$$

підставимо

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F_{u_{x_k}}\psi(x)\right)-\frac{\partial F_{u_{x_k}}}{\partial x_k}\psi(x)\,.$$

Дістанемо

$$\delta J = \varepsilon \int\limits_G \left[F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right] \psi(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \int\limits_G \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}}\, \psi(x) \right) \mathrm{d}x\,. \tag{34}$$

Ця формула для варіації є основною. Її значення грунтується на тому, що останній доданок, який є інтегралом від дивергенції, можна звести до інтеграла по границі Г області *G*. В результаті цього під знаком інтеграла, узятого по *G*, буде вираз, залежний тільки від функції $\psi(x)$, але не від її похідних, а члени з похідними увійдуть лише до граничних умов[1].

Якщо функція $\psi(x)$, що визначає варіацію функції $u(x)$, перетворюється в нуль на границі області *G*, то інтеграл

$$\int\limits_G \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}}\, \psi(x))\,\mathrm{d}x$$

перетворюється в силу формули Гріна (*) в нуль, тобто формула для варіації набирає вигляду

$$\delta J = \int\limits_G \left(F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \psi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{35}$$

Із загальної необхідної умови екстремуму функціонала

$$\delta J = 0$$

випливає рівняння Ейлера

$$F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0\,,$$

яке є основною необхідною умовою екстремуму для функціонала (31).

Формула (34) для варіації виведена у припущенні, що область інтегрування *G* фіксована. Узагальнення цієї формули на випадок, коли у функціоналі (31) область інтегрування теж варіюється, розглядається у наступному підпункті.

6.3.2. Головна формула для варіації у випадку змінної області. Теорема Нетер

Розглянемо задачу про знаходження варіації функціонала

$$\int \!\!\ldots\!\! \int\limits_G F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\,, \tag{36}$$

---

[1] Для цього досить скористатися *n*-вимірною формулою Гріна, яку в даному разі можна записати так:

$$\int\limits_G \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_{u_{x_k}}\, \psi(x))\mathrm{d}x = \int\limits_\Gamma F_{u_{x_1}}\, \psi(x)\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n - \ldots + (-1)^n F_{u_{x_n}}\, \psi(x)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \tag{*}$$

Таким способом формула для варіації (34) приводиться до вигляду, цілком аналогічного формулі для варіації функціонала, залежного від ліній, яка теж записується як інтеграл від $\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) h(x)$ плюс граничні члени.

в загальному випадку, тобто коли варіюється не тільки функція *u*, (і її похідні), але і незалежні змінні $x_1,\ldots,x_n$ (отже і область інтегрування *G*).

Уточнимо постановку задачі. Нехай задане перетворення

$$x_i^* = \Phi_i\left(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},\varepsilon\right), \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{37}$$

$$u^* = \Psi\left(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},\varepsilon\right). \tag{37'}$$

Якщо $u=u(x_1,\ldots,x_n)$, то u^* можна розглядати як функцію від $x_1^*,\ldots,x_n^*$. Справді, із співвідношень (37) можна в цьому разі виразити $x_1,\ldots,x_n$ через $x_1^*,\ldots,x_n^*$; підставивши ці вирази у (37'), запишемо u^* у вигляді

$$u^* = u^*(x_1^*,\ldots,x_n^*).$$

Співвідношення (37) (за умови, що $u=u(x_1,\ldots,x_n)$) переводять область *G* зміни змінних $x_1,\ldots,x_n$ в деяку область G^* зміни змінних $x_1^*,\ldots,x_n^*$.

Припустимо, що перетворення (37), (37') при $\varepsilon=0$ зводиться до тотожного перетворення

$$x_i^* = x_i\ ,\ u^* = u^*.$$

Введемо для спрощення запису скорочені позначення: писатимемо *x* замість $x_1,\ldots,x_n$ і x^* замість $x_1^*,\ldots,x_n^*$. Формули (37), (37') дають можливість кожній функції $u=u(x)$ і області *G* поставити у відповідність функцію $u^*(x^*)$ і область G^*. При цьому інтегралу

$$J[u(x)] = \int\limits_G F\left(x,u,u_{x_1},\ \ldots\ ,u_{x_n}\right)\mathrm{d}x$$

ставиться у відповідність інтеграл

$$J\left[u^*(x^*)\right] = \int\limits_{G^*} F\left(x^*,u^*,u^*_{x_1^*},\ \ldots\ ,u^*_{x_n^*}\right)\mathrm{d}x^*.$$

Задача полягає в тому, щоб обчислити варіацію функціонала (36), яка відповідає переходу від *x* і $u=u(x)$ до x^* і $u^*(x^*)$, тобто головну лінійну (відносно ε) частину різниці

$$J\left[u^*(x^*)\right] - J\left[u(x)\right].$$

Проілюструємо постановку задачі простим прикладом для функціоналів, залежних від функції однієї змінної. Нехай $u=u(x)$ – деяка крива γ, що лежить у площині (x,u), і нехай розглядуване перетворення являє собою поворот площини (x,u) на кут ε. При цьому кожна точка (x,u) переходить у деяку іншу точку

(x^*, u^*). Зокрема, кожна точка кривої γ переходить у точку кривої γ^*, яку отримуємо із даної кривої при повороті (рис. 10).

*Формули для варіацій змінних x і **u**.* Спочатку розглянемо докладніше перехід від *x* до x^* і від *u* до u^*. Позначимо

$$x_i^* = x_i + \varepsilon\varphi_i(x) + \text{члени вищого порядку} \tag{38}$$

і

$$u^*(x^*) = u(x) + \varepsilon\psi(x) + \text{члени вищого порядку.} \tag{38'}$$

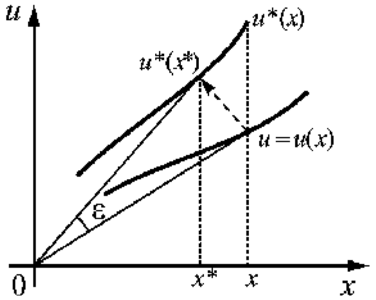


Рис. 10

Тут очевидно

$$\varphi_i = \left.\frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \psi = \left.\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Введемо позначення

$$\delta x_i = \varepsilon\varphi_i, \tag{39}$$

$$\delta u = \varepsilon\psi. \tag{39'}$$

Далі буде потрібна різниця

$$u^*(x) - u(x),$$

яку подамо у вигляді

$$u^*(x) - u(x) = \varepsilon\overline{\psi}(x) + \text{члени вищого порядку по } \varepsilon$$

і позначимо

$$\overline{\delta u} = \varepsilon\overline{\psi}. \tag{40}$$

Спочатку з'ясуємо сенс введених величин δx_i, δu і $\overline{\delta u}$ для наведеного вище прикладу повороту на кут ε навколо початку координат. В цьому випадку кожна точка (x, u) переходить у точку з координатами

$$x^* = x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon,$$

$$u^* = x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon.$$

Зокрема, точка $(x, u(x))$, що лежить на кривій γ, переходить у точку, що лежить на γ^*, з координатами

$$x^* = x\cos\varepsilon - u(x)\sin\varepsilon,$$

$$u^*(x^*) = x\sin\varepsilon + u(x)\cos\varepsilon,$$

тому

$$x^* = x - \varepsilon u(x) + \text{члени вищого порядку,}$$

$$u^*(x^*) = u(x) + \varepsilon x + \text{члени вищого порядку,}$$

тобто згідно з (38) і (38')

$$\varphi = -u(x), \quad \psi = x$$

і, отже (див. (39) і (39')),

$$\delta x = -\varepsilon u(x)\,,\quad \delta u = \varepsilon x\,.$$

Те, що вектор, який з'єднує точки $(x, u(x))$ і $\left(x^*, u^*(x^*)\right)$, має саме компоненти $-\varepsilon u(x)$ і εx, видно і безпосередньо із рис. 10.

Далі в цьому випадку

$$u^*(x) = u^*(x^* + \varepsilon u(x)) = u^*(x^*) + \varepsilon u^{*\prime}(x^*)u(x) + o(\varepsilon)\,;$$

але оскільки

$$u^{*\prime}(x^*) = u'(x) + \text{величина порядку } \varepsilon\,,$$

то

$$u^*\left(x\right) = u^*(x^*) + \varepsilon u'(x)u(x) + o(\varepsilon)\,,$$

тобто в даному випадку

$$\overline{\delta u} = \varepsilon\left(x + u'(x)u(x)\right),$$

або

$$\overline{\psi}(x) = x + u'(x)u(x)\,.$$

Повернемося тепер до загального випадку. Знайдемо зв'язок між δu і $\overline{\delta u}$. Маємо

$$u^*(x^*) - u(x) = u^*(x^*) - u^*(x) + u^*(x) - u(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial x_i}\varphi_i(x) + \overline{\delta u} + o(\varepsilon)\,.$$

Оскільки $\dfrac{\partial u^*}{\partial x_i}$ і $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ відрізняються одна від одної на величину порядку ε, то остаточно

$$u^*(x^*) - u(x) \sim \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\varphi_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \overline{\delta u} = \overline{\delta u} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\delta x_i$$

(тут і далі символ $\sim$ означає рівність з точністю до величин вище першого порядку мализни відносно ε). Але головна лінійна відносно ε частина різниці $u^*(x^*) - u(x)$ є δu, тому

$$\delta u = \overline{\delta u} + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} \varphi_i u_{x_i} \equiv \overline{\delta u} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\delta x_i \tag{41}$$

або

$$\psi = \overline{\psi} + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i u_{x_i}\,.$$

Для того, щоб обчислити різницю

$$J[u^*(x^*)] - J[u(x)]\,,$$

треба ще обчислити

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_i^*}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \tag{42}$$

Точніше, треба обчислити головну лінійну відносно ε частину цього виразу. Позначимо її символом δu_{x_i}.

Запишемо спочатку $\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k}$. Це потрібно не лише для знаходження δu_{x_i}, але і для вираження елемента об'єму області G^* через змінні $x_1,\ldots,x_n$. Із формули (38) отримаємо

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k}=\delta_{ik}+\varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k},$$

де

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{при} \quad i=k,\\ 0 & \text{при} \quad i\neq k.\end{cases}$$

Далі, звідси дістанемо, що

$$\frac{\partial}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i^*}\left(\delta_{ik}+\varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k^*}+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i^*}; \tag{43}$$

і отже

$$\frac{\partial}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k^*}=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i^*}. \tag{44}$$

Повернемось до обчислення δu_{x_i}. Маємо

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}=\frac{\partial[u^*(x^*)-u(x^*)]}{\partial x_k^*}+\frac{\partial[u(x^*)-u(x)]}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k^*}-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k}\right).$$

Розглянемо кожен із трьох доданків справа окремо.

Різниця $u^*(x^*)-u(x^*)$ є величиною порядку ε, тому у першому доданку можна диференціювання по x_k^* замінити диференціюванням по x_k (в силу (44) результат від цього зміниться на величину порядку ε^2). Таким чином, враховуючи, що $u^*(x)-u(x)\sim\varepsilon\overline{\psi}(x)$, дістанемо

$$\frac{\partial[u^*(x^*)-u(x^*)]}{\partial x_k^*}\sim\frac{\partial[u^*(x^*)-u(x^*)]}{\partial x_k}\sim\varepsilon\frac{\partial\overline{\psi}(x^*)}{\partial x_k};$$

але $\frac{\partial\bar{\psi}(x^*)}{\partial x_k}$ відрізняється на величину порядку ε від $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}$. Тому остаточно[1]

$$\frac{\partial\left[u^*(x^*)-u(x^*)\right]}{\partial x_k^*}\sim\varepsilon\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x_k}. \tag{45}$$

Далі

$$\frac{\partial\left[u(x^*)-u(x)\right]}{\partial x_k}\sim\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\left(x_i^*-x_i\right)\right)\sim\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi_i(x). \tag{46}$$

І нарешті,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k^*}-\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u(x^*)\sim\left(\frac{\partial}{\partial x_k^*}-\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u(x)\sim-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}. \tag{47}$$

Збираючи разом отримані формули (45), (46) і (47), дістанемо

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\sim\varepsilon\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right). \tag{48}$$

Головна лінійна відносно ε частина різниці $\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$ позначалася δu_{x_k}.

Користуючись цим позначенням і позначеннями (39) і (40), співвідношення (48) можна подати у такому вигляді

$$\delta u_{x_k}=\frac{\partial(\overline{\delta u})}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i x_k}\delta x_i\ . \tag{49}$$

Отже, зберемо разом отримані формули. Маємо

$$x_i^*-x_i\sim\varepsilon\varphi_i(x)=\delta x_i,$$

$$u^*(x^*)-u(x)\sim\varepsilon\psi=\delta u,$$

$$u^*(x)-u(x)\sim\varepsilon\bar{\psi}=\overline{\delta u},$$

$$\bar{\psi}=\psi-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i u_{x_i}\text{ , тобто }\overline{\delta u}=\delta u-\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}\delta x_i\ ,$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial(\overline{\delta u})}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i x_k}\delta x_i\ ,$$

---

[1] Слід пам'ятати, що u вважається функцією від x, тобто при обчисленні $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$ значення u не фіксується.

(На жаль, недосконалість загальноприйнятих позначень для частинних похідних не дозволяє відобразити це в самих формулах).

де $\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ – головна лінійна частина виразу

$$\frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x_k^*}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}.$$

Для наведеного вище частинного прикладу повороту площини (x,u) на кут ε всі ці співвідношення легко бачити безпосередньо з рис. 11.

Головна формула для варіації функціонала. Зараз вже можна обчислити різницю

$$\Delta J = J[u^*(x^*)]-J[u(x)]$$

Для цього передусім зведемо у виразі для $J[u^*(x)]$ інтегрування по G^* до інтегрування по області G. Оскільки

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_k}=\delta_{ik}+\varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k},$$

то якобіан $\frac{D(x_1^*,\ldots,x_n^*)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ дорівнює (з точністю до величин вище першого прядку відносно ε [1])

$$1+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}.$$

Тому

$$\Delta J\sim\int\limits_G\Big[F\big(x^*,u^*,u^*_{x_1^*},\ldots,u^*_{x_n^*}\big)\Big(1+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\Big)-F(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})\Big]\mathrm{d}x\,.$$

Користуючись формулою Тейлора і виписуючи лише члени першого порядку відносно ε, дістанемо

$$\Delta J=\int\limits_G\left[\sum_{k=1}^{n}F_{x_k}\delta x_k+F_u\delta u+\sum_{k=1}^{n}F_{u_{x_k}}\delta u_{x_k}+\varepsilon F\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k}\right]\mathrm{d}x+\cdots.$$

---

[1] Дійсно $\begin{vmatrix} 1+\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \varepsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} \\ \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & 1+\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \varepsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \ldots & 1+\varepsilon\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\right)+o\left(\varepsilon^2\right)=1+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}+o_1\left(\varepsilon^2\right).$

Виписані члени являють собою головну лінійну відносно ε частину ΔJ, тобто варіацію δJ функціоналу $J[u]$. Замінивши δu на $\overline{\delta u}+\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}\delta x_i$ і δu_{x_k}, на

$$\left(\overline{\delta u}\right)_{x_k}+\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_k}\delta x_i$$

(див. (41) і (49)), отримаємо

$$\delta J=\int\limits_G\left[\sum_{k=1}^{n}F_{x_k}\delta x_k+F_u\overline{\delta u}+F_u\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}\delta x_k+\sum_{k=1}^{n}F_{u_{x_k}}(\overline{\delta u})_{x_k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,k=1}^{n}F_{u_{x_k}}u_{x_i x_k}\delta x_i+F\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(\delta x_k)}{\partial x_k}\right]\mathrm{d}x. \tag{50}$$

Як і у розглянутому у пп. 6.3.1 випадку фіксованої області G, поставимо задачу: записати варіацію як інтеграл від виразу виду[1].

$$A(x)\overline{\delta u}+div(\cdots).$$

Для цього у виразі (50) суму

$$\sum_{k=1}^{n}F_{x_k}\delta x_k+\sum_{k=1}^{n}F(\delta x_k)_{x_k}+\sum_{k=1}^{n}F_u u_{x_k}\delta x_k+\sum_{i,k=1}^{n}F_{u_{x_k}}u_{x_i x_k}\delta x_i$$

запишемо як[2]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F\delta x_k\right),$$

а

$$\sum_{k=1}^{n}F_{u_{x_k}}(\overline{\delta u})_{x_k}$$

замінимо на

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F_{u_{x_k}}\overline{\delta u}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F_{u_{x_k}}\right)\overline{\delta u}$$

(аналог інтегрування частинами). Остаточно маємо

$$\delta J=\int\limits_G\left[\left(F_u-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}F_{u_{x_k}}\right)\overline{\delta u}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F_{u_{x_k}}\overline{\delta u}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(F\delta x_k\right)\right]dx. \tag{51}$$

---

[1] Інакше кажучи (оскільки інтеграл від дивергенції зводиться до інтеграла, взятого по границі області), приводимо вираз для варіації до такого вигляду щоб похідні від варіацій δu входили лише в граничні члени.

[2] Див. виноску на стор. 280.

Це і є головна формула для варіації. Перепишемо її ще раз, підставивши замість $\overline{\delta u}$ і δx_k їх вирази (40) і (39). Дістанемо

$$\delta J = \int_G \left[\left(F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \overline{\psi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\psi} + F \varphi_k \right) \right] \mathrm{d}x . \qquad (52)$$

Отже, якщо дано функціонал

$$J[u] = \int_G F\left(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right) \mathrm{d}x$$

і дано перетворення

$$x_i^* = \Phi_i\,(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$u^* = \Psi(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \varepsilon),$$

то варіація δJ *функціонала* J, *тобто головна лінійна відносно* ε *частина різниці*

$$J[u^*(x^*)] - J[u(x)]$$

представляється формулою (52), *де*

$$\varphi_i\,(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi_i\,(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0},$$

і

$$\psi(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Psi(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Зауважимо, що в тому частинному випадку, коли незалежні змінні x_i не варіюються, а варіюється тільки функція u (і її похідні), у формулі (51) останній доданок зникає, і маємо дещо простіший вираз

$$\delta J = \int_G \left[\left(F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \overline{\delta u} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\delta u} \right) \right] \mathrm{d}x ,$$

що співпадає з формулою (34).

Звичайно формулою варіації функціонала користуються тоді, коли $u(x)$ є екстремальною поверхнею цього функціонала, тобто задовольняє відповідне рівняння Ейлера

$$F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0 .$$

В цьому разі вираз для варіації зводиться до

$$\delta J = \int_G \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\delta u} \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F \delta x_k \right) \right] \mathrm{d}x \qquad (53)$$

в загальному випадку і до

$$\delta J = \int\limits_G \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\delta u} \right) \right] \mathrm{d}x \tag{54}$$

у разі, коли незалежні змінні x_i не варіюються.

Узагальнення на випадок кількох функцій або кількох параметрів. Формули, аналогічні формулам (51)–(54) можна отримати і в тому разі, коли розглядуваний функціонал залежить не від однієї функції u, а від кількох, тобто якщо u є не скалярною величиною, а векторною. Якщо $u = (u_1, \ldots, u_m)$, то, наприклад, формула (51) для варіації набирає вигляду

$$\delta J = \int\limits_G \left[\sum_{i=1}^{m} \left(F_{u_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \right) \overline{\delta u_i} + \sum_{i,k=1}^{m,n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \overline{\delta u_i} \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F \delta x_k \right) \right] \mathrm{d}x. \quad (51_m)$$

Інше узагальнення отриманих вище формул для варіації полягає у наступному. Вважатимемо, що перетворення, які переводять x і u в x^* і u^*, залежать не від одного параметра, а від декількох. Інакше кажучи, припустимо, що величина ε також є вектором $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\rho)$. Якщо відповідні перетворення записати у вигляді

$$x_k^* = \Phi_k \left(x, u, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \varepsilon \right) \sim x_k + \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varepsilon_\alpha \varphi_k^{(\alpha)}(x,u),$$

$$u_i^* = \Psi_i \left(x, u, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \varepsilon \right) \sim u_i + \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varepsilon_\alpha \psi_i^{(\alpha)}(x,u)$$

і під δx_k, δu_i, $\overline{\delta u_i}$ розуміти вирази

$$\delta x_k = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varepsilon_\alpha \varphi_k^{(\alpha)}(x,u),$$

$$\delta u_i = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \varepsilon_\alpha \psi_i^{(\alpha)}(x,u),$$

$$\overline{\delta u_i} = \delta u_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k,$$

то і в розглядуваному загальному випадку формула (51_m) зберігається без будь-яких змін.

Теорема Нетер. Із отриманої формули варіації функціонала випливає одна із важливих теорем варіаційного числення – теорема Нетер про інваріантні варіаційні задачі, яка у випадку однієї незалежної змінної доведена у п. 6.2.2. Сформулюємо передусім означення інваріантності функціонала.

Нехай дано функціонал

$$J[u]=\int\limits_G F(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})\mathrm{d}x\,. \tag{55}$$

Розглядатимемо перетворення незалежних змінних $x_1,\ldots,x_n$ і функції $u=u(x)$, що мають вигляд[1]

$$x_k^*=\Phi_k(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}) \tag{56а}$$

$$u^*=\Psi(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})\,, \tag{56б}$$

Інтеграл (55) назвемо інваріантом даної сукупності перетворень, якщо

$$\int\limits_G F(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})\mathrm{d}x=\int\limits_{G^*} F(x^*,u^*,u^*_{x_1^*},\ldots,u^*_{x_n^*})\mathrm{d}x^*$$

для кожного з перетворень, що належать цій сукупності. Тут інтеграл зліва береться по будь-якій області зміни змінних $x_1,\ldots,x_n$, а справа – по відповідній області зміни змінних $x_1^*,\ldots,x_n^*$.

Інакше кажучи, якщо σ – поверхня, задана рівнянням $u=u(x)$, а σ^* – поверхня, задана рівнянням $u^*=u^*(x^*)$, в яку σ переводиться перетворенням (56), то інваріантність функціонала (55) означає, що

$$J[\sigma^*]=J[\sigma]\,.$$

У випадку $n=1$, тобто стосовно функціонала від ліній, поняття інваріантності вже вводилося у пп. 6.2.2. Там розглядалися також найпростіші приклади. Наведемо ще один приклад.

Функціонал

$$\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{57}$$

є інваріантним відносно перетворень

$$\left.\begin{aligned}x^*&=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y^*&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha,\\ u^*&=u.\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Справді, нехай σ – поверхня, задана рівнянням $u=f(x,y)$. Знайдемо рівняння поверхні σ^*, яку отримуємо із σ перетворенням (58). З перших двох рівностей (58) дістанемо, що

---

[1] Підкреслимо ще раз, що при такому перетворенні функція u змінних $x_1,\ldots,x_n$ переходить у функцію u^* змінних $x_1^*,\ldots,x_n^*$, оскільки із рівностей (56а) можна визначити $x_1,\ldots,x_n$ (а отже, і u, $u_{x_1},\ldots,u_{x_n}$) як функції від $x_1^*,\ldots,x_n^*$ і потім підставити ці вирази у (56б).

$$x = x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha\,, \quad y = x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha,$$

отже σ^* задається рівнянням

$$u^* = f(x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha,\, x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha)\,.$$

Запишемо це рівняння у такому вигляді:

$$u^* = f^*(x^*, y^*)\,.$$

Тоді маємо

$$J\left[\sigma^*\right] = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2\right] \mathrm{d}x^* \mathrm{d}y^* =$$

$$= \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)^2 + \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha\right)^2\right] \mathrm{d}x^* \mathrm{d}y^*\,.$$

Повернувшись у цьому інтегралі до попередніх змінних x і y, дістанемо

$$J[\sigma^*] = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = J[\sigma]\,.$$

Теорема (Нетер). Нехай задана сукупність перетворень

$$\left.\begin{aligned} x_k^* &= \Phi_k(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \varepsilon) \sim x_k + \varepsilon\varphi_k\,, \\ u^* &= \Psi(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \varepsilon) \sim u + \varepsilon\psi. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Тоді із інваріантності функціонала

$$J[u] = \int\limits_G F(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \mathrm{d}x \tag{60}$$

відносно перетворень (59) *випливає, що*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(F_{u_{x_k}} \bar{\psi} + F\varphi_k\right) = 0\,, \tag{61}$$

де

$$\bar{\psi} = \psi - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k u_{x_k}\,.$$

Тут $\varphi_k = \varphi_k(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ *і* $\psi = \psi(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ *визначаються формулами* (59) *і u – довільна екстремальна поверхня функціонала* (60).

Якщо перетворення (59) залежать не від одного параметра, а від ρ параметрів $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\rho)$, то із інваріантності функціонала (60) відносно такої сукупності перетворень випливає існування ρ лінійно незалежних співвідношень

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[F_{u_{x_k}} \bar{\psi}^{(\alpha)} + F\varphi_k^{(\alpha)}\right] = 0\,,\ \ \alpha = 1, 2, \ldots, \rho\,, \tag{62}$$

де

$$\varphi_k^{(\alpha)} = \left.\frac{\partial x_k^*}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \psi^{(\alpha)} = \left.\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0} \text{ і } \overline{\psi}^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)} - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(\alpha)} u_{x_k},$$

а u – будь-яка екстремальна поверхня. Нарешті, якщо функціонал (60) залежить від векторної функції $u = (u_1, \ldots, u_m)$, то співвідношення (62) замінюються співвідношеннями

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \psi_i^{(\alpha)} + F \varphi_k^{(\alpha)} \right) = 0 .$$

Доведення теореми Нетер відразу випливає із загальної формули (52) для варіації. Справді, якщо функціонал (60) є інваріантним відносно перетворень (59), то варіація цього функціонала (що відповідає переходу від x, u до x^*, u^*) дорівнює нулю. Якщо $u = u(x)$ – екстремальна поверхня, то для неї

$$F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} = 0$$

і формула (52) набирає вигляду

$$\int_G \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\psi} + F \varphi_k \right) \right] \mathrm{d}x .$$

Оскільки область G довільна, то звідси випливає

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\psi} + F \varphi_k \right) = 0 ,$$

що і треба було довести.

У разі перетворень, залежних від кількох параметрів, доведення аналогічне.

Зауважимо, що у разі коли $u = u(x)$ довільна функція (не екстремаль), то для неї із інваріантності функціонала (60) відносно перетворень (59) випливає співвідношення

$$\left(F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_{x_k}} \right) \overline{\psi} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(F_{u_{x_k}} \overline{\psi} + F \varphi_i \right). \tag{63}$$

Зауважимо також, що при $n = 1$, то співвідношення (61) набирає вигляду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(F_{u_x} \overline{\psi} + F \varphi \right) = 0 ,$$

тобто

$$F_{u_x} \overline{\psi} + F \varphi = \mathrm{const} \tag{64}$$

вздовж кожної екстремалі $u = u(x)$. Інакше кажучи, співвідношення (64) є першим інтегралом системи рівнянь Ейлера, що відповідає функціоналу

$$\int_a^b F\left(x,u,u'\right)\mathrm{d}x .$$

Якщо цей функціонал інваріантний відносно сукупності перетворень, залежних від ρ параметрів, то відповідна йому система рівнянь Ейлера має ρ лінійно незалежних перших інтегралів виду (64). Це є частинний випадок теореми Нетер, розглянутий у пп. 6.2.2.

Нехай деякий функціонал $\int\limits_G F(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})\mathrm{d}x$ є інваріантним відносно групи перетворень, залежних не від кількох параметрів, а від певної кількості довільних функцій. Тоді справедлива друга теорема Нетер, згідно з якою між лівими частинами рівнянь Ейлера, що відповідають варіаційній задачі, яка є інваріантною відносно групи перетворень, залежних від ρ довільних функцій, існує ρ тотожних співвідношень, тобто ρ цих рівнянь є наслідками інших.

Найпростішим прикладом такої інваріантності є параметричні задачі. Дійсно, перетворення, які залишають інваріантною відповідну варіаційну задачу, – це є всі можливі заміни параметра. У випадку параметричної задачі на площині розглядається функціонал

$$\int_a^b F(t,x,y,x',y')\mathrm{d}t , \tag{65}$$

інваріантний відносно перетворень

$$t = t(\tau), \quad x = x, \quad y = y .$$

Група цих перетворень залежить від однієї довільної функції $t(\tau)$, тому між лівими частинами рівнянь Ейлера, що відповідають цій задачі

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'} = 0 \quad \text{і} \quad F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y'} = 0 ,$$

має бути одне тотожне співвідношення. Дійсно, в цьому разі справедлива рівність

$$x'\left(F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}\right) + y'\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y'}\right) = 0 ,$$

яка доводиться безпосередньою перевіркою.

Тут не наводиться доведення теореми Нетер для груп перетворень, залежних від довільних функцій, і не виписуються у загальному вигляді співвідношення між рівняннями Ейлера, існування яких стверджує друга теорема Нетер.

НАРИС 7

ЗАДАЧІ З ОБМЕЖЕННЯМИ. ІСТОРІЯ ДОВЕДЕННЯ ПРАВИЛА МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА. МАЙЕР, БОЛЬЦА, БЕРТРАН, ШЕРРЕР, ТУРКСМА, ЕМЕРІХ, ХАН, АДАМАР, МАКШЕЙН, ЛЮСТЕРНІК

> *Наука за визначенням, створена, щоб бути переверщеною.*
>
> П. Бурдьє

Наприкінці XIX – початку XX ст. була створена теорія поля екстремалей, яка являла собою зручний апарат для перенесення результатів Ейлера, Лежандра, Гамільтона, Якобі, Веєрштрасса на загальні варіаційні задачі (див. нарис 6), серед яких особливо важливим класом є задачі з обмеженнями – ізопериметрична, задачі Лагранжа, Майера і Больца.

У другій половині XIX ст. розв’язанню варіаційних задач з обмеженнями присвячувалася велика кількість робіт. Вперше був виділений особливий випадок в ізопериметричній проблемі. У 1900 р. А. Кнезер сформулював «виправлене правило множників Лагранжа». Незабаром в роботах Г. Ешеріха і Г. Хана були виявлені нормальні і анормальні випадки в задачі Лагранжа.

7.1. Ізопериметрична проблема. Доведення закону взаємності

> *Доведено до Аристотеля, бо він користується цим, як відомим, а потім більш повно – Архімедом і Зенодором, що серед ізопериметричних фігур найбільш містким є коло, а серед ізопіфанних – куля.*
>
> Симплікій

У 1744 р. в роботі «Метод знаходження кривих ліній, що мають властивості максимуму або мінімуму, або розв’язання ізопериметричної задачі, взятої в найширшому сенсі» [Эйлер, 1934] Л. Ейлер розглянув таку ізопериметричну проблему: знайти екстремум інтеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

в класі кривих, на яких інтеграл $K = \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y, y')\mathrm{d}x$ набирає заданого значення. Він довів так званий закон взаємності - для розв’язання задачі потрібно шукати безумовний екстремум інтеграла

$$\alpha J + \beta K,$$

де α і β - сталі [Эйлер, 1934, с. 343].

Ось як сам Ейлер пише про свій метод [Эйлер, 1934, с. 427]: «Спосіб розв’язання зводиться до того, щоб розгорнути всі загальні властивості разом з виразом максимуму або мінімуму кожну окремо, потім помножити кожну на довільну сталу і добутки зібрати в одну суму». У цих словах можна побачити зародок методу множників Лагранжа.

Доведення закону взаємності Ейлер провів методом ламаних. В його основу покладена ідея, вперше висловлена Я. Бернуллі: щоб вирішити ізопериметричну проблему, необхідно надати приросту не одній, а двом сусіднім ординатам.

Леонард Ейлер,
нім. Leonhard Euler
(1707 - 1783)

Жозе́ф-Луї́ Лагра́нж,
фр. Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

Якоб Бернуллі,
Jacob Bernoulli
(1655-1705)

У 1842 р. Ж. Бертран дав нове доведення закону взаємності, яке грунтувалося на методі варіацій [Bertrand, 1842]. Він записує першу варіацію δJ в вигляді

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \right) \delta y \, \mathrm{d}x + f_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} . \qquad (1)$$

Для задачі із закріпленими границями позаінтегральні члени в (1) перетворюються у нуль. Позначивши $f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = u(x)$, Бертран отримав

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} u(x) \delta y \, \mathrm{d}x.$$

Аналогічно він отримав

$$\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \varphi_{y'} = v(x), \quad \delta K = \int_{x_0}^{x_1} v(x) \delta y \, \mathrm{d}x.$$

Жозеф Луї Франсуа
Бертран,
фр. Joseph Louis François
Bertrand
(1822-1900)

Далі Бертран зауважив [Bertrand, 1842, с. 55]: «Потрібно, щоб виконувалася рівність $\delta J = 0$ для всіх значень δy, для яких $\delta K = 0$. Очевидно, що цю умову можна задовольнити, поклавши $u = kv$, де k - стала».

Умову Бертрана $u = kv$ можна подати у вигляді

$$f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = k \left(\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \varphi_{y'} \right),$$

звідки видно, що вона є рівнянням Ейлера для задачі про екстремум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1}(f-k\varphi)\mathrm{d}x\,.$$

Потім Бертран додає [Bertrand, 1842, с. 56]: «Слід ще довести, що умова $u=kv$ є необхідною». Припустивши, що $u/v=f(x)$, де $f(x)$ не є сталою, він приходить до протиріччя, що повністю доводить теорему.

Особливий випадок, коли $v=0$ і тому відношення u/v не має сенсу, Бертран не відмічає. Зазначимо, що в цьому разі на шуканій кривій виконується рівняння

$$\varphi_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{y'}=0,$$

тобто екстремаль інтеграла J є водночас естремаллю інтеграла K. Цей особливий випадок вперше виділив Веєрштрасс.

Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс, нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897)

На доведення Бертрана майже немає посилань в подальшій математичній літературі. Навпаки, метод, яким довів закон взаємності Веєрштрасс, ліг в основу всіх наступних робіт в цій області.

Веєрштрасс досліджував ізопериметричну задачу в параметричній формі. Необхідно знайти екстремум інтеграла

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F\left(x,y,x',y'\right)\mathrm{d}t$$

за умови, що інтеграл K зберігає стале значення:

$$K=\int_{t_0}^{t_1}\Phi\left(x,y,x',y'\right)\mathrm{d}t=C.$$

Для задачі із закріпленими кінцями, перша варіація δJ має вигляд

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}G\cdot\left(x'\eta-y'\xi\right)\mathrm{d}t \tag{2}$$

(див. рівність (12) в нарисі 5). Для доведення закону взаємності в ізопериметричній проблемі Веєрштрасс представив варіації ξ і η в такій формі:

$$\xi=ku+k_1u_1,\quad \eta=kv+k_1v_1, \tag{3}$$

де u,u_1,v,v_1 - диференційовні функції від t, що не містять сталих k і k_1.

В доведенні Веєрштрасса виділимо дві частини. В першій він доводить, що сталі k і k_1 завжди можна підібрати так, щоб при варіаціях (3) значення інтеграла K не змінювалось.

Для інтеграла K подамо першу варіацію у вигляді (2):

$$\delta K = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma \cdot \left(x'\eta - y'\xi\right) \mathrm{d}t. \qquad (4)$$

Замінюючи ξ, η за формулами (3) і об'єднуючи члени з k і k_1, Веєрштрасс отримує

$$x'\eta - y'\xi = k(x'v - y'u) + k_1(x'v_1 - y'u_1).$$

Застосувавши ці формули і використовуючи ізопериметричну умову в формі $\delta K = 0$, з (4) дістаємо рівність

$$\delta K = k \cdot \int_{t_0}^{t_1} \Gamma \cdot (x'v - y'u) \mathrm{d}t + k_1 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \Gamma \cdot (x'v_1 - y'u_1) \mathrm{d}t = 0. \qquad (5)$$

З неї випливає

$$k_1 = -k \cdot \frac{\int_{t_0}^{t_1} \Gamma \cdot (x'v - y'u) \mathrm{d}t}{\int_{t_0}^{t_1} \Gamma \cdot (x'v_1 - y'u_1) \mathrm{d}t}, \qquad (6)$$

якщо вважати, що знаменник цього виразу не дорівнює нулю.

Веєрштрасс припускає протилежне. Нехай для кожного набору u, u_1, v, v_1

$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma \cdot (x'v_1 - y'u_1) \mathrm{d}t = 0.$$

Звідси $\Gamma(x, y, x', y') = 0$. Це є рівняння Ейлера для задачі на екстремум інтеграла K. Веєрштрасс пише [Weierstrass,1894–1927, т. 7, с. 245]: «Якщо на шуканій кривій інтеграл K досягає максимуму або мінімуму, то, взагалі кажучи, неможливо криву варіювати так, щоб інтеграл K зберігав своє значення. Це особливий випадок. Тому потрібно обов'язково прийняти, що шукана крива не є розв’язком диференціального рівняння $\Gamma = 0$».

Так вперше був виділений особливий випадок в ізопериметричній проблемі.

У другій частині доведення Веєрштрасс записує першу варіацію δJ у вигляді (5). Тоді із умови $\delta J = 0$ відразу маємо

$$k \int_{t_0}^{t_1} G \cdot (x'v - y'u) \mathrm{d}t + k_1 \int_{t_0}^{t_1} G \cdot (x'v_1 - y'u_1) \mathrm{d}t = 0.$$

Вейерштрасс замінює в цьому виразі k_1 через k за формулою (6), звідки відразу ж виходить рівність

$$\frac{\int\limits_{t_0}^{t_1} G\cdot(x'v-y'u)\,\mathrm{d}t}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \Gamma\cdot(x'v-y'u)\,\mathrm{d}t}=\frac{\int\limits_{t_0}^{t_1} G\cdot(x'v_1-y'u_1)\,\mathrm{d}t}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \Gamma\cdot(x'v_1-y'u_1)\,\mathrm{d}t}.$$

У ній, як зазначає Веєрштрасс, зліва містяться тільки u і v, справа – тільки u_1 і v_1. Отже, обидві сторони дорівнюють одній сталій λ. Звідси

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} G\cdot(x'v-y'u)\,\mathrm{d}t=\lambda\int\limits_{t_0}^{t_1} \Gamma\cdot(x'v-y'u)\,\mathrm{d}t$$

і, отже,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (G-\lambda\Gamma)\cdot(x'v-y'u)\,\mathrm{d}t=0. \tag{7}$$

Нарешті Веєрштрасс так формулює доведену теорему: *якщо взагалі є крива, що дає максимум або мінімум інтегралу J за умови, що інтеграл K зберігає стале значення, то існує така стала λ, що координати довільної точки кривої задовольняють рівняння* (7).

Веєрштрасс доводить, що теорему неважко поширити на випадок, коли кілька інтегралів $K_1, K_2, \ldots, K_m$ приймають сталі значення. У цьому разі замість (3) для варіацій ξ і η він записує рівності

$$\xi=Ku+K_1u_1+\ldots+K_mu_m,\quad \eta=Kv+K_1v_1+\ldots+K_mv_m. \tag{8}$$

За свідченням Больца [Bolza, 1909, с. 462], розглянуте доведення Веєрштрасса містилося вже в його лекціях 1877 р. Перша публікація належить П. Дюбуа-Реймону.

У 1879 р. Дюбуа-Реймон розглядає [Du Bois-Reymond , 1879] ізопериметричну проблему в тій же постановці, що і Ейлер, тобто в непараметричній формі.

Цікавим є вступ до мемуару, в якому Дюбуа-Реймон писав, що починаючи з Лагранжа закон взаємності обгрунтовується так: з рівностей

$$\delta J=0,\quad \delta K=0$$

отримують

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta J+C\delta K)\,\mathrm{d}t=0,$$

де стала C підбирається таким чином, щоб інтеграл K дорівнював даному значенню. Дюбуа-Реймон пише [Du Bois-Reymond, 1879, с. 310]: «Якщо це і здається вірним, то залишається все ж відчуття, що більш точне обгрунтування правила не є зайвим».

Ми бачимо тут прагнення до строгості, характерне для варіаційного числення останньої чверті XIX ст., коли лекції Веєрштрасса стали зразком для всіх подальших робіт в цій області.

Доведення закону взаємності, дане Дюбуа-Реймоном, по суті не відрізняється від доведення Веєрштрасса. Аналогічно рівностям (3) Дюбуа-Реймон записує варіацію δy у вигляді

$$\delta y = \delta_1 y + k\delta_2 y.$$

Потім він зазначає, що сталу k завжди можна вибрати так, щоб значення інтеграла K не змінювалося (пор. з першою частиною доведення Веєрштрасса).

Поль Давид Густав Дюбуа-Реймон,
фр. Paul David Gustave du Bois-Reymon (1831 – 1889)

Використовуючи для δK вираз (1) і підставляючи в нього $\delta y = \delta_1 y + k\delta_2 y$, Дюбуа-Реймон отримує

$$\delta K = \int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{y'}\right)\delta_1 y \mathrm{d}x + k\int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{y'}\right)\delta_2 y \mathrm{d}x = 0,$$

звідки

$$k = -\frac{\int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{y'}\right)\delta_1 y \mathrm{d}x}{\int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{y'}\right)\delta_2 y \mathrm{d}x}.$$

Ця рівність аналогічна рівності (6) Веєрштрасса. Особливий випадок, коли знаменник дорівнює нулю, Дюбуа-Реймон не відмічає. Потім він записує умову $\delta J = 0$:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right)\delta_1 y \mathrm{d}x + k\int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right)\delta_2 y \mathrm{d}x = 0,$$

і підставляє в нього отримане значення k (порівняти з другою частиною доведення Веєрштрасса). Звідси Дюбуа-Реймон дістає рівність

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right)\delta_1 y \mathrm{d}x = \sigma\int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{y'}\right)\delta_1 y \mathrm{d}x, \tag{9}$$

де σ - стала (порівняти. з відповідним міркуванням Веєрштрасса, яке привело його до рівності (7), де λ - стала).

З рівності (9) відразу ж виходить рівняння Ейлера для задачі на екстремум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[f(x,y,y')-\sigma\varphi(x,y,y')\right]\mathrm{d}x.$$

Закон взаємності доведений. Це доведення майже без змін увійшло в підручники XX століття. На Веєрштрасса Дюбуа-Реймон не посилався.

7.2. Задача Лагранжа. Проблеми Майера і Больца

Ще Л. Ейлер, крім ізопериметричної проблеми, почав досліджувати екстремальні задачі із складнішими обмеженнями. Він, наприклад, ставив таку задачу [Эйлер, 1934, с. 168]: «шукається крива, що дає найбільше або найменше значення формулі $\int Z\mathrm{d}x$ в тому випадку, коли Z задається через диференціальне рівняння, інтегрування якого не може бути виконане».

Як приклад Ейлер розглянув [Эйлер, 1934, с. 393] задачу про брахістохрону в середовищі, що чинить опір, в якій шукається екстремум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v}}\mathrm{d}x$$

за умови $v'=g+\omega(v)\sqrt{1+y'^2}$, де g - const.

Ця задача Ейлера - частинний випадок задачі, яку пізніше поставив Лагранж в «Аналітичній механіці» [Lagrange, 1788]: знайти екстремум інтеграла

$$J=\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n'\right)\mathrm{d}x \tag{10}$$

в класі кривих, які задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\varphi_\beta\left(x,y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n'\right)=0,\qquad \beta=1,2,\dots,m;\ m<n. \tag{11}$$

В частинному випадку екстремум інтеграла (10) шукається серед кривих, які задовольняють рівняння

$$\varphi_\beta\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n\right)=0. \tag{12}$$

Ці обмеження зараз називаються фазовими, сформульована задача - задачею Лагранжа з закріпленими кінцями. Для її розв’язання Лагранж в «Аналітичній механіці» запропонував такий метод. Треба розглянути функцію

$$F=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\dots+\lambda_m\varphi_m \tag{13}$$

з невизначеними множниками $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_m(x)$ і розв’язати задачу на безумовний екстремум інтеграла $\int_{x_0}^{x_1}F(x)\mathrm{d}x$. Виписуючи для цієї задачі рівняння Ейлера і розв'язуючи їх разом з диференціальними рівняннями (11), завжди можна, на думку Лагранжа, отримати шуканий розв’язок.

Сформульований прийом називається *правилом множників Лагранжа*. Точно таке ж правило для розв’язання скінченновимірних задач було сформульовано Лагранжем дев'ятьма роками пізніше в «Теорії аналітичних функцій» (1797) [Lagrange, 1881].

У «Лекціях про числення функцій» в 1806 р. Лагранж робив спробу довести правило множників [Lagrange, 1867–1892, т. 10, с. 411-419]. Однак, як було відмічено в останній чверті XIX ст., у його міркуваннях була прогалина. Водночас досвід розв’язування конкретних задач не підводив і сформульований Лагранжем прийом широко застосовувався математиками XIX ст., хоча при цьому і висловлювалася думка, що він не є обґрунтованим. У 1885 р. Л. Шеффер писав [Scheffer, 1885, с. 557]: «Лагранж висунув загальне правило, так званий метод множників. Але дане Лагранжем виведення цього правила, виключаючи окремі випадки, абсолютно недостатнє, і досі не вдалося провести кращого обгрунтування в повній загальності».

Йдучи шляхом, вказаним Веєрштрассом для ізопериметричної проблеми, Шеффер довів правило множників для задачі, в якій можна встановити обмеження двох типів: 1) m інтегралів набирають заданих значень; 2) умовні рівняння мають вигляд (12), тобто обмеження фазові. Однак Шеффер в своїй статті нічого не говорить про особливі випадки, і, отже, його доведення є неповним.

Вперше правило множників Лагранжа для задачі Лагранжа з умовами (11) з виділенням особливого випадку довів у 1886 р. німецький математик Крістіан Густав Адольф Майер (1839–1907) [Mayer, 1886].

На початку свого мемуара [Mayer, 1886] Майер вказав, що метод множників хоча і необгрунтований, але в жодній задачі не привів до помилкового результату. «Тому метод Лагранжа частиною математиків розглядається як аксіома, в той час як інша частина вважає за краще всі ті задачі варіаційного числення, для яких невідомий інший метод, просто взагалі ігнорувати. Приєднуючись до Клебша, я сам завжди належав до першої частини і правило множників поклав в основу всіх своїх робіт з варіаційного числення» [Mayer, 1886, с. 74]. На тій же сторінці читаємо: «Хоча я, звичайно, здогадувався про недостатність всіх спроб довести теорію множників Лагранжа, питання стало для мене абсолютно ясним під час усного обговорення його з Шеффером». Далі Майер вказує, що його метод виведення є розвитком методу Шеффера.

Крістіан Густав Адольф Майер,
нім. Christian Gustav Adolph Mayer
(1839 - 1907)

Підкреслимо ту обставину, що сам Майер зазначив неповноту свого доведення [Mayer, 1886, с. 79]: «Мій висновок припускає за умовчанням, що немає системи розв’язків $v_1, v_2, \dots, v_m$ диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{m}\left[v_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_r}\right)\right]=0,\quad r=1,2,\dots,m,$$

яка одночасно задовольняла б також $n-m$ диференціальні рівняння

$$\sum_{r=1}^{m}\left[v_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_s}\right)\right]=0,\quad s=m+1,\dots,n».$$

Так вперше був виділений особливий випадок в задачі Лагранжа.

У 1896 р. Б. Турксма опублікував [Turksma, 1896] ще одне доведення правила множників. Він заявляв [Turksma, 1896, с. 33], що не знав доведення Майера і «дістався мети іншим шляхом, тому корисно опублікувати новий метод». У доведенні Турксма також є особливий випадок, на який воно не поширюється.

З розвитком варіаційного числення вчені в своїх доведеннях все частіше почали помічати той особливий випадок, про який говорив Майер. Першим на це звернув увагу професор математики з Віденського університету Густав Ешеріх (1849 - 1935) в ряді мемуарів, надрукованих в останні роки XIX ст. У 1899 р. він назвав [Escherich, 1899] головним той випадок, коли рівняння

$$\sum_{k=1}^{m}\left[r_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(r_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}\right)\right]=0,\quad i=1,2,\dots,n$$

мають єдиний розв’язок

$$r_1(x)\equiv 0,\ r_2(x)\equiv 0,\dots,\ r_m(x)\equiv 0.$$

Пізніше, у 1901 р., Ешеріх вказав [Escherich, 1901] на те, що всі дослідження з варіаційного числення обмежуються головним випадком. Він довів, що пошук екстремуму інтеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(x,x',y,y',\dots,y^{(n)}\right)\mathrm{d}t$$

завжди приводить до головного випадку. Інша справа вже при дослідженні ізопериметричної проблеми. Ешеріх зазначає, що на цю обставину звернув увагу Веєрштрасс, і дорікає Шефферу, що той не відзначив у своїй роботі особливий випадок.

Наступний етап у розвитку методу множників Лагранжа полягає в переході до «виправленого правила Лагранжа», коли як функцію F замість (13), як було у Лагранжа, розглядають

$$F=\lambda_0 f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\dots+\lambda_m\varphi_m,$$

де функція f входить у вираз для F з множником λ_0. Цей результат отриманий А. Кнезером на основі робіт Майера.

У 1878 р. Майер сформулював [Mayer,1878] варіаційну проблему, яка носить його ім'я: треба так вибрати $n+1$ функцій $y_0,y_1,\dots,y_n$, щоб виконувалися диференціальні рівняння

$$\varphi_\beta\left(x, y_0, y_1, \ldots, y_n, y_0', \ldots, y_n'\right) = 0, \quad \beta = 0,1,2,\ldots,m; \ m < n$$

і функція y_0 в точці $x=b$ мала максимум або мінімум (причому, в точці $x=a$ всі функції приймають задані значення, в точці $x=b$ всі функції, крім y_0, приймають задані значення).

Майер називає свою проблему найзагальнішою варіаційною проблемою, вказуючи, що задача Лагранжа є її частинним випадком. Однак задача Майера ставилася вже Лагранжем. Лагранж писав [Laguerre, 1898–1905, т. 10, с. 419]: «Можна вимагати, щоб функція, задана умовним рівнянням, сама була максимальна або мінімальна».

У 1895 р. Майер опублікував статтю [Mayer, 189], присвячену правилу множників Лагранжа. Він зазначає, що в доведеннях правила множників (його і Турксма) для задачі Лагранжа є особливі випадки. Далі він вказує, що для задачі Майера можна вже без всяких прогалин довести теорему: існують такі функції $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, що

$$\sum_{\beta=1}^{m}\left[\lambda_\beta \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda_\beta \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial y_i'}\right)\right] = 0, \quad i = 0,1,2,\ldots,n. \tag{14}$$

Звичайно, Майер вважав, що не всі λ_β є тотожними нулями, але цього не обумовлював.

Згідно з Майером, його рівняння симетричні відносно функцій $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Тому за аналогією з правилом Ейлера для ізопериметричної проблеми він називає свою теорему законом взаємності.

До задачі Лагранжа Майер свою теорему не застосував. Це зробив Кнезер в 1900 р. в згаданому підручнику з варіаційного числення [Kneser, 1925]. Він підійшов до правила множників таким чином.

Розглянемо окремий випадок задачі Майера, коли умовне рівняння $\varphi_0 = 0$ має форму

$$y_0 = \int_a^x f\left(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'\right)\mathrm{d}x;$$

функція y_0 повинна мати екстремум в точці $x = b$, тобто шукається екстремум інтеграла

$$\int_a^b f\left(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'\right)\mathrm{d}x.$$

Отже, маємо задачу Лагранжа.

Застосувавши закон взаємності Майера (14), Кнезер отримує з першого рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}x} = 0, \text{ тобто } \lambda_0 = \mathrm{const}.$$

Нехай $\lambda_0 \neq 0$. Тоді можна записати

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = l_1, \dots, \frac{\lambda_m}{\lambda_0} = l_m$$

і отримати функцію F у вигляді (13):

$$F = f + l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \dots + l_m\varphi_m.$$

Далі Кнезер пише [Kneser,1925, с. 243]: «Випадок $\lambda_0 = 0$ слід розглядати як виняток».

Так в питання про правило множників Лагранжа була внесена ясність. Австрійський математик Ганс Хан (1879-1934), відомий роботами з теорії функцій і функціонального аналізу, в 1902 р. писав [Hahn, 1902, с. 325]: «Метод множників, що носить ім'я Лагранжа, як відомо, був довгий час позбавлений доведення ... Першим доведенням ми зобов'язані Майеру ... Врешті-решт, в підручнику Кнезера доведення Майера має таке викладення, яке здатне встояти за будь-якої критики».

Ганс Хан,
нім. Hans Hahn
(1879-1934)

Кнезер не дав ніяких вказівок на те, як розв'язувати варіаційні задачі в разі, коли $\lambda_0 = 0$. Подальшим просуванням теорія зобов'язана Г. Хану.

У статті [Hahn, 1904], опублікованій у 1904 р., Хан записав лагранжіан, у вигляді

$$L = \lambda_0 f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_m\varphi_m,$$

де λ_0 - стала, і вказав, що при $\lambda_0 \neq 0$ маємо звичайне правило Лагранжа. Після робіт Кнезера и Хана множник λ_0 в лагранжіані затвердився в математичній літературі.

Хан ввів поняття нормальної екстремалі: якщо в інтервалі (a, b) екстремаль задовольняє умови

$$\sum_{\beta=1}^{m}\left[\lambda_\beta \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_\beta \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i'}\right)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{15}$$

то Хан назвав її анормальною в (a, b), причому вказав, що (15) виходить із закону взаємності Майера (14) при $\lambda_0 = 0$ і що це та сама умова, яку у 1899 р. Ешеріх виділив як особливий випадок.

Хан вперше встановив зв'язок між особливим випадком в задачі Лагранжа і особливим випадком, вказаним Веєрштрассом в ізопериметричній проблемі. Йдеться про те, чи завжди в задачі на умовний екстремум можна перейти від розглядуваної екстремалі до сусідньої екстремалі, на якій виконуються умовні рівняння (як писав Веєрштрасс: чи завжди можна перейти до такої екстремалі, на якій інтеграл K має стале значення?).

Хан розглядає задачу, в якій інтеграл

$$K=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$$

повинен приймати задане значення. Він пише [Hahn, 1904, с. 167]: «Якщо задане значення K дорівнює відстані між двома точками, то наша екстремаль має збігатися з екстремаллю інтеграла K, тобто вона на (t_0,t_1) є анормальною. Оскільки ця крива взагалі не може варіюватися допустимим чином, то наша ізопериметрична проблема не має сенсу». Далі Хан наводить приклад, коли екстремаль частково анормальна.

Так, на зламі XIX і XX століть були виділені нормальний і анормальний випадки в задачі Лагранжа. Посилаючись на опубліковану в 1904 р. роботу Хана, відомий американський фахівець в області варіаційного числення Г. Блісс (1876-1951) писав [Блисс,1950, с. 260]: «З того часу різні доведення основних теорем для задачі Лагранжа проводилися в припущенні, що розглядувана крива E є: нормальною у всякому частинному інтервалі, або в дещо сильнішому припущенні, що крива E має продовження, нормальне на кожному частинному інтервалі».

Задачі Лагранжа і Майера були в центрі уваги математиків, які працювали в області варіаційного числення, не тільки в XIX ст., а й у першій половині XX ст.

У 1913 р. була поставлена ще одна варіаційна проблема - задача Больца. Гільберт в 1906 р. довів [Hilbert, 1906б] правило множників для задачі Майера з закріпленими кінцями. Розвиваючи його методи німецький математик Оскар Больца (1857-1942), який працював тоді в Чиказькому університеті, в 1907 р. розглянув [Bolza, 1907] загальніший випадок «змішаних умов і змінних кінцевих точок».

Больца сформулював задачу так: шукається екстремум інтеграла

Давид Гільберт,
нім. David Hilbert
(1862–1943)

Оскар Больца,
нім. Oskar Bolza
(1857-1942)

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n'\right)\mathrm{d}t \qquad (16)$$

серед кривих, які задовольняють p диференціальних рівнянь

$$\varphi_\alpha\left(y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n'\right)=0,\quad \alpha=1,2,\dots,p \qquad (17)$$

і q рівнянь виду

$$\psi_\beta\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right)=0,\qquad \beta=1,2,\dots,q, \qquad (18)$$

в той час як координати кінців $(y_{10},\dots,y_{n0})$ і $(y_{11},\dots,y_{n1})$ задовольняють r рівнянь

$$\chi_\gamma\left(y_{10},\dots,y_{n0},y_{11},\dots,y_{n1}\right)=0,\qquad \gamma=1,2,\dots,r. \qquad (19)$$

У 1913 р. Больца сформулював [Bolza, 1913] задачу, яка носить зараз його ім'я. Він зазначає, що його увага до анормального випадку, який виникає при дослідженні варіаційних задач з обмеженнями, була привернута підручником Ж. Адамара з варіаційного числення [Hadamard, 1910], опублікованим у 1910 р.

Жак Соломон Адамар, фр. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Дійсно, в цьому підручнику Адамар тричі виділяє особливий випадок: в задачі на умовний екстремум функцій скінченної кількості змінних, в ізопериметричній проблемі і в задачі Лагранжа. Таким чином, завдяки багатьом вченим (Майер, Кнезер, Ешеріх, Хан, Адамар і ін.) в першому десятилітті XX ст. була виявлена обмеженість техніки варіаційного числення. Вся теорія будувалася в припущенні, що шукана екстремаль включена в поле екстремалей, а цей факт має місце тільки для нормальних кривих. І в той же час не був знайдений критерій, що дозволяє легко розрізняти нормальні і анормальні дуги.

У статті 1913 р. [Bolza, 1913] Больца зазначає, що протиставлення нормального і анормального випадків, зроблене Адамаром, навело його на думку «точніше вивчити анормальний випадок» [Bolza, 1913, с. 431]: «Щоб отримати достатньо загальну вихідну точку зору для порівняння проблем Лагранжа і Майера, я хочу так узагальнити задачу, щоб обидві тільки що названі проблеми стали її окремими випадками».

Замість інтеграла (16) Больца запропонував розглянути вираз

$$\int_{t_0}^{t_1} f\left(y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n'\right)\mathrm{d}t + G\left(y_{10},\dots,y_{n0},y_{11},\dots,y_{n1}\right). \qquad (20)$$

Задача Больца полягає в тому, щоб знайти криву, що задовольняє умови (17)–(19) і дає екстремум сумі (20).

Статті Больца і його підручник [Bolza, 1909], виданий в Чикаго у 1904 р., значно вплинули на формування Чиказької математичної школи. Її представники (Г. Блісс, М. Морс, Г. Мієрс, Л. Грейвс і ін.) працювали над пошуком необхідних і достатніх умов екстремуму в задачах Лагранжа, Майера і Больца. Підсумки цього циклу робіт підвів Г. Блісс в згаданій вище монографії (1946) [Блисс, 1950]. У ній зазначалося, що теорію вдається побудувати тільки для нормальних кривих.

Едвард Джеймс Макшейн, англ. Edward James McShane (1904-1989)

Нові ідеї в теорію варіаційних задач з обмеженнями вніс американський математик Е. Макшейн (1904-1989) в 1939 р. [McSchane, 1939]. Він ввів голчасті варіації і застосував теорію опуклості для доведення необхідності умови Веєрштрасса (без припущення про нормальність). Методи Макшейна здалися його сучасникам дуже складними. Вони отримали розвиток тільки за 20 років в теорії оптимального управління, яка була створена у 1956 р. математиками Л.С. Понтрягіним (1908 - 1988) і його колегами В.Г. Болтянським (народ. 1925), Р.В. Гамкрелідзе (народ. 1927), Е.Ф. Міщенко (1922 - 2010) для розв'язання задач, які є важливими для застосувань, але знаходяться поза рамками класичного варіаційного числення.

У 1934 р. з'явилася стаття Л.А. Люстерніка (1899-1981) «Про умовні екстремуми функціоналів» [Люстерник, 1934], де правило множників Лагранжа доводилося для рівностей, які виникають при відображенні одного банахового простору на інший. При цьому описувалася абстрактна ситуація, що охоплює як скінченновимірний випадок, так і задачу Лагранжа. Точніше кажучи, має місце така теорема.

Нехай X і Y - два банахових простори, V - окіл точки $\hat{x}$, $f_0 : V \to R, F : V \to Y$. Припустимо, що f_0 і F неперервно диференційовні в V і при цьому похідна $F'(x)$ відображає X в замкнений підпростір Y. Тоді якщо $\hat{x}$ дає локальний мінімум в задачі

Лазар Аронович
Люстернік
(1899 – 1981)

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0,$$

то для цієї задачі є вірним принцип Лагранжа. Точніше: знайдуться число $\hat{\lambda}_0$ і функціонал $\hat{y}^* \in Y^*$, не рівні одночасно нулю і такі, що для функції Лагранжа задачі $L(x, y, \lambda_0) = \lambda_0 f_0(x) + \left\langle y^*, F(x) \right\rangle$ виконується рівняння

$$L_x(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\lambda}_0) = 0\,. \tag{21}$$

Тут Y^* - спряжений простір, а $\left\langle y^*, y \right\rangle$ позначає значення лінійного функціонала y^* на елементі y (див. [Тихомиров, 1976]).

При цьому, якщо $F'(x)$ є регулярним відображенням, тобто відображає X на все Y, то $\hat{\lambda}_0 \neq 0$, і , здійснюється посилений принцип Лагранжа, коли функція Лагранжа має вигляд $f_0(x) + \left\langle y^*, F(x) \right\rangle$.

Сформульована теорема дозволяє єдиним чином оглянути всю історію необхідних умов екстремуму, про які говорилося вище.

Спочатку застосуємо її до скінченновимірного випадку. Тут

$$X = R^n, \quad Y = R^m, \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Спряжений простір до $Y = R^m$ є простір R^{m*}, ізоморфний R^m, тобто $\hat{y}^*$ задається в цьому разі числами $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$. При цьому співвідношення (21) запишеться в вигляді системи

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\lambda}_0)=0,\quad \hat{\lambda}=(\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m),\quad i=1,\ldots,n,$$

яка і виражає аналітичний сенс принципу Лагранжа.

Якщо ж ранг матриці Якобі $\frac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_j}$ дорівнює m, то це і означає, що відображення F є регулярним, тобто має місце посилений принцип Лагранжа, про який йдеться у всіх підручниках аналізу.

Перейдемо тепер до задачі Лагранжа

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f\left(t,x,\dot{x}\right)\mathrm{d}t\to \mathrm{extr},\quad \Phi\left(t,x,\dot{x}\right)=0,\quad x(t_i)=x_i,\quad i=0{,}1.$$

Ми можемо розглянути її в банаховому просторі $X=C^1\left([t_0,t_1],R^n\right)$ неперервно диференційовних відображень відрізка $[t_0,t_1]$ у R^n. Тоді обмеження представлятимуть два типу рівностей $G(x(\cdot))=0$ і $H(x(\cdot))=0$, де

$$G(x(\cdot))(t)=\Phi\left(t,x(t),\dot{x}(t)\right),$$
$$H(x(\cdot))=\left(x(t_0)-x_0,x(t_1)-x_1\right).$$

Відображення G можна інтерпретувати як відображення X у банаховий простір $Y_1=C\left([t_0,t_1],R^m\right)$ неперервних відображень відрізка $[t_0,t_1]$ у R^m. Відображення H - це лінійне скінченновимірне відображення із X у R^{2n}. Загальне відображення

$$F(x)=\left(G(x),H(x)\right),\quad F:X\to Y,$$

де $Y=Y_1\times R^{2n}$ при природних припущеннях на Ф буде неперервно диференційовним. Питання в тому, чи матиме воно властивість замкненості, присутню в теоремі Люстерника.

Неважко довести, що F є замкненим, якщо відображення $G'(\hat{x}(\cdot))$ переводить X на все Y_1, тобто є епіморфним.

Якщо тепер знову простежити історію необхідних умов в задачі Лагранжа, то виявляється, що всі «анормальні випадки» - це ті випадки, коли порушується регулярність відображення G. Зазвичай в задачі Лагранжа вимагають, щоб матриця $\left(\frac{\partial \Phi_\beta(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))}{\partial x_j}\right)$ мала максимальний ранг. Тоді частину змінних x можна вважати незалежними, а інші виявляться пов'язаними з цими незалежними змінними диференціальним зв'язком.

У підсумку задача Лагранжа набирає такого вигляду:

$$J\left(x(\cdot),u(\cdot)\right)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f\left(t,x,u\right)\mathrm{d}t \to \inf,$$

$$\begin{cases} x=\varphi\left(t,\dot{x},u\right), \\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \end{cases} \tag{22}$$

де $x\in R^n, u\in R^r$, $f:R^n\times R^n\times R^r\to R, \varphi:R^n\times R^n\times R^r\to R^n$.

Задачу (22) називають задачею Лагранжа в понтрягінській формі. Відображення G тут має вигляд

$$G(x(\cdot),u(\cdot))(t)=\dot{x}(t)-\varphi(t,x(t),u(t)).$$

При цьому

$$G'(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))\left[x(\cdot),u(\cdot)\right]=\dot{x}(t)-\varphi_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))x(t)-\varphi_u(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))u(t). \tag{23}$$

В силу теореми існування розв’язку неоднорідної лінійної системи відображення G завжди є регулярним. Це є причиною того, що для задачі Лагранжа в понтрягінській формі принцип Лагранжа завжди виконується. Для задачі ж зі старшими похідними сукупне відображення (G, H), як легко бачити, є регулярним. Звідси випливає результат Ешеріха, згідно з яким в задачі зі старшими похідними має місце лише головний випадок. Нарешті, в ізопериметричних задачах принцип Лагранжа із множником λ_0 завжди справджується через скінченновимірність відображення G.

Таким чином, у всіх розглянутих вище випадках необхідні умови є узгодженими із думкою Лагранжа. У всіх випадках треба скласти функцію Лагранжа з множником при функціоналі, числових множниках при скінченновимірних відображеннях і функціональних множниках при нескінченновимірних, далі треба написати необхідну умову екстремуму для задачі

$$L\to \mathrm{extr}$$

при фіксованих множниках Лагранжа так, начебто змінні є незалежними.

Сформулюємо ще раз загальну варіаційну задачу на умовний екстремум. Треба знайти екстремум функціонала

$$J(y)=\int\limits_a^b f\left(x,y,y'\right)\mathrm{d}x,\quad y=(y_1,y_2,\ldots,y_n), \tag{24}$$

який будемо називати цільовим функціоналом, на множині функцій $y(x)$ із класу неперервно диференційовних вектор-функцій, що задовольняють крайові умови

$$y(a)=y_1,\quad y(b)=y_2 \tag{25}$$

і деякі співвідношення (умови в'язей), які можуть виражатися диференціальними рівняннями

$$g_i\left(x,y,y'\right)=0,\quad j=\overline{1,k}\ \ (k<n),\ \ x\in[a,b], \tag{26}$$

або інтегральними

$$\int_a^b h_i(x,y,y')\mathrm{d}x = L_i, \quad i=\overline{1,s}. \tag{27}$$

Вважається, що функції f, g_i, $j=\overline{1,k}$, h_i, $i=\overline{1,s}$ неперервно диференційовні і крайові умови (25) не протирічать умовам в'язей (26).

Диференціальні співвідношення (26) називаються диференціальними в'язями, а співвідношення (27) – інтегральними (ізопериметричними) в'язями. Відмітимо частинний випадок, коли у співвідношеннях (26) функции g_i не залежать від y'. У варіаційному численні такі в'язі називаються фазовими обмеженнями, а в теоретичній механіці - голономними в'язями.

Сформульована задача загального вигляду являє собою варіаційну задачу на умовний екстремум. Частинний випадок задачі, у якій накладаються тільки диференціальні в'язі (26), а також різні її модифікації, що відрізняються крайовими умовами (а іноді з додатковими інтегральними в'язями (27)), називають задачею Лагранжа. Ця задача була опублікована Ж.Л. Лагранжем у 1788 р. в його «Аналітичній механіці». Задачу (24), (25), (27) з інтегральними в'язями називають ізопериметричною задачею, розглядаючи її як узагальнення класичної задачі визначення серед плоских фігур однакового периметра (ізопериметричних фігур) тієї, що має найбільшу площу.

Розглянемо задачу про розтяг-стиснення пружного стержня постійного перерізу, обидва кінці якого жорстко затиснені (рис. 1).

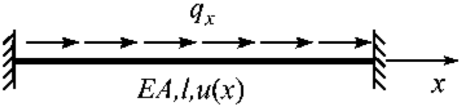


Рис. 1

Функціонал повної потенціальної енергії (цільовий функціонал) для стержня в стані стиску-розтягу має відомий вигляд

$$\Pi(u) = \int_0^l \left[0.5EA(u')^2 - q_x \cdot u\right]\mathrm{d}x. \tag{28}$$

Знаходження екстремалі функціонала (28)

$$\Pi(u) \to \mathrm{extr} \tag{29}$$

при граничних умовах

$$u(0)=0,\ u(l)=0 \tag{30}$$

є елементарною (без накладених додаткових в’язей) задачею Лагранжа. Для розв’язання задачі маємо рівняння Ейлера

$$F'_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F'_{u'} = 0, \tag{31}$$

в якому F – це інтегрант функціоналу (28):

$$F = 0.5EA(u')^2 - q_x \cdot u. \tag{32}$$

Оскільки $F'_u = -q_x$, $F'_{u'} = EAu'$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F'_{u'} = EAu''$, то рівняння Ейлера (31) має вигляд звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$u'' = -\frac{q_x}{EA}. \tag{33}$$

Якщо $q_x = \mathrm{const}$, то загальним розв'язком (33) буде

$$u(x) = C_0 + C_1 x - \frac{q_x}{EA}\cdot\frac{x^2}{2}. \tag{34}$$

Беручи до уваги граничні умови, дістанемо

$$C_0 = 0,\ C_1 = \frac{q_x}{EA}\cdot\frac{l}{2},$$

і остаточно

$$u(x) = \frac{q_x}{2EA}\cdot x(l-x). \tag{35}$$

Вираз (35) є розв'язком задачі Лагранжа (29), (30).

Розглянемо тепер задачу про розтяг пружного стержня розподіленим навантаженням q_x та зосередженою силою P, прикладеною до правого кінця. Лівий кінець стержня жорстко затиснений (рис. 2). Цільовий функціонал для такої задачі матиме вигляд

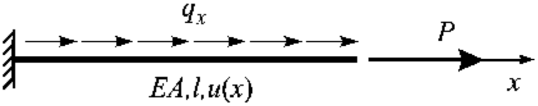


Рис. 2

$$\Pi(u) = \int_0^l \left[0.5EA(u')^2 - q_x\cdot u\right]\mathrm{d}x - P\cdot u(l),$$

або

$$\Pi(u) = J(u) + T(u), \tag{36}$$

де $J(u)$ – це інтегральна частина, а $T(u)$ – термінальна частина мішаного функціонала (36), причому

$$J(u) = \int_0^l \left[0.5EA(u')^2 - q_x\cdot u\right]\mathrm{d}x, \tag{37}$$

$$T(u) = -P\cdot u(l). \tag{38}$$

Граничні умови задаються виразом

$$u(0) = 0. \tag{39}$$

Знаходження екстремалі мішаного функціонала (36), яка задовольняє граничні умови (39) і не підпорядкована жодним обмеженням, є елементарною задачею Больца. Функція Лагранжа в цьому разі збігається з інтегрантом цільового функціонала і має вигляд, заданий виразом (32). Рівняння Ейлера і його загальний розв'язок задаються відповідно виразами (33) і (34).

Загальний розв’язок з урахуванням граничної умови і (39) набирає вигляду

$$u(x) = C_1 x - \frac{q_x}{EA} \cdot \frac{x^2}{2}. \tag{40}$$

Константу C_1 знаходимо з умови трансверсальності

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=l} = -\left.\frac{\partial T}{\partial u}\right|_{x=l}. \tag{41}$$

Маємо

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=l} = EAu'(l), \quad \frac{\partial T}{\partial u} = -P,$$

отже, умова трансверсальності збігається з природною граничною умовою

$$EAu'(l) = P,$$

з якої, враховуючи, що

$$u'(x) = C_1 - \frac{q_x}{EA} \cdot x,$$

знаходимо

$$C_1 = \frac{P + q_x l}{EA}.$$

Нарешті можна записати остаточний розв’язок задачі Больца (36)–(39):

$$u(x) = \frac{P}{EA} \cdot x - \frac{q_x}{EA} \cdot \frac{x}{2}(2l - x). \tag{42}$$

Насамкінець розглянемо задачу про розтяг пружного консольного стержня силою P (рис. 3).

Звісно, таку задачу, як і попередню, можна сформулювати у вигляді елементарної задачі Больца

$$\Pi(u) \to \text{extr}, \tag{43}$$

де знову $\Pi(u) = J(u) + T(u)$, причому інтегральна частина $J(u)$ тепер визначається виразом

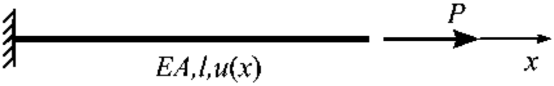


Рис. 3

$$J(u) = \int_0^l 0.5EA(u')^2 \, \mathrm{d}x, \tag{44}$$

а термінальна частина $T(u)$ і граничні умови лишаються такими як і в попередній задачі:

$$T(u) = -P \cdot u(l), \quad u(0) = 0. \tag{45}$$

Слід зазначити, що задачу Больца (43)–(45) можна звести до задачі Майера, якщо покласти

$$w' = (u')^2, \quad w(0) = 0, \tag{46}$$

в результаті чого інтегральна частина мішаного функціонала (43) набере вигляду

$$J(u) = \int_0^l 0.5EAw'\,\mathrm{d}x = 0.5EAw(l)\,, \tag{47}$$

а сама задача (43)–(45) перетвориться у задачу про умовний екстремум термінального функціонала

$$T = 0.5EAw(l) - Pu(l)\,, \tag{48}$$

який шукається на множині функцій, що задовольняють граничні умови

$$u(0) = 0\,,\ w(0) = 0 \tag{49}$$

та умову в'язей

$$w' - (u')^2 = 0\,. \tag{50}$$

Можна перейти до задачі про безумовний екстремум функціонала

$$T^* = 0.5EAw(l) - Pu(l) + \lambda[w' - (u')^2] \tag{51}$$

з лагранжіаном

$$L = \lambda[w' - (u')^2]\,. \tag{52}$$

Функції w і u мають задовольняти рівняння Ейлера

$$L'_w - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L'_{w'} = 0 \tag{53}$$

і

$$L'_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L'_{u'} = 0\,. \tag{54}$$

Оскільки $L'_w = 0;\ L'_{w'} = \lambda$, то з рівняння Ейлера (53) дістанемо

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \lambda = C = \mathrm{const}\,. \tag{55}$$

Далі маємо

$$L'_u = 0;\ \ L'_{u'} = -2\lambda u';\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L'_{u'} = -2\lambda u'' - 2\lambda' u'\,, \tag{56}$$

і оскільки згідно з (55) $\lambda' = 0$, то із (54), (56) маємо рівняння другого порядку відносно функції u

$$u'' = 0\,. \tag{57}$$

З умови трансверсальності

$$L'_{w'}\big|_{x=l} = -T'_w\big|_{x=l} \tag{58}$$

та з урахуванням того, що

$$T'_w = 0.5EA \ \text{ і } \ L'_{w'} = \lambda\,,$$

отримаємо

$$\lambda = -0.5EA, \tag{59}$$

а з умови трансверсальності

$$L'_{u'}\Big|_{x=l} = -T'_u\Big|_{x=l} \tag{60}$$

із урахуванням (59) і того, що

$$T'_u = -P \text{ і } L'_{u'} = -2\lambda u',$$

дістанемо

$$EAu'(l) = P. \tag{61}$$

Отже задача Майера зводиться до диференціального рівняння

$$u'' = 0$$

і граничних умов

$$u(0) = 0; \quad u'(l) = \frac{P}{EA}.$$

Неважко знайти розв'язок цієї задачі:

$$u(x) = \frac{P}{EA} \cdot x.$$

НАРИС 8

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛЕЖАНДРА. ДВОЇСТІ ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ. ДВОЇСТІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ. ПЛЮККЕР, В. ЮНГ, ФЕНХЕЛЬ, ДОНКІН, ДЖ. ГРІН

Читайте, читайте Ейлера – він наш учитель.

П. Лаплас

8.1. Перетворення Лежандра

Французький математик Адрієн Марі Лежандр (1752–1833) у своїх роботах із вивчення диференціальних рівнянь навів так зване дуальне перетворення Лежандра з чудовими властивостями, які зумовили його застосування для розв’язання багатьох проблем аналізу. Це перетворення є фундаментальним у варіаційних основах будівельної механіки. Хоча перетворення було відкрите і використане Л. Ейлером у 1779 р., широко відомим воно стало після того, як Лежандр використав його у 1787 р., саме у зв’язку з цим перетворення отримало ім’я Лежандра. Справедливіше було б, мабуть, називати його перетворенням Ейлера, або перетворенням Ейлера-Лежандра. Перший приклад такого перетворення знайдено в дослідженнях Лейбніца. Узагальненням цього перетворення є перетворення Юнга-Фенхеля, а також відома нерівність Юнга, двоїсті за Юнгом функції.

Леонард Ейлер,
нім. Leonhard Euler
(1707 - 1783)

Готфрід Вільгельм
Ле́йбніц,
нім. Gottfried Wilhelm
von Leibniz
(1646-1716)

Перетворення Лежандра – допоміжний математичний прийом, який полягає в переході від функції на лінійному просторі до функції на спряженому просторі. Воно аналогічно проективній двоїстості і тангенціальним координатам у алгебраїчній геометрії або побудові спряженого банахового простору в математичному аналізі.

За енциклопедичним означенням перетворення Лежандра – це перетворення функції $f(x),\ x=(x_1,\ldots,x_n)$ в нову функцію

$$g(p)=\sum_i p_i x_i(p)-f(x(p)),$$

де $x(p)$ знаходять із системи рівнянь $p=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Ці рівняння можна розв’язати, тобто перетворення Лежандра існує, якщо $\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\| \neq 0$. Перетворення Лежандра є інволютивним: застосування повторно до $g(p)$ дає $f(x)$.

Геометричний сенс перетворення Лежандра полягає в переході від описання поверхні (в $n+1$-вимірному просторі) як геометричного місця точок (x,y) таких, що $y = f(x)$, до описання її як обвідної n-параметричного сімейства дотичних площин $y = px - g(p)$ (p - параметри сімейства).

Нехай спочатку $f(\xi)$ – деяка опукла функція, тобто

$$f''(\xi) > 0. \qquad (1)$$

Для деякого заданого числа p розглянемо пряму $y = p\xi$ (рис. 1). Нехай $\xi = \xi(p)$ – точка, в якій відстань від кривої $y = f(\xi)$ до цієї прямої по вертикалі є найбільшою. Функція $p\xi - f(\xi) = F(p,\xi)$ в точці $\xi = \xi(p)$ має максимум по ξ при фіксованому p. Введемо нову функцію нової змінної p: $H(p) = F(p,\xi(p))$. Точка $\xi(p)$ визначається із умови екстремуму $\partial F/\partial\xi = 0$. Тобто $f'(\xi) = p$. Оскільки $f(\xi)$ є опуклою функцією, така точка $\xi(p)$ тільки одна. (Так само і для угнутої кривої, для якої $f''(\xi) < 0$).

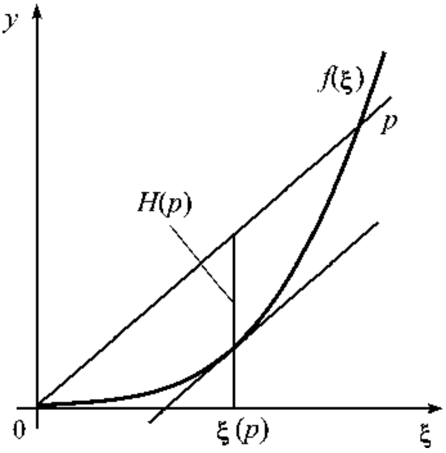


Рис. 1

Таким чином, ми перейшли від змінної і функції ξ, $f(\xi)$ до змінної і функції p, $H(p)$. Нова незалежна змінна

$$p = f'(\xi) \qquad (2)$$

називається *тангенціальною координатою*. Тобто за незалежну змінну приймається кутовий коефіцієнт дотичної, що проходить через дану точку кривої. Оскільки за умовою $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi} = f''(\xi) \neq 0$, то із (2) можна виразити ξ через p. Нова функція

$$H(p) = -f(\xi) + p\xi. \qquad (3)$$

Тут ξ є функцією від p, що задається поданням (2).

Перетворення, яке визначається формулами (2) і (3), називається *перетворенням Лежандра*.

Зауважимо, що геометрично перетворення Лежандра не є точковим перетворенням. Для визначення координат $p, H(p)$ точки M' недостатньо знати координати $\xi, f(\xi)$ точки M, потрібен ще й кутовий коефіцієнт y'_ξ дотичної в цій точці до розглядуваної кривої $y = f(\xi)$. Тим не менше крива перетворюється знову в криву і дотик зберігається. Такі перетворення, що зберігають дотик, мають назву *дотичних перетворень* або *перетворень дотикання* [Фихтенгольц, 1970]. Перетворення Лежандра є їхнім частинним випадком.

Двоїсті функції – це є строго опуклі функції, зв'язані перетворенням Лежандра.

Легко перевірити, що із опуклості функції $f(\xi)$ випливає опуклість функції $H(p)$. Дійсно,

$$\mathrm{d}H = -f'(\xi)\mathrm{d}\xi + p\mathrm{d}\xi + \xi\mathrm{d}p = \xi\mathrm{d}p\,,$$

звідки

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p} = \xi\,, \tag{4}$$

отже,

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}p^2} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi}} = \frac{1}{f''(\xi)} > 0\,,$$

оскільки $f''(\xi) > 0$.

Функція $H(p)$, визначена рівністю (3), називається *двоїстою по Юнгу* до функції $f(\xi)$.

Справедливе таке твердження: перетворення Лежандра є інволютивним. Тобто його квадрат дорівнює тотожному перетворенню: якщо f при перетворенні Лежандра переходить у H, то перетворення Лежандра від H буде знову f.

Вільям Генрі Юнг,
англ. William Henry Young
(1863–1942)

Для розуміння сутності перетворення Лежандра корисно розглянути доведення цього твердження. Дійсно, щоб зробити перетворення Лежандра функції H змінної p, треба, за означенням, розглянути нову незалежну змінну (позначимо її через ξ), скласти функцію

$$\bar{H}(\xi, p) = \xi p - H(p)\,, \tag{5}$$

знайти точку $p(\xi)$, в якій $\bar{H}$ має максимум:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial p} = 0\,, \text{ тобто } H'(p) = \xi\,,$$

і тоді перетворенням Лежандра $H(p)$ буде функція від ξ, рівна $\bar{H}(\xi, p(\xi))$.

Доведемо, що $\bar{H}(\xi, p(\xi)) = f(\xi)$. Справді, $\bar{H}(\xi, p) = \xi p - H(p)$ має простий геометричний зміст: це є ордината дотичної до графіка $f(\xi)$, що має нахил *p,* при абсцисі ξ (рис. 2). Дійсно, при фіксованому *p* функція $\bar{H}(\xi, p)$ є лінійною функцією від ξ, причому $\frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi} = p$ і при $\xi = \xi(p)$ маємо $\bar{H}(\xi, p) = \xi p - H(p) = f(\xi)$ за означенням $H(p)$.

Зафіксуємо тепер $\xi = \xi_0$ і змінюватимемо p. Тоді значення $\bar{H}(\xi, p)$ будуть ординатами точок перетину прямої $\xi = \xi_0$ з дотичними до графіка $f(\xi)$, що мають різний нахил p. З опуклості графіка випливає, що всі ці дотичні лежать нижче кривої, а тому максимум $\bar{H}(\xi, p)$ при фіксованому $\xi(p_0)$ дорівнює $f(\xi)$ (і досягається при $p = p(\xi_0) = f'(\xi_0)$), що треба було довести.

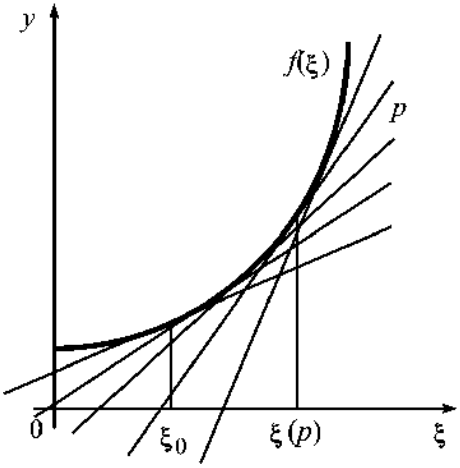


Рис. 2

Можна сформулювати такий наслідок. *Нехай дано сімейство прямих* $y = p\xi - H(p)$*, тоді обвідна має рівняння* $y = f(\xi)$*, де* f *– перетворення Лежандра функції* H .

Таким чином сутність перетворення Лежандра полягає в можливості двоїстого задання кривої – як множини точок і як обвідної сімейства дотичних.

На площині рівняння прямої, що не проходить через початок координат, у прямокутних декартових координатах має вигляд

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{6}$$

Коефіцієнти u і v входять у це рівняння симетрично з координатами точок прямої x і y. Значення коефіцієнтів u і v однозначно визначають пряму на площині. Тому коефіцієнти (числа) u і v можна розглядати як координати прямої. Ці координати u і v називаються *тангенціальними координатами*[1] прямої (неоднорідними тангенціальними координатами прямої). Якщо розглядати однорідне рівняння прямої $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, то числа u_1, u_2, u_3 називаються *однорідними тангенціальними координатами* прямої. Отже, тангенціальні координати - назва для коефіцієнтів у рівнянні прямої, які розглядаються як координати. Якщо фіксувати точкові координати, а u і v вважати змінними то (6) стає рівнянням точки, тобто точки перетину всіх прямих (6). Із симетрії рівняння (6) відносно точкових і тангенціальних координат випливає відповідність (двоїстість) понять і результатів, що стосуються взаємного розташування точок і прямих. Аналогічно визначаються неоднорідні і однорідні тангенціальні координати площини, які задаються відповідно рівняннями $ux + vy + wz + 1 = 0$ і $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$.

---

[1] Лат. *tangens* - род. відм. від *tangentis* - дотичний.

Тангенціальні координати інакше ще називають *лінійними* або *плюккеровими*. Німецький математик і фізик Юліус Плюккер (1801–1865) узагальнив поняття координат шляхом введення тангенціальних і однорідних координат. Ю. Плюккер також істотно розвинув цей підхід. Аналогічно з представленням трьох коефіцієнтів рівняння площини як її змінних координат, він дійшов думки взагалі розглядати сталі, від яких залежить деякий геометричний образ, наприклад дев'ять коефіцієнтів рівняння поверхні другого порядку, як змінні координати цього образу і досліджувати ті чи інші рівняння між ними. Звичайно, тут вже не йдеться про «двоїстість» в буквальному розумінні, яка зумовлюється специфічною властивістю симетрії рівнянь площини і прямої відносно коефіцієнтів і координат. Ю. Плюккер вказав, що криву можна розглядати як сукупність точок або як сукупність дотичних, оскільки дотичні також визначають форму кривої, як і точки (1830).

Юліус Плюккер
нім. Julius Plücker
(1801-1865)

Якщо деяке рівняння $f(u,v)=0$ задає співвідношення між тангенціальними координатами u і v на площині, то тим самим із ∞^2 прямих на площині виділяється ∞^1 прямих, які утворюють множину (сімейство) дотичних (обвідних) до деякої кривої $F(x,y)=0$, тому рівняння $f(u,v)=0$ називається рівнянням кривої $F(x,y)=0$, але не в точкових, а в тангенціальних координатах (рис. 3).

Рівняння, що зв'язує тангенціальні координати дотичної до кривої, називається *тангенціальним рівнянням* цієї кривої. Тангенціальне рівняння плоскої кривої є двоїстим до точкового рівняння цієї кривої.

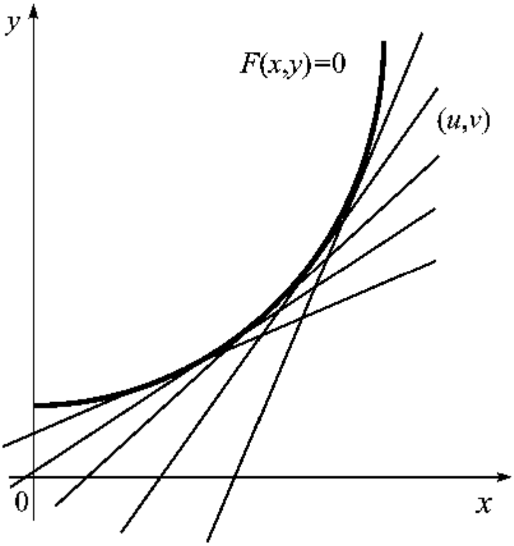


Рис. 3

Якщо задане тангенціальне рівняння кривої $f(u,v)=0$, то точкове рівняння цієї кривої $F(x,y)=0$ можна отримати, виключивши u і v з рівнянь

$$ux+vy+1=0\,,$$

$$f(u,v)=0\,,\quad x\frac{\partial f}{\partial v}-y\frac{\partial f}{\partial u}=0\,. \qquad (7)$$

Обернена задача переходу від рівняння кривої $F(x,y)=0$ у точкових координатах до рівняння кривої $f(u,v)=0$ в тангенціальних координатах вирішується виключенням x і y з рівнянь

$$ux + vy + 1 = 0\,,$$

$$F(x,y) = 0\,,\quad u\frac{\partial F}{\partial y} - v\frac{\partial F}{\partial x} = 0\,. \qquad (8)$$

Перетворення рівняння кривої від точкових координат до тангенціальних може розглядатися як перетворення Лежандра цієї кривої, яке множині точок співставляє обвідну відповідної множини прямих. Координати точки при цьому стають коефіцієнтами рівняння прямої.

Розглянемо, наприклад, функцію $y = x^2$. Перетворенням Лежандра цієї функції є функція $H(p) = \frac{p^2}{4}$. Запишемо рівняння кривої $y = x^2$ у тангенціальних координатах, виключивши з рівнянь (8) x і y. Рівняння $F(x,y) = 0$ має вигляд $x^2 - y = 0$. Із останнього з рівнянь (8) отримаємо $u(-1) - 2vx = 0$, звідки $x = -\frac{u}{2\nu}$. Підставивши цей вираз для x у перше з рівнянь (8), матимемо $u \cdot \left(-\frac{u}{2\nu}\right) + vy + 1 = 0$ і тому $y = \frac{u^2}{2\nu^2} - \frac{1}{v}$. Отримані вирази для x і y підставимо у рівняння $x^2 - y = 0$ і дістанемо $\left(-\frac{u^2}{2\nu^2}\right) - \left(\frac{u^2}{2\nu^2}\right) + \frac{1}{v}$. З останньої рівності після перетворень остаточно дістанемо $v = \frac{u^2}{4}$. Ця функція є перетворенням Лежандра для функції $y = x^2$.

Зауважимо, що тангенціальне рівняння алгебраїчної кривої є алгебраїчним рівнянням. Порядок (степінь) тангенціального рівняння кривої називається класом кривої. Клас кривої 2-го порядку співпадає з порядком цієї кривої. Для кривих вищого порядку клас і порядок, взагалі кажучи, різні.

За означенням перетворення Лежандра, $F(p,\xi) = p\xi - f(\xi) \le H(p)$ для довільних ξ і p. Звідси випливає

$$p\xi \le f(\xi) + H(p)\,. \qquad (9)$$

Отримана нерівність називається *нерівністю Юнга*. Якщо, зокрема, $f(\xi) = \frac{\xi^2}{2}$, то $H(p) = \frac{p^2}{2}$ і маємо відому нерівність

$$p\xi \le \frac{\xi^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$

для всіх ξ і p.

Якщо $f(\xi) = \frac{\xi^a}{a}$, то $H(p) = \frac{p^b}{b}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ і дістанемо нерівність Юнга

$$p\xi \le \frac{\xi^a}{a} + \frac{p^b}{b}$$

для всіх $\xi > 0$, $p > 0$, $a > 1$, $b > 1$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Аналогічні міркування справедливі і для функцій кількох незалежних змінних. Припустимо, що $f(\xi)$ – опукла функція векторної змінної $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, тобто квадратична форма $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} d\xi, d\xi \right)$ додатно визначена. Тоді перетворенням Лежандра називається функція $H(\mathbf{p})$ векторної змінної $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, визначена рівностями, аналогічними попереднім:

$$H(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, \xi(\mathbf{p})) = \max_{\xi} F(\mathbf{p}, \xi)\,, \quad F(\mathbf{p}, \xi) = (\mathbf{p}, \xi) - f(\xi)\,, \tag{10}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,. \tag{11}$$

Всі наведені міркування без змін переносяться і на цей випадок. Для функцій кількох змінних також має місце нерівність Юнга

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i \le H(p_1, p_2, \dots, p_n) + f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\,, \tag{12}$$

де $p_1, p_2, \dots, p_n$ і $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ визначаються формулами (7) і (8).

У випадку функції двох змінних, якщо $\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)$ і $p_1, p_2, H(p_1, p_2)$ трактувати як координати деяких точок простору, то перетворення Лежандра можна розглядати як перетворення простору (але не точкове). Поверхня, що характеризується функцією $F(\xi_1, \xi_2)$ переходить при цьому в поверхню $H(p_1, p_2)$. Оскільки $p_1, p_2, H, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}$ залежать тільки від $\xi_1, \xi_2, f, \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \frac{\partial F}{\partial \xi_2}$, то перетворення Лежандра зберігає дотик. Як і у випадку функції однієї змінної можна сказати, що перетворення Лежандра дає можливість двоїстого описання поверхні у просторі: як множини точок $\xi_1, \xi_2, F(\xi_1, \xi_2)$ і як обвідної сімейства її дотичних площин.

Функція однієї або кількох змінних називається *однорідною*, якщо вона задовольняє таку умову: при одночасному множенні всіх аргументів функції на один і той самий довільний множник значення функції множиться на деякий степінь цього множника. Тобто для однорідної функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при всіх значеннях $x_1, x_2, \dots, x_n$ і довільному t має виконуватися рівність

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,. \tag{13}$$

Показник k називається *степенем однорідності* функції.

В інших позначеннях: однорідна функція k-того степеня – це є числова функція $f: R_n \to R$, така що для довільного $\mathbf{x} \in R_n$ і довільного $t \in R$ справедлива рівність

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x}).$$

Однорідними є, наприклад, функції $x^2 - 3xy$, $\dfrac{x^3 - y^3 + 2xz^2}{y^2 + xz}$, $\sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$, які мають степені однорідності, відповідно, 2, 1, $2/3$. Степінь однорідності може бути довільним дійсним числом. Так, наприклад, функція

$$x^\pi \cdot \sin\frac{y}{x} + y^\pi \cdot \cos\frac{x}{y}$$

є однорідною функцією степеня π від аргументів x і y.

Запишемо загальний вираз однорідної функції степеня k. Нехай спочатку $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ є однорідна функція нульового степеня, тобто

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Вважаючи $t = 1/x_1$, дістанемо

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Введемо функцію від $n-1$ аргументів:

$$\varphi(u_1, \cdots, u_{n-1}) = f(1, u_1, \cdots, u_{n-1});$$

маємо

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Отже, будь-яка однорідна функція нульового степеня представляється у вигляді функції відношень всіх аргументів до одного з них. Обернене, очевидно, також вірно. Тому наведена рівність дає загальний вираз однорідної функції нульового степеня.

Якщо $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ однорідна функція k-того степеня (і тільки в цьому разі), відношення її до x_1^k буде однорідною функцією нульового степеня, тому

$$\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{x_1^k} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Таким чином, маємо *загальний вираз однорідної функції степеня k*:

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = x_1^k \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Наприклад,

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln(y/x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1 + (y/x)^4}}{(y/x) - 1} \cdot \ln(y/x).$$

Справедлива така *теорема Ейлера про однорідні функції*: *якщо у виразі повного диференціала однорідної функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степеня k*

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

замінити диференціал кожної незалежної змінної на цю змінну, дістанемо функцію $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$*, помножену на степінь однорідності* k *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n = k \cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,. \qquad (14)$$

Справді, при диференціюванні виразу

$$f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n) = t^k f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

по t за правилом диференціювання складної функції матимемо

$$x_1\frac{\partial f}{\partial u_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial u_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial u_n} = k \cdot t^{k-1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,,$$

де $u_i = tx_i$. Прийнявши в цьому виразі $t=1$, дістанемо

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = k \cdot f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,,$$

що і доводить теорему.

Рівність (14) має назву формули Ейлера. Наведена теорема стверджує, що цю рівність задовольняє довільна однорідна функція степеня *k*, яка має неперервні частинні похідні. Покажемо обернене: будь-яка функція, що є неперервною разом зі своїми частинними похідними і задовольняє рівність Ейлера (14), необхідно є однорідною функцією степеня *k*.

Дійсно, нехай $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ така функція. Зафіксуємо довільні значення $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n$ і розглянемо функцію від *t* (при $t>0$):

$$\varphi(t) = \frac{f(t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\cdots,t\overline{x}_n)}{t^k}\,.$$

Ця функція визначена і неперервна при всіх $t>0$. Обчисливши її похідну $\varphi'(t)$ за правилом диференціювання дробу, отримаємо також дріб, чисельник якого дорівнює

$$[f'_{x_1}(t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\ldots,t\overline{x}_n)\overline{x}_1 + f'_{x_2}(t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\ldots,t\overline{x}_n)\overline{x}_2 + \ldots + f'_{x_n}(t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\ldots,t\overline{x}_n)\overline{x}_n]t - k \cdot f(t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\ldots,t\overline{x}_n).$$

Заміна у формулі Ейлера (14) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ на $t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\cdots,t\overline{x}_n$ перетворює цей чисельник у нуль. Отже, $\varphi'(t)=0$ і $\varphi(t)=c=\mathrm{const}$ (при $t>0$). Щоб визначити сталу *c*, у рівності, що визначає $\varphi(t)$, надамо значення $t=1$. Дістанемо

$$c = f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)\,.$$

Отже,

$$\varphi(t) = \frac{f(t\overline{x}_1,t\overline{x}_2,\cdots,t\overline{x}_n)}{t^k} = f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)\,,$$

або

$$f(t\bar{x}_1, t\bar{x}_2, \cdots, t\bar{x}_n) = t^k \cdot f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n),$$

що треба було довести.

Можна сказати, що формула Ейлера так само характеризує однорідну функцію степеня *k*, як і основна рівність (13).

Зазначимо, що теорема Ейлера про однорідні функції має широке застосування в різних областях математики, механіки, фізики. Однорідні функції також застосовуються у економіці для моделювання «масштабованих» явищ.

Теорема Ейлера по суті стверджує справедливість рівності Юнга для однорідних функцій. Дійсно, якщо позначити

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{15}$$

то подання (14) набере вигляду

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (k - 1) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{16}$$

За умови, що детермінант, утворений із похідних

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

не дорівнює нулю, виразимо із (15) x_i через p_i, підставимо у другий доданок правої частини (16) і отримаємо функцію $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Отже,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

− рівність Юнга.

Якщо, наприклад, $f(x) = \frac{x^2}{2}$, рівність (14) має вигляд $x \cdot x = 2 \cdot \frac{x^2}{2}$. Позначивши $p = x$, матимемо $px = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$, $H(p) = \frac{p^2}{2}$ і $px = \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$ при $p = x$.

Якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ − квадратична форма, рівність (14) набирає вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

або

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Запишемо квадратичну форму у вигляді $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, де $\mathbf{A}$ – матриця квадратичної форми. Оскільки $\mathbf{A}$ – симетрична матриця, то $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. За теоремою Ейлера $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2 f(\mathbf{x})$, або $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. Звідки $\mathbf{p}^T = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}$. Тоді $H(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}$. Отже $H(\mathbf{p}) = \frac{1}{4} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}$.

Зауважимо, якщо квадратична форма має вигляд $f(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, то $H(\mathbf{p})=\frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$.

Із останнього прикладу видно, що значення квадратичної форми $f(\mathbf{x})$ і її перетворення Лежандра $H(\mathbf{p})$ у відповідних точках співпадають: $f(\mathbf{x})=H(\mathbf{p})$. Наприклад, для функції $f(x)=\frac{mx^2}{2}$ маємо $p=mx$ і $H(p)=\frac{p^2}{2m}=\frac{mx^2}{2}=f(x)$.

8.2. Двоїсті варіаційні принципи

Найчастіше вихід там, де був вхід.

С.Є. Лец

Відомо, що одна й та сама система рівнянь може бути системою рівнянь Ейлера для різних функціоналів. Наприклад, рівняння аналітичної механіки систем із скінченним числом ступенів свободи можна отримати виходячи із двох різних варіаційних принципів: принципу Гамільтона-Остроградського і принципу Гамільтона-Пуанкаре. В інших розділах механіки також пропонувалися різні варіаційні принципи для одних і тих самих систем рівнянь: принцип Діріхле і принцип Томсона у механіці нестисливої рідини і в електростатиці, принцип Лагранжа, принцип Кастільяно в теорії пружності, принцип максимуму Понтрягіна у варіаційних задачах з обмеженнями тощо. Пізніше стало зрозуміло, що всі такі принципи ґрунтуються на одній простій загальній ідеї – ідеї двоїстості. Ця ідея викладається в даному підрозділі.

Розглянемо задачу про мінімум функціонала $I(y)$ на деякій множині M:

$$\underline{I}=\inf_{y\in M} I(y). \tag{17}$$

Припустимо, що можна побудувати функціонал $\Phi(y,p)$ двох змінних y і p, $y\in M$, $p\in N$, такий, що

$$I(y)=\sup_{p\in N}\Phi(y,p). \tag{18}$$

Тоді вихідну варіаційну задачу можна представити як мінімаксну задачу

$$\underline{I}=\inf_{y\in M}\sup_{p\in N}\Phi(y,p).$$

Вважатимемо, що у цій рівності послідовність обчислення нижньої і верхньої граней можна поміняти:

$$\underline{I}=\sup_{p\in N}\inf_{y\in M}\Phi(y,p).$$

Припустимо, що функціонал $\Phi(y,p)$ вибраний таким, що $\inf\limits_{y\in M}\Phi(y,p)$ легко знаходиться. Позначимо його $J(p)$:

$$J(p) = \inf_{y \in M} \Phi(y, p) .$$

Вихідна задача про обчислення функціонала $I(y)$ еквівалентна задачі про знаходження верхньої грані функціонала $J(p)$ на множині N елементів p:

$$\sup_{p \in N} J(p) = \underline{I} . \tag{19}$$

Варіаційну задачу (19) називають *двоїстою* до вихідної варіаційної задачі (17).

Можна будувати різні двоїсті варіаційні задачі, вибираючи по різному функціонал $\Phi(y, p)$ і множину N. Цей вибір обмежений двома умовами. По-перше, має бути забезпечена можливість міняти послідовність обчислень нижньої і верхньої граней:

$$\inf_{y \in M} \sup_{p \in N} \Phi(y, p) = \sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p) . \tag{20}$$

По-друге, функціонал $J(p)$ має обчислюватися явно.

У варіаційних принципах, названих на початку цього підрозділу, остання умова задовольняється через те, що функціонал $\Phi(y, p)$ береться лінійним по p.

Існують різні достатні умови виконання (20), проте їх перевірка інколи є складнішою, ніж безпосереднє дослідження можливості перестановки нижньої і верхньої граней. Як правило, рівність (20) можна перевірити наведеним нижче способом.

Спочатку покажемо, що для будь-якого функціонала $\Phi(y, p)$ і довільних непустих множин M і N

$$\sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p) \le \inf_{y \in M} \sup_{p \in N} \Phi(y, p) . \tag{21}$$

Справді,

$$\inf_{y \in M} \Phi(y, p) \le \Phi(y, p) . \tag{22}$$

Зафіксуємо будь-який елемент y у правій частині (22). Тоді нерівність (22) означає, що функціонал від p $\inf\limits_{y \in M} \Phi(y, p)$ не перевищує функціонала від p $\Phi(y, p)$. Тому

$$\sup_{p \in N} \inf_{y \in M} \Phi(y, p) \le \sup_{p \in N} \Phi(y, p) . \tag{23}$$

Згідно з (23) функціонал від y $\sup\limits_{p \in N} \Phi(y, p)$ обмежений знизу числом $\sup\limits_{p \in N} \inf\limits_{y \in M} \Phi(y, p)$. Тому це число обмежує знизу також і нижню грань функціонала, тобто справедлива нерівність (21).

Нерівність (21) можна подати також у вигляді

$$\sup_{p \in N} J(p) \le \inf_{y \in M} I(y) . \tag{24}$$

Позначимо через $\tilde{y}$ мінімізуючий елемент вихідної варіаційної задачі (17), а через $\tilde{p}$ – елемент, на якому досягається

$$\sup_{p\in N} \Phi(\tilde{y}, p) .$$

Застосувавши (24), дістанемо оцінку

$$J(\tilde{p}) \le \sup_{p\in N} J(p) \le \inf_{y\in M} I(y) = I(\tilde{y}) . \tag{25}$$

Як правило, є можливість порівняти $J(\tilde{p})$ і $I(\tilde{y})$ і у разі, якщо $J(\tilde{p}) = I(\tilde{y})$, маємо

$$\sup_{p\in N} J(p) = \underline{I} .$$

Відзначимо, що двоїстий варіаційний принцип (19) дозволяє легко будувати оцінки $\underline{I}$ знизу. Нагадаємо, що побудова оцінок $\underline{I}$ зверху є тривіальною, а саме, достатньо обчислювати значення функціонала $I(y)$ на елементах множини *M*. Тоді із означення нижньої грані випливає, що

$$\underline{I} \le I(y) .$$

У разі, коли двоїста варіаційна задача побудована, оцінки $\underline{I}$ знизу можна отримати так само просто. Достатньо обчислювати значення функціонала $J(p)$ на елементах множини N

$$J(p) \le \underline{I} .$$

В деяких випадках не вдається вказати лінійний по p функціонал $\Phi(y, p)$ так, щоб виконувалася рівність (18), і можна гарантувати лише справедливість нерівності

$$\sup_{p} \Phi(y, p) \le I(y) .$$

Тоді із (21) матимемо

$$\sup_{p\in N} J(p) \le \underline{I} .$$

Тому зберігається можливість будувати оцінки $\underline{I}$ знизу.

Істотну роль у конструюванні функціонала $\Phi(y, p)$ відіграють перетворення Юнга-Фенхеля та інші поняття опуклого аналізу, що викладаються нижче.

8.3. Перетворення Юнга-Фенхеля

Візьмемо у R_n двічі неперервно диференційовну функцію $f(x)$ і розглянемо систему нелінійних рівнянь відносно x^i

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = x_i^* , \tag{26}$$

де x_i^* – задані числа. Якщо для деяких значень x_i^* розв'язок системи рівнянь (26) є x^i і у точці x^i гессіан $\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}\right|$ відмінний від нуля, то за теоремою про неявні функції існує окіл O цієї точки, у якому між x^i і x_i^* є взаємно однозначна і неперервно диференційована відповідність

$$x^i = x^i(x_k^*) . \qquad (27)$$

Розглянемо величину

$$f^\times = x_k^* x^k - f(x) . \qquad (28)$$

Вважатимемо, що у (28) x^i виражені через x_k^* за допомогою співвідношень (27). Тоді $f^\times$ буде функцією x_k^*. Вже зазначалося, що вона називається перетворенням Лежандра функції $f(x)$.

Обчислимо, наприклад, перетворення Лежандра квадратичної функції

$$f(x) = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j .$$

Система рівнянь (26) набирає вигляду

$$\frac{\partial f}{x^i} = \frac{1}{2} a_{ij} x^j = x_i^* . \qquad (29)$$

Вважатимемо, що $\det\left\|a_{ij}\right\| \neq 0$. Тоді розв'язок рівнянь (29) запишеться у формі

$$x^i = a^{(-1)ij} x_j^* .$$

Для $f^\times(x^*)$ отримаємо

$$f^\times(x^*) = x_i^* x^i - \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j = \frac{1}{2} x_i^* x^j = \frac{1}{2} a^{(-1)ij} x_i^* x_j^* .$$

Наприклад, нехай $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$, $p > 1$. Легко переконатися, що $f^\times(x^*) = \frac{1}{q}\left|x^*\right|^q$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Якщо $f(x) = \frac{a}{p}|x|^p$, $a > 0$, то $f^\times = a^{1-q}\frac{1}{q}\left|x^*\right|^q$.

Для функції $f = \frac{a}{p}(x_i x^i)^{\frac{p}{2}}$ перетворення Лежандра задається формулою $f^\times = a^{1-q}\frac{1}{q}(x_i^* x^{*i})^{\frac{q}{2}}$.

За побудовою перетворення Лежандра визначене лише у малому околі точки x. Однак, якщо функція є строго опуклою у R_n, то перетворення Лежандра можна зробити у всіх точках R_n. Справді, між $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ і x^i існує взаємно однозначна відповідність: із припущення, що існують дві різні точки x_1 і x_2, у яких значення $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ однакові, випливає $\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_1} - \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_2}\right)\left(x_1^i - x_2^i\right) = 0$, що суперечить умові строгої опуклості функції $f(x)$.

З наведеного вище прикладу видно, що функція $f(x)$ може бути не опуклою (якщо матриця a_{ij} має як додатні, так і від'ємні власні значення), однак перетворення Лежандра визначено у всьому просторі R_n.

Зауважимо, що, наприклад, для функції $f(x) = |x|$. Рівняння (26) має вигляд $\pm 1 = x^*$ і однозначно нерозв'язне. Для функції $|x|$ перетворення Лежандра не має сенсу.

Далі, перетворення Лежандра не визначено для довільної функції першого степеня однорідності, оскільки для неї тотожно $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right| = 0$. Справді, диференціюючи по x^i тотожність Ейлера для однорідної функції першого степеня

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = f,$$

дістанемо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} x^j = 0. \tag{30}$$

Рівність (30) означає, що рядки матриці $\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\|$ лінійно залежні і тому $\det\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\| = 0$.

Відсутність однозначної розв'язності можна бачити безпосередньо на прикладі функції $f = \sqrt{x_i\, x^i}$. Для цієї функції

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_k x^k}} = x_i^*. \tag{31}$$

Із (31) випливає, що x_i^* лежать на сфері одиничного радіусу $x_i^* x^{*i} = 1$, тому між x^i і x_i^* не може бути взаємно однозначної відповідності.

Розглянемо у R_n функцію $f(x)$ і побудуємо функцію $f^*(x^*)$ за правилом

$$f^*(x^*) = \sup_x (x_i^* x^i - f(x)) . \tag{32}$$

Функція $f^*(x^*)$ називається *перетворенням Юнга-Фенхеля* функції $f(x)$. Означення (32) можна переписати також у вигляді

$$-f^*(x^*) = \inf_x (f(x) - x_i^* x^i) . \tag{33}$$

Рівність (33) має простий геометричний зміст. Побудуємо у R_{n+1} графік функції $f(x)$: $y = f(x)$ і графік лінійної функції $y = x_i^* x^i$ (рис. 6). Величина $-f^*(x^*)$ є мінімальною відстанню між ними по вертикалі.

Нехай функція $f(x)$ строго опукла і диференційовна. Тоді нижня грань у (33) досягається у єдиній точці, і у цій точці

$$f^* = x_i^* x^i - f(x) , \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = x_i^* . \tag{34}$$

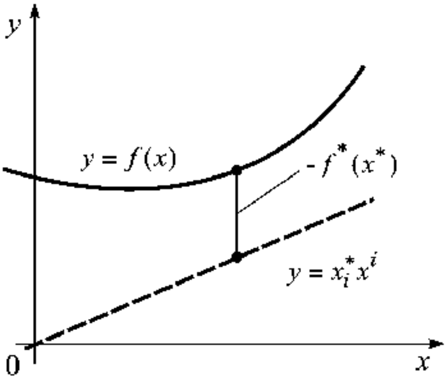


Рис. 6

Отже, для строго опуклих диференційовних функцій перетворення Юнга-Фенхеля збігається з перетворенням Лежандра. Але перетворення Юнга-Фенхеля визначене і для функцій, для яких перетворення Лежандра може не мати сенсу.

Розглянемо, наприклад, перетворення Юнга-Фенхеля функції $f(x) = |x|$. Обчислимо $\inf(|x| - x^* x)$. З рис. 7 видно, що $\inf(|x| - x^* x) = 0$ при $-1 < x^* < 1$ і досягається при $x = 0$. При $x^* = \pm 1$ $\inf(|x| - x^* x) = 0$ і досягається відповідно на додатній і від'ємній півосях. При $x^* < -1$ і $x^* > +1$ функція $|x| - x^* x$ прямує до $-\infty$ відповідно при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$. Отже,

$$f^*(x^*) = \begin{cases} 0, & |x^*| \le 1, \\ +\infty, & |x^*| > 1. \end{cases} \tag{35}$$

Вернер Фенхель
нім. Moritz Werner Fenchel
(1905–1988)

Символічний графік функції f^* зображений на рис. 8.

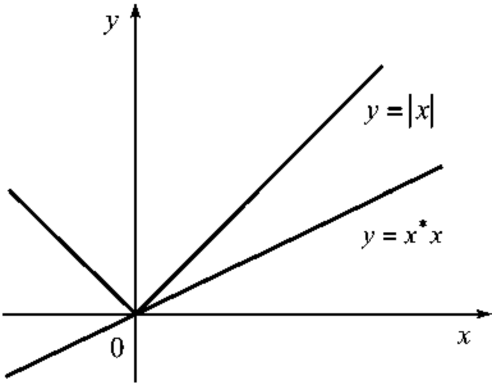


Рис. 7

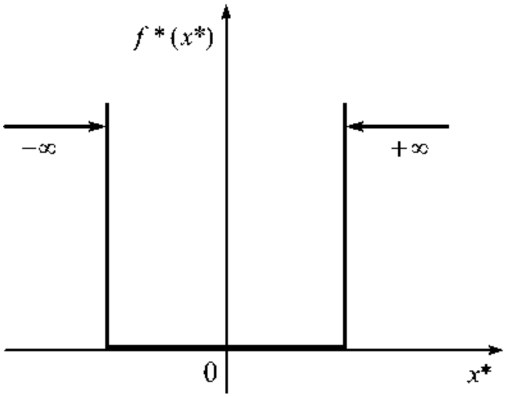


Рис. 8

8.4. Інволютизм перетворення Лежандра. Двоїсті за Юнгом функції. Теорема Донкіна

Інволютизм (інколи називають дуалізм перетворення Лежандра) можна пояснити так.

Нехай задана функція F змінних $x_1, \ldots, x_n$:

$$F = F(x_1, \ldots, x_n).$$

Введемо нові змінні за допомогою перетворення

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}. \tag{36}$$

Вважатимемо, що детермінант (гессіан) матриці других похідних (матриці Гессе) не дорівнює нулю:

$$\det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right] \neq 0.$$

Визначимо нову функцію H таким чином

$$H = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - F. \tag{37}$$

Виразимо x_i через p_i і підставимо в (37). Функція H залежатиме тільки від нових змінних p_i

$$H = H(p_1, \ldots, p_n).$$

Розглянемо тепер нескінченно малу варіацію функції H, що викликана довільними нескінченно малими варіаціями p_i:

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \delta p_i + p_i \delta x_i\right) - \delta F = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i \delta p_i + \left(p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\delta x_i\right]. \tag{38}$$

Оскільки H – функція тільки p_i, можна було б виразити x_i через p_i і, відповідно, варіації x_i через варіації p_i. Проте очевидно, що ця операція зайва, тому що коефіцієнти при δx_i автоматично дорівнюють нулю, адже $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$. Тому із (38) відразу отримаємо

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Інволютизм для функції n змінних можна ілюструвати такою схемою.

	Стара система	*Нова система*
Змінні	$x_1, x_2, \ldots, x_n$.	$p_1, p_2, \ldots, p_n$.
Функції	$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.	$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Перетворення Лежандра

$p_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $H = \sum x_i p_i - F$, $H = H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.	$x_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $F = \sum x_i p_i - H$, $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таким чином, при перетворенні Лежандра нові змінні є частинними похідними старої функції по старих змінних, а старі змінні є частинними похідними нових функцій по нових змінних. Тобто поняття «стара» й «нова» системи цілком еквівалентні.

Залежності $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ і $x_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ у перетворенні Лежандра являють собою відомі у механіці теореми Лагранжа і Кастільяно і визначають відповідні фундаментальні варіаційні принципи механіки.

На те, що $u_0^{\text{доп}}(p)$ можна отримати із $u(\Delta)$ перетворенням Лежандра вперше вказав італійський вчений Кротті (1836-1896) [Crotti, 1877а , с. 1-19, Crotti, 1877б, с. 225].

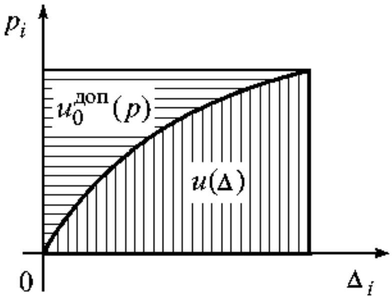


Рис. 9

$$u_0^{\text{доп}}(p) = \sum p_i \Delta_i - u(\Delta).$$

Наприклад, робота внутрішніх сил при одновісному напруженому стані дорівнює сумі питомої потенціальної енергії пружної деформації $u_0(\varepsilon)$ і так званої доповнювальної питомої потенціальної енергії $u_0^{\text{доп}}(\sigma)$ (рис. 10). Ця рівність являє собою перетворення Лежандра.

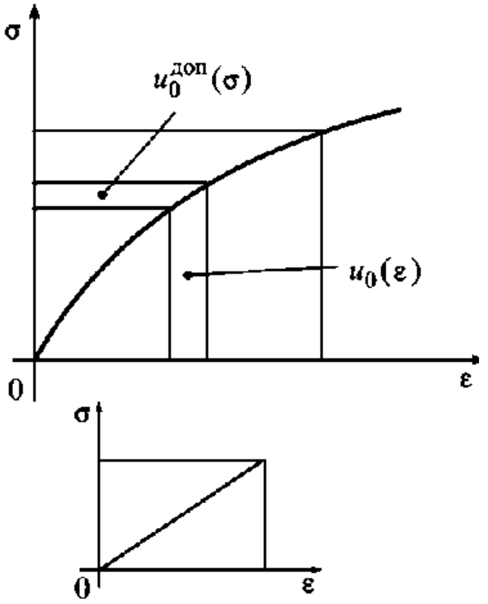


Рис. 10

$$\overbrace{\int_0^{\varepsilon}\sigma d\varepsilon}^{u_0(\varepsilon)}+\overbrace{\int_0^{\sigma}\varepsilon d\sigma}^{u_0^{доп}(\sigma)}=\sigma\varepsilon,$$

де $u_0(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\sigma d\varepsilon,\quad u_0^{доп}(\sigma)=\int_0^{\sigma}\varepsilon d\sigma$ – двоїсті за Юнгом функції.

$$u_0(\varepsilon)+u_0^{доп}(\sigma)=u_0;\ u_0=\sigma\cdot\varepsilon.$$

$$\delta u_0=\frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon+\frac{\partial u_0^{доп}(\sigma)}{\partial\sigma}\delta\sigma+$$

$$+\left(\sigma-\frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)\delta\varepsilon+\left(\varepsilon-\frac{\partial u_0^{доп}(\sigma)}{\partial\sigma}\right)\delta\sigma.$$

Якщо $\sigma=\varepsilon E$, $\frac{1}{2}\varepsilon^2 E+\frac{\sigma^2}{2E}=\sigma\varepsilon$, отримаємо:

	Стара система	*Нова система.*
Змінні	ε	σ
Функції	$u_0(\varepsilon)$	$u_0^{доп}(\sigma)$.

Перетворення Лежандра

$\sigma=\frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon};\ u_0^{доп}(\sigma)=\delta\varepsilon-u_0(\varepsilon).$	$\varepsilon=\frac{\partial u_0^{доп}(\sigma)}{\partial\sigma};\ u_0(\varepsilon)=\delta\varepsilon-u_0^{доп}(\sigma).$
$u_0^{доп}(\sigma).$	$u_0(\varepsilon).$

Джордж Грін,
англ. George Green
(1793 – 1841)

Карло Альберто
Кастільяно
італ. Carlo Alberto
Castigliano (1847–1884)

Залежності $\frac{\partial u_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=\sigma$ і $\frac{\partial u_0^{доп}(\sigma)}{\partial\sigma}=\varepsilon$ в теорії пружності мають назву формул Дж. Гріна і Кастільяно.

Аналогічні висновки можна зробити і при нелінійній залежності $\sigma-\varepsilon$.

Спряженою функцією до функції $f:X\to R$, визначеної на векторному просторі *X,* що знаходиться у двоїстості (відносно білінійної форми $\langle x,y\rangle$) з векторним простором *Y* називається функція на *Y,* що задається співвідношенням [Матем. энцикл., 1985, т.5, с. 82-83]

$$f^*(y) = \sup_{x \in X}\left(\langle x, y\rangle - f(x)\right). \tag{39}$$

Для функції, заданої на *Y*, спряжена функція визначається аналогічно.

Якщо $f(x)$ – гладка, зростаюча на нескінченності швидше лінійної функція, то $f^*(y)$ є перетворенням Лежандра функції $f(x)$.

Для одновимірних строго опуклих функцій означення, рівносильне (39), було дано Юнгом у інших термінах. В. Юнг визначив спряжену функцію до функції

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t,$$

де $\varphi(t)$ неперервна і строго зростає, співвідношенням

$$f^*(y) = \int_0^y \psi(t)\mathrm{d}t,$$

де $\psi(t)$ - функція, обернена до $\varphi(t)$.

Для опуклої функції і спряженої до неї виконується нерівність Юнга

$$\langle x, y\rangle \le f(x) + f^*(y).$$

Спряжена функція – опукла замкнена функція. Оператор спряження $^*\!: f \to f^*$ однозначно відображає сукупність власних опуклих функцій на *X* на сукупність власних опуклих функцій на *Y.*

Поняття перетворення Лежандра може бути дещо розширене, якщо функція f залежить від двох систем змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ (активних і пасивних). У аналітичній механіці відома *теорема Донкіна. Нехай задана деяка функція* $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, *гессіан якої відмінний від нуля:*

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{dx_i dx_k}\right)_{i,k}^n \ne 0,$$

і нехай існує перетворення змінних, викликане функцією $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ *:*

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., n. \tag{40}$$

Тоді існує перетворення, обернене до перетворення (40), *яке теж породжено деякою функцією* $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ *:*

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \quad i = 1, ..., n, \tag{41}$$

при цьому породжуюча функція Y *оберненого перетворення пов'язана з породжуючою функцією* X *прямого перетворення, формулою*

$$Y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X\,. \qquad (42)$$

Якщо функція має параметри $\alpha_1,...,\alpha_m$, *тобто* $X=X(x_1,...,x_n;\alpha_1,...\alpha_m)$, *то* Y *теж має ці параметри, тобто* $Y=Y(y_1,...,y_n;\alpha_1,...\alpha_m)$ *і*

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}=-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j},\quad j=1,...,m\,. \qquad (43)$$

Наприклад: $f(\xi)=\frac{m\xi^2}{2}$; $g(p)=\frac{p^2}{2m}$; $\xi(p)=\frac{p}{m}$.

$$\frac{\partial f}{\partial m}=\frac{\xi^2}{2};\quad \frac{\partial g}{\partial m}=-\frac{p^2}{2m^2}$$

і згідно з теоремою Донкіна,

$$\frac{\partial f}{\partial m}=-\frac{\partial g}{\partial m}.$$

Наведемо доведення теореми Донкіна. Гессіан функції X збігається з якобіаном правих частин у рівняннях (40). Тому завдяки відмінності гессіана від нуля з рівнянь (40) можна виразити змінні $(x_1,\ldots,x_n)$ через $(y_1,\ldots,y_n)$:

$$x_i=f_i(y_1,..,y_n),\quad i=1,...,n\,. \qquad (44)$$

Нехай функція $Y=Y(y_1,...,y_n)$ виражена формулою (42), у якій змінні x_i замінені виразами (44). Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - X\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}y_k + x_i - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\,.$$

Але, згідно з (40), дві суми, які знаходяться в правій частині цієї рівності, взаємно знищуються і, отже, має місце формула (41).

Нехай тепер X включає крім змінних $x_1,...,x_n$ ще і параметри $\alpha_1,...,\alpha_m$. Тоді ці параметри є в прямому перетворенні (40), а тому і в оберненому:

$$x_i=f_i(y_1,...,y_m;\alpha_1,...,\alpha_m),\quad i=1,...,n\,.$$

Функція Y визначається рівністю (42), де x_i замінені на $f_i(y_1,...,y_m;\alpha_1,...,\alpha_m)$, тому

Вільям Фішберн Донкін, англ. William Fishburn Donkin (1814–1869)

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}y_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}=-\frac{\partial X}{\partial \alpha_j},\ j=1,..,m\,.$$

Теорема Донкіна доведена.

Вільям Фішберн Донкін (1814–1869) – англійський математик і астроном, працював професором астрономії в університеті Оксфорду. Цікаво, що наведене фото Донкіна зроблено його другом Льюісом Керолом (Чарльз Ла́твідж (Лю́твідж) До́джсон, Charles Lutwidge Dodgson; 1832 -1898) – відомим англійським письменником, математиком, філософом, логіком і фотографом, який також викладав у Оксфорді. Його найвідоміші твори: «Пригоди Аліси у Дивокраї» (Alice's Adventures in Wonderland) і продовження «Аліса в задзеркаллі» (Through the Looking-Glass), а також поеми «Полювання на Снарка» (The Hunting of the Snark) і «Бурмоковт» (Jabberwocky).

8.5. Двоїсті постановки задач для функціоналів будівельної механіки

Застосуємо міркування щодо побудови перетворення Лежандра до функціоналів. Як приклад розглянемо функціонал

$$\mathrm{v}[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x\,. \tag{45}$$

Позначимо

$$p=F_{y'}(x,y,y')\,, \tag{46}$$

$$H(x,y,p)=-F+py'\,, \tag{47}$$

вважаючи, що в правій частині цієї рівності y' є функцією x, y і p, визначеною поданням (46).

Розглянемо новий функціонал

$$\mathrm{v}[y,p]=\int_{x_0}^{x_1}\left(-H(x,y,p)+py'\right)\mathrm{d}x\,, \tag{48}$$

в якому y і p розглядаються як дві незалежні функції, а y' є похідною від y. Цей функціонал співпадає, очевидно, з вихідним функціоналом (45), якщо за p взяти вираз (46). Напишемо для функціонала (48) рівняння Ейлера і дістанемо

$$-\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0,\quad -\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0. \tag{49}$$

Це є канонічні рівняння для функціонала $\mathrm{v}[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x$.

Доведемо, що функціонали (45) і (48) набирають екстремальних значень на тих самих кривих, тобто доведемо еквівалентність рівнянь (49) і рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0. \tag{50}$$

Тим самим отримаємо нове виведення канонічних рівнянь. Зазначимо, що перехід від функції F змінних x,y,y' до функції H змінних x,y,p є інволютивним, тобто, зробивши перетворення Лежандра для H, дістанемо функцію $F(x,y,y')$. Дійсно, оскільки

$$\mathrm{d}H = -\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + y'\mathrm{d}p,$$

то $\frac{\partial H}{\partial p} = y'$ і

$$-H + p\frac{\partial H}{\partial p} = F - py' + py' = F. \qquad (51)$$

Доведемо еквівалентність варіаційних задач (45) і (48). Для цього треба показати, що мінімум $\mathrm{v}[y,p]$ по p при фіксованому y є $\mathrm{v}[y]$. Дійсно, в такому разі мінімум $\mathrm{v}[y,p]$ при зміні і p і y буде співпадати з мінімумом $\mathrm{v}[y]$. Доведемо, що $\min\limits_{p} \mathrm{v}[y,p] = \mathrm{v}[y]$. Оскільки $\mathrm{v}[y,p]$ не містить p', то для знаходження мінімуму $\mathrm{v}[y,p]$ достатньо знайти мінімум підінтегрального виразу в кожній точці, тобто вважати

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[-H + py'\right] = 0.$$

Звідси

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

З урахуванням (51)

$$-H + p\frac{\partial H}{\partial p} = F,$$

тобто, $\min\limits_{p} \mathrm{v}[y,p] = \mathrm{v}[y]$.

Отже, доведено еквівалентність варіаційних задач (45) і (48), а тому й еквівалентність відповідних їм рівнянь Ейлера (50) і (49).

Ми розглянули функціонали, що залежать від однієї функції. Такі самі міркування справедливі і у випадку n функцій.

Як приклад наведемо функціонал

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} (Py'^2 + Qy^2)\mathrm{d}x,$$

де P і Q − функції від x. Для цього функціонала $p = 2Py'$, $H = Py'^2 - Qy^2$, звідки

$$H = \frac{p^2}{4P} - Qy^2.$$

Відповідні канонічні рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 2Qy, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{2P}.$$

Для розглядуваного функціонала рівняння Ейлера у звичайній формі має вигляд

$$2yQ-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2Py'\right)=0\,.$$

Розглянемо задачу про розтяг стержня дотичним розподіленим навантаженням q_x і силою N_b на правому кінці (рис. 11), статична, геометрична і фізична сторони якої описуються системою рівнянь рівноваги $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=-q_x$, сумісності деформацій $\varepsilon=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ і закону Гука $\sigma=\varepsilon E$.

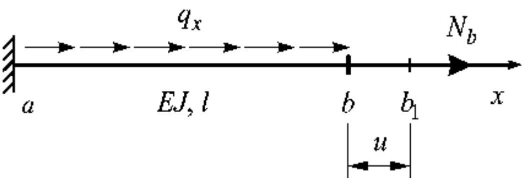


Рис. 11

Запишемо такий функціонал

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{1}{2}\int_a^b EF(u')^2\,\mathrm{d}x-\int_a^b q_x u\mathrm{d}x-N_b u_b$$

при додатковій умові $u_a=0$ і проведемо для нього описане вище перетворення. Тоді

$$p=F_{u'}(x,u,u')=EFu'=N\;;\;H(x,u,p)=-F+pu'=-\frac{1}{2}EF(u')^2+q_x u+Nu'\,.$$

Рівняння Ейлера

$$-\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0;\qquad -\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0;\qquad -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}-q=0;\qquad -\frac{N}{EF}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0;$$

$$\Pi(u,N)=\int_a^b\left(-H(x,u,p)+pu'\right)\mathrm{d}x-N_b u_b=\int_a^b\left(\tfrac{1}{2}EF(u')^2-q_x u-Nu'+pu'\right)\mathrm{d}x-N_b u_b\,.$$

Ураховуючи, що

$$u'=\frac{N}{EF},\quad p=N,\quad pu'=\frac{N^2}{EF}\,,$$

для цієї задачі робота зовнішніх сил

$$A=\int_a^b q_x u\mathrm{d}x+\bar{N}u\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{u}N\Big|_{a_2}^{b_2}\,,$$

$$\int_a^b q_x u\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x=-uN\Big|_a^b+\int_a^b N\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\;;\;q_x=-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x};\;\;-\int_a^b\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x=-uN\Big|_a^b+\int_a^b N\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x=uN\Big|_a^b-\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}N\mathrm{d}x\,\cdot$$

Тоді дістанемо
]

$$\int_a^b q_x u \mathrm{d}x + \bar{N}u\Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N\Big|_{a_2}^{b_2} = -u\,N\Big|_{a_1}^{b_1} - uN\Big|_{a_2}^{b_2} + \int_a^b N\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \bar{N}u\Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\int_a^b N\frac{du}{dx}\mathrm{d}x = \int_a^b q_x u \mathrm{d}x + \bar{N}u\Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{u}N\Big|_{a_2}^{b_2} + (N-\bar{N})u\Big|_{a_1}^{b_1} + (u-\bar{u})N\Big|_{a_2}^{b_2}.$$

При $u = \bar{u}$

$$\int_a^b N\varepsilon \mathrm{d}x = \int_a^b q_x u \mathrm{d}x + \bar{N}u\Big|_{a_1}^{b_1} + (N-\bar{N})u\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

Якщо $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'; \; N = EFu'; \; q_x = 0,$

$$\int_a^b N\varepsilon \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b EFu'^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{N^2}{EF}\mathrm{d}x.$$

При цьому

$$\frac{1}{2}\int_a^b EFu'^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{EFu_b^2}{l}; \quad \frac{1}{2}\int_a^b \frac{N^2}{EF}\mathrm{d}x = \frac{N^2 l}{2EF}.$$

$$\Pi(u,N) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} - q_x u - \frac{N^2}{EF} + N\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x - N_b u_b.$$

За формулою інтегрування частинами

$$\int_a^b N\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = Nu\Big|_a^b - \int_a^b u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Отже,

$$\Pi(u,N) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} - q_x u - u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + Nu\Big|_a^b - N_b u_b.$$

Остаточно отримаємо функціонал

$$\Pi^{\mathrm{K}}(N) = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{N^2}{EF}\mathrm{d}x$$

при додаткових умовах $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + q_x = 0; \; N = N_b.$

Оскільки таке перетворення є інволютивним, зробимо обернене перетворення:

$$\Pi^{\mathrm{K}}(N) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} - q_x u - u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + Nu\Big|_a^b - N_b u_b;$$

$$p = F_{N'}(x,N,N') = -u\,;\quad H(x,N,p) = -F + pN' = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} + q_x u + u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + pN'\,.$$

Рівняння Ейлера:

$$-\frac{\partial H}{\partial N} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0;\quad -\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = 0;\quad -\frac{N}{EF} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0;\quad q_x + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = 0;$$

$$\Pi(N,u) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} - q_x u - u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} - pN' - uN' \right)\mathrm{d}x + Nu\Big|_a^b - N_b u_b\,;$$

$$-\int_a^b u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_a^b N\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - Nu\Big|_a^b\,;$$

$$\Pi(N,u) = \int_a^b \left(\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} - q_x u \right)\mathrm{d}x - N_b u_b = \frac{1}{2}\int_a^b EF\left(u'\right)^2 \mathrm{d}x - \int_a^b q_x u \mathrm{d}x - N_b u_b\,.$$

Отже, ми отримали вихідний функціонал.

Тобто, якщо поширити результати, що стосуються задач визначених функціоналами від скінченної кількості змінних, на функціональні аналоги задач опуклого програмування, обмеження яких описуються диференціальними залежностями і екстремум визначається для функціоналів інтегрального типу, отримаємо таку постановку двоїстих за Лагранжем задач.

Пряма задача	*Двоїста задача*
$\Pi^{Л}(u) = \frac{1}{2}\int_a^b EF(u')^2\mathrm{d}x - \int_a^b q_x u\mathrm{d}x -$ $-N_b u_b \to \min.$	$\Pi^{К}(N) = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{N^2}{EF}\mathrm{d}x \to \max.$
$u_a = 0.$	$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + q_x = 0;\ N = N_b.$

Якщо розподілене навантаження відсутнє $(q_x = 0)$, функціонали спрощуються:

$\Pi^{Л}(u) = \frac{1}{2}\int_a^b EF(u')^2\mathrm{d}x - \bar{N}_b u_b\,.$	$\Pi^{К}(N) = \int_a^b \left(-\frac{1}{2}\frac{N^2}{EF} - u\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} \right)\mathrm{d}x +$ $+(N - N_b)u_b = -\frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EF} + (N - N_b)u_b\,.$
Функцію переміщень u шукатимемо у вигляді $u = a_0 + a_1 x$. Враховуючи граничні умови $x = 0 \Rightarrow u_a = 0;\quad a_0 = 0;$ $x = b \Rightarrow u = u_b,\quad a_1 = u_b / l$	

і $$u = \frac{u_b x}{l}.$$

$$\Pi^{Л}(u) = \frac{EF}{2l}u_b^2 - \bar{N}_b u.$$

$$\Pi^{К}(N) = -\frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EF} + (N - N_b)\frac{N_b l}{EF}$$ – двоїста функція Лагранжа.

Відповідно маємо:

Пряма задача

$$\Pi^{Л}(u) = \frac{EF}{2l}u_b^2 - N_b u \to \min.$$

Із умови стаціонарності цієї функції

$$\frac{\mathrm{d}\Pi^{Л}(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{EF}{l}u_b - N_b = 0\,;$$

$$u_b = \frac{N_b l}{EF}.$$

Ураховуючи, що

$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi^{Л}(u)}{\mathrm{d}u_b^2} = \frac{EF}{l} > 0\,,$$

функціонал (рис. 12,*а*) має мінімум, який дорівнює

$$\Pi^{Л}_{\min}(u) = -\frac{N_b^2 l}{2EF}\,.$$

Двоїста за Лагранжем задача

$$\Pi^{К}(N) = -\frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EF},\;\; N = N_b.$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi^{К}(N)}{\mathrm{d}N} = -\frac{Nl}{EF} + u_b = 0; \quad u_b = \frac{N_b l}{EF}\,.$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi^{К}(N)}{\mathrm{d}N} = -\frac{Nl}{EF} + \frac{N_b l}{EF} = 0; \;\; N = N_b\,.$$

Ураховуючи, що

$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi^{К}(N)}{\mathrm{d}N^2} = -\frac{l}{EF} < 0,$$

функціонал (рис. 12,*б*) має максимум, який дорівнює

$$\Pi^{К}_{\max}(N) = -\frac{N_b^2 l}{2EF}\,.$$

Функції $\Pi^{Л}(u) = \frac{EF}{2l}u_b^2$ і $-\Pi^{К}(N) = \frac{1}{2}\frac{N_b^2}{EF}$ є двоїстими за Юнгом, і нерівність Юнга можна записати як рівність:

$$\frac{EF}{2l}u_b^2 + \frac{1}{2}\frac{N_b^2 l}{EF} = N_b u_b\,,$$

яка являє собою принцип збереження енергії, тобто рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил.

Класичний прийом побудови двоїстої задачі є таким. Задача мінімізації

$$f(\mathbf{x}) \to \inf\,,\;\; \mathbf{x} \in X\,, \tag{52}$$

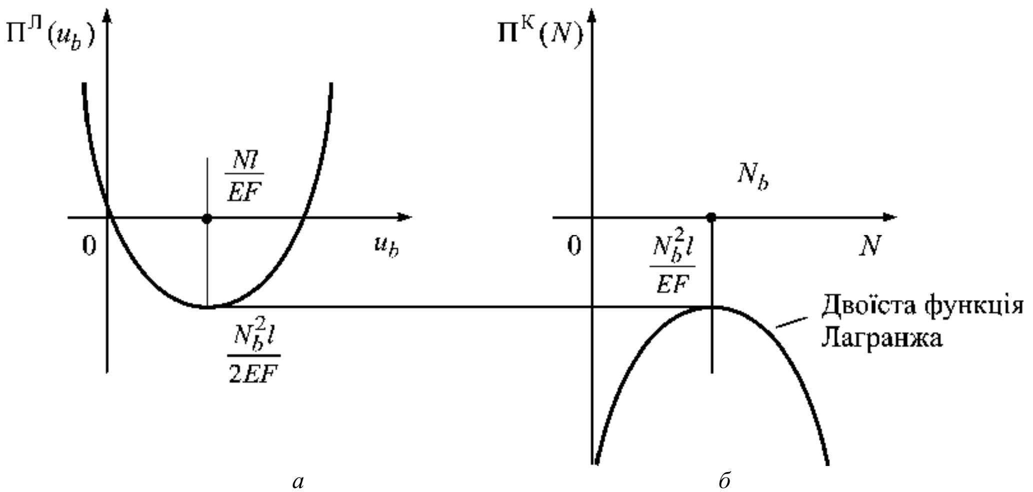
де X – лінійний простір, $f : X \to R,$ включається до класу подібних їй задач, які залежать від параметру:

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \inf \;\; \mathbf{x} \in X,\;\; \mathbf{y} \in Y\,,$$

де Y – деякий інший лінійний простір, $F : X \times Y \to R,$ $F(\mathbf{x},\mathbf{0}) = f(\mathbf{x}),$ (функцію F називають збуренням *f*). Зазвичай F вважається опуклою. Двоїстою до задачі відносно даного збурення називається задача

$$-F^*(\mathbf{0},\mathbf{y}^*) \to \sup\,, \mathbf{y}^* \in Y^*, \tag{53}$$

де F^* – функція двоїста (спряжена) до F у розумінні Лежандра-Юнга-Фенхеля.



а *б*

Рис. 12

Для простіших задач опуклого програмування

$$f_0(\mathbf{x}) \to \inf,\ f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots m,\ \mathbf{x} \in B,$$

де X – лінійний простір, $f_i : X \to R$ – опуклі функції на X , B – опукла множина в X (частинними випадками є задачі лінійного програмування), застосовуються такі стандарти збурення, що залежать від параметрів $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots y_m)$, $f_0(\mathbf{x}) \to \inf$, $f_i(\mathbf{x}) \le y_i$, $i = 1, \dots m$, $\mathbf{x} \in B$. Теореми двоїстості для загальних класів задач опуклого програмування стверджують, що при деяких припущеннях щодо збурень F розв'язки задач (52) і (53) збігаються і навіть, розв’язок однієї із задач є множником Лагранжа для іншої [Математическая энциклопедия, 1979, т.2, с. 46-47], [Тихомиров, 1974].

Можна записати:

Пряма задача P:

мінімізувати $f(\mathbf{x})$

за умов $g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$

$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l,$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \le n,$

$\mathbf{x} \in X$.

Двоїста задача D:

максимізувати $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$

за умов $\boldsymbol{\mu} \ge 0$, де

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i h_i(\mathbf{x}) ,$$

$\mathbf{x} \in X$,

за умов

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \ge 0$$

при $j = 1, 2, \dots, n_1$,

$$\left|\ \begin{array}{l}\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\dfrac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\dfrac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}=0\\ \qquad\qquad \text{при } j=n_1+1,\, n_1+2,\dots,n.\end{array}\right.$$

Функцію $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i g_i(\mathbf{x})+\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i h_i(\mathbf{x})$ звичайно називають двоїстою функцією Лагранжа.

У випадку квадратичного програмування:

пряма задача

мінімізувати $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{d}^T\mathbf{x}$

за умов $\mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{b}$,

де **H** – симетрична додатно визначена матриця, тобто цільова функція є строго опуклою.

Двоїста за Лагранжем задача полягає у максимізації $\theta(\boldsymbol{\mu})$ при $\boldsymbol{\mu}\ge 0$, де

$$\theta(\boldsymbol{\mu})=\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b});\ \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n\right\}.$$

При цьому функція $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})$ є строго опуклою і досягає мінімуму у точці, яка задовольняє рівність

$$\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}+\mathbf{d}=\mathbf{0}\,. \tag{54}$$

Тобто двоїсту задачу можна переписати у вигляді:

максимізувати $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})$

за умов $\mathbf{H}\mathbf{x}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}=-\mathbf{d}$,

$\boldsymbol{\mu}\ge\mathbf{0}$.

Можна отримати іншу форму двоїстої задачі. Ураховуючи, що **H** – додатно визначена матриця, то існує $\mathbf{H}^{-1}$ і єдиний розв’язок рівняння (54) дорівнює

$$\mathbf{x}=-\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{d}+\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu})$$

і відповідно

$$\theta(\boldsymbol{\mu})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{c}-\frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{d},$$

де $\mathbf{D}=-\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T$, $\mathbf{c}=-\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{d}$.

Двоїсту задачу тоді можна записати так:

максимізувати $\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{c}-\frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{d}$

за умови $\boldsymbol{\mu}\ge\mathbf{0}$.

Перетворення Лежандра у випадку функції зусиль і переміщень скінченної кількості змінних

$$\mathbf{N}^T=\{N_1,N_2,\ \dots\ ,N_n\},\ \mathbf{\Delta}^T=\{\Delta_1,\Delta_2,\dots\ ,\Delta_n\}$$

будується таким чином.

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U(\mathbf{\Delta})=\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}.$$

Доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}}(\mathbf{N})=\frac{1}{2}\mathbf{N}^T\mathbf{B}\mathbf{N}.$$

Перетворення Лежандра

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}+\frac{1}{2}\mathbf{N}^T\mathbf{B}\mathbf{N}=\mathbf{N}^T\mathbf{\Delta}.$$

При цьому мають виконуватися умови рівноваги, сумісності деформацій, граничні умови.

Умова, що перетворює нерівність Юнга у рівність

$$\mathbf{N}=\mathbf{K}\mathbf{\Delta},\ \text{або}\ \mathbf{\Delta}=\mathbf{B}\mathbf{N},$$

при цьому матриці $\mathbf{K}$ і $\mathbf{B}$, які являють собою відповідно матриці жорсткості і піддатливості є взаємно оберненими $\mathbf{KB}=\mathbf{E}$. Ці матриці є матрицями других похідних (матрицями Гессе) від потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії, їх коефіцієнти дорівнюють:

$$k_{ij}=\frac{\partial^2 U(\mathbf{\Delta})}{\partial\Delta_i\partial\Delta_j};\quad \delta_{ij}=\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial N_i\partial N_j}.$$

Згідно з теоремою Донкіна, якщо дві двоїсті за Юнгом функції потенціальної енергії $U(\mathbf{\Delta})$ і $U^{\text{доп}}(\mathbf{N})$ залежать від одного і того ж параметра або групи параметрів, які не є активними, тобто не беруть участі у перетворенні Лежандра (η), то має місце залежність:

$$\frac{\partial U(\mathbf{\Delta})}{\partial\eta}=-\frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial\eta},$$

$$U(\Delta)=\frac{1}{2}k\Delta^2,\qquad U^{\text{доп}}(N)=\frac{1}{2}\frac{N^2}{k},$$

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial k}=\frac{1}{2}\Delta^2,\qquad \frac{\partial U^{\text{доп}}(N)}{\partial k}=-\frac{1}{2}\frac{N^2}{k^2}=-\frac{1}{2}\Delta^2.$$

Відповідні екстремальні задачі у перетворенні Лежандра дають двоїсті за Лагранжем постановки екстремальних задач.

Пряма задача

$$\left\{\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}-\overline{\mathbf{N}}^T\mathbf{\Delta}\right\}\to\min,$$

за умови

$$\mathbf{\Delta}=\overline{\mathbf{\Delta}}.$$

Двоїста задача

$$\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{N}^T\mathbf{B}\mathbf{N}+\mathbf{N}^T\overline{\mathbf{\Delta}}\right\}\to\max,$$

за умови

$$\mathbf{N}=\overline{\mathbf{N}}.$$

Слід мати на увазі, якщо

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x},$$

де $\mathbf{A}$ – додатно визначена симетрична матриця

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; a_{ij} = a_{ji},$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \; \mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

то:

1. умова стаціонарності має вигляд

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{55}$$

2. мінімальне значення дорівнює:

$$f_{\min} = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_{st}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_{st} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{x}_{st},$$

де $\mathbf{x}_{st}$ – розв’язки рівняння (55).

Рівняння для частинних похідних від двоїстих функцій

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta_1} = k_{11}\Delta_1 + \ldots + k_{1n}\Delta_n = N_1; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial N_1} = \delta_{11}N_1 + \ldots + \delta_{1n}N_n = \Delta_1,$$

. . . .

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{\Delta})}{\partial \Delta_n} = k_{n1}\Delta_1 + \ldots + k_{nn}\Delta_n = N_n; \quad \frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{N})}{\partial N_n} = \delta_{11}N_1 + \ldots + \delta_{nn}N_n = \Delta_n$$

визначають звичайні рівняння будівельної механіки.

НАРИС 9

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ЕКСТРЕМУМИ В ЗАМКНЕНИХ ОБЛАСТЯХ. ГЕРНЕТ, ВАЛЕНТАЙН, ПОНТРЯГІН

Неможливо заперечувати глибоке значення, яке мають точно поставлені проблеми для просування математичної науки .

Д. Гільберт

З того нового, що внесло XX ст. в розвиток варіаційного числення, найістотнішим є перехід до дослідження екстремумів в замкнених областях, врахування обмежень у вигляді нерівностей, які мають задовольняти шукані функції і їхні похідні. Без урахування таких обмежень було важко застосовувати варіаційне числення для розв'язання прикладних задач, де подібні обмеження зустрічаються дуже часто, майже, на кожному кроці. Практичні потреби ставили перед варіаційним численням нові задачі, вимагали розробки нових методів розв'язання - і такі методи були розроблені. Математики XVIII ст. не розглядали задач з обмеженнями у вигляді нерівностей. Вперше задача з обмеженням була досліджена у 1831 р. Гольдшмідтом, який розглядав давню, відому ще за часів Бернуллі і Ейлера, задачу про знаходження кривої $y(x)$ заданої довжини із закріпленими кінцями, яка при обертанні навколо осі абсцис утворювала б тіло обертання з найменшою поверхнею. У цій задачі Гольдшмідт зауважив те, що пройшло повз увагу Ейлера - для того, щоб задача мала сенс, шукана крива $y(x)$ не повинна заходити нижче осі абсцис, тобто треба враховувати обмеження $y \geq 0$.

Сер Ісаак Ньютон,
англ. Sir Isaac Newton
(1642 - 1727)

Карл Теодор Вільгельм
Веєрштрасс,
нім. Karl Theodor
Wilhelm Weierstraß
(1815-1897)

Відзначимо також, що задача Ньютона, поставлена ним у 1687 р., якщо її правильно формалізувати, містить обмеження, задане нерівністю $y' > 0$. Наприкінці XIX ст. було опубліковано низку статей, присвячених застосуванню теорії Веєрштрасса до цієї задачі. Особливо цікавою є робота професора Берлінського університету Фрідріха Августа (1840-1900). Вивчаючи задачу Ньютона, де шукається мінімум інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y \cdot y'^3 \mathrm{d}x}{1+y'^2},$$

він першим помітив, що за такої постановки пропущена найважливіша додаткова умова $y' \geq 0$. Вона означає монотонність шуканої кривої і виключає ті ламані, про які писали Сен Жак де Сільвабель і Лежандр (нарис 2). Мабуть, Ньютон припускав з фізичних міркувань, що ця умова виконується, хоча і не зазначив це в явному вигляді.

Август вказав [August, 1988, с. 3], що за відсутності умови $y' \geq 0$ «в поверхні тіла найменшого опору виникли б воронкоподібні поглиблення, при яких неминучі були б повторювані удари частинок повітря, що збільшило б опір».

В сучасних курсах [Алексеев і ін., 1979, с. 35] задача Ньютона формалізується так:

$$\int_0^T \frac{t\mathrm{d}t}{1+\dot{x}^2} \to \inf, \quad x(0)=0, \quad x(T)=\xi, \quad \dot{x}\in \mathbf{R}_+.$$

У зв'язку з цим автори підручника [Алексеев і ін., 1979, с. 28] зауважили: «Задачу Ньютона слід віднести навіть власне не до варіаційного числення, а до оптимального управління, теорія якого почала розроблятися в п'ятдесяті роки XX століття». Такою є математична сторона питання.

Звернемося тепер до того, наскільки правомірні фізичні передумови, з яких виходив Ньютон. Веєрштрасс в своїх лекціях [Weierstrass, 1894– 1927, т.7, с. 202] вказав, що вони не є загальноприйнятими, і зазначив, що Ейлер отримав іншу форму тіла найменшого опору. У XIX ст. була поширена думка, що фізичні гіпотези Ньютона і висновки, що з них випливають, не підтверджуються експериментами. І в наш час Л. Янг писав: «Ньютон сформулював варіаційну задачу про тіло обертання, що має найменший опір при русі в газі. Прийнятий ним закон опору є фізично абсурдним» ([Янг, 1974, с. 42]).

Ні вода, ні оточуюче нас повітря не є «рідким середовищем», про яке писав Ньютон. Однак його фізичні припущення і сама його задача виявилися актуальними в середині 50-х років минулого століття, коли настала ера надзвукових і гіпервисотних літаючих апаратів. На великій висоті припущення Ньютона виконуються. Задача Ньютона стала в наші дні важливою аеродинамічною задачею, як писали В.М. Алексєєв, В.М. Тихомиров і С.В. Фомін [Алексеев і ін., 1979, с. 35]: «Фізичні гіпотези, висунуті Ньютоном, і саме його розв'язання аеродинамічної задачі виявилися дуже актуальними в сучасній надзвуковій аеродинаміці, коли нагальною задачею стала побудова надшвидкісних і висотних літаючих апаратів».(див. також нарис 2).

9.1. Задачі з обмеженнями. Односторонні варіації

Наявність нерівностей значно ускладнює задачу знаходження екстремуму функціоналу, призводить до того, що основний метод розв'язання - зведення до інтегрування рівняння Ейлера - перестає працювати. Дійсно, наявність будь-якої додаткової нерівності $\varphi(x,y)\geq 0$ призводить до того, що екстремум треба шукати тепер в замкненій області зміни змінної $y(x)$, що включає в себе свою границю $\varphi(x,y)=0$. Нехай на деякій ділянці крива, що доставляє екстремум, проходить по границі. Тоді для неї допустимою буде лише одностороння варіація, $\delta y>0$, а варіація $\delta y<0$ недопустима, бо виводить шукану криву за границі допустимої області.

Першу варіацію функціонала δJ Ейлер і Лагранж вже вміли приводити до виду

$$\delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}} \right) \delta y \mathrm{d}x . \tag{1}$$

Якщо екстремум розглядається у відкритій області, то варіація δy є довільною функцією, і тоді з умови $\delta J \geq 0$ випливає $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}} = 0$ - тобто виконується рівняння Ейлера, яке дозволяє після інтегрування фактично визначити шукану функцію $y(x)$. Однак в замкненій області при $\delta y > 0$ з умови $\delta J \geq 0$ вже не випливає рівняння Ейлера, а випливає тільки те, що:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\dot{y}} \geq 0 \qquad (2)$$

тобто отримуємо замість рівняння лише нерівність, яка не дозволяє однозначно визначити шукану функцію $y(x)$.

Для того, щоб подолати ці труднощі, Гольдшмідт заміною змінних перетворив замкнену область $y \geq 0$ у відкриту. Надалі так само чинили інші математики XIX ст., які час від часу стикалися з задачами на екстремум з обмеженнями. Проте кожного разу перетворювати замкнену область у відкриту - досить громіздкий процес, до того ж при ускладненні структури замкненої області труднощі збільшуються. Тому був потрібен єдиний алгоритм розв'язання задач з обмеженнями і цей алгоритм розробила Н.М. Гернет.


Надія Миколаївна Гернет
(1877-1943)

Життя Н.М. Гернет відоме набагато менше, ніж вона на те заслуговує. Її батько, М.А. Гернет, представник досить відомого дворянського роду Гернетів, був активним учасником революційного руху. По матері, уродженій Філатовій, вона була родичкою О.М. Крилова і О.М. Ляпунова. Можливо, що їхній приклад вплинув на вибір життєвого шляху Н.М. Гернет. Закінчивши Вищі жіночі курси у 1898 р. вона продовжила освіту в Німеччині в Геттінгенському університеті під керівництвом Д. Гільберта і у 1901 р. представила дисертацію, присвячену варіаційному численню, за яку була удостоєна ступеня доктора філософії з «найвищою похвалою», і в тому ж році повернулася до Росії. Саме в докторській дисертації Н.М. Гернет (тема якої, безумовно, була підказана її керівником, Д. Гільбертом), було розпочато дослідження екстремуму для функціоналів, заданих в замкнених областях.

У 1913 р Н.М. Гернет опублікувала книгу «Про основну найпростішу задачу варіаційного числення» [Гернет, 1913] і представила її до захисту на ступінь магістра в Московському університеті. Захистивши у 1915 р. дисертацію, Н.М. Гернет стала другою в історії Росії жінкою - магістром математики російського університету.

Основні наукові результати Н.М. Гернет (крім робіт з дослідження ряду Лагранжа) стосуються варіаційного числення. В цій області вона отримала видатні результати, які за її життя не були гідно оцінені. В її вже згаданій книзі «Про основну найпростішу задачу варіаційного числення» наведений загальний алгоритм розв'язання задач на екстремум в замкненій області.

Н.М. Гернет міркувала таким чином: нехай треба знайти функцію $y(x)$, що доставляє екстремум функціоналу

$$J = \int_a^b F(x, y, \dot{y})\mathrm{d}x \tag{3}$$

за наявності обмеження

$$y \geq \varphi(x). \tag{4}$$

Рівність $y = \varphi(x)$ окреслює границю допустимої області. Для шуканої функції $y(x)$ теорема Ейлера несправедлива.

Н.М. Гернет запропонувала цікаву заміну змінних - замість змінної $y(x)$ ввести нову змінну $z(x)$, пов'язану з нею таким чином

$$z^2 = y - \varphi(x). \tag{5}$$

На нову змінну, $z(x)$, вже не накладено ніяких обмежень. Границі області $y = \varphi(x)$ просто відповідає значення $z = 0$; отже, для функції $z(x)$, яка доставляє екстремум функціоналу (3), переписаному для нової змінної $z(x)$, теорема Ейлера тепер справджується. Водночас після елементарних перетворень неважко встановити, що рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0 \tag{6}$$

для функціонала (3), переписаного для нової змінної $z(x)$, набирає вигляду:

$$z \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \tag{7}$$

тобто розпадається на два рівняння: $z = 0$ (границя допустимої області) і рівняння Ейлера для вихідного функціоналу. З рівняння (7) випливає, що для функціоналів (3) за наявності обмеження (4) справедлива узагальнена теорема Ейлера, сформульована Н.М. Гернет: *якщо екстремум існує і досягається в класі кусково-гладких функцій, то він досягається на складених кривих, що складаються з відрізків екстремалей і частин границі допустимої області (зрозуміло, що в окремих випадках довжина відрізків екстремалей або частин границі області може бути нулем)*. Цю важливу теорему справедливо називати (як було запропоновано в [Петров, 1977]) «теоремою Гернет».

Узагальнена теорема Ейлера була доведена Н.М. Гернет не тільки для простої нерівності (4), а й для нерівностей загального вигляду $\varphi(x, y) \geq 0$, а також - що особливо важливо - для диференціальних нерівностей: $\varphi(x, y, \dot{y}) \geq 0$. Н.М. Гернет також встановила умови в точках переходу від екстремалі до границі області і показала, що в точці переходу для всіх функціоналів, крім вироджених, тобто таких, у яких $F_{\dot{y}\dot{y}} = 0$, дотичні до екстремалі і до границі області мають збігатися.

Ця умова дозволяє визначити відсутні сталі інтегрування в рівняннях відрізків екстремалей. Маючи в своєму розпорядженні узагальнену теорему Ейлера і умови в точках спряження, можна вже не перетворювати в кожній конкретній задачі замкнену область у відкриту - пошук кривої, що доставляє екстремум, зводиться тепер здебільшого до пошуку точок спряження Нарешті, Н.М. Гернет на основі перетворення нерівності Ейлера встановила важливу нерівність (кривизна екстремалі, проведеної дотично до границі області, не менша за кривизну границі в точці дотику), що допомагає визначити структуру кривої, яка доставляє екстремум, в разі складної границі області.

Таким чином, Н.М. Гернет розробила в 1913 р. загальний і зручний алгоритм розв'язання задач на екстремум функціоналів за наявності простих або диференціальних нерівностей, накладених на шукані функції та їхні похідні.

Розглянемо способи розв'язання задач з обмеженнями у вигляді нерівностей і наведемо приклади.

Спочатку звернемося до найпростішої задачі: серед всіх неперервних кривих $y = y(x)$, похідні яких неперервні окрім, може бути, точок на кривій $\varphi(x, y) = 0$, що задовольняють умову

$$\varphi(x, y) \geq 0 \tag{8}$$

і з'єднують задані точки A і B, знайти ту, уздовж якої інтеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

має екстремальне значення.

Обмежимося виведенням необхідних умов, користуючись якими можна фактично знайти шукану криву, якщо вона існує.

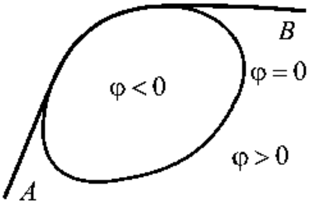


Рис. 1

Нерівність $\varphi(x, y) \geq 0$, як відомо, в загальному випадку визначає закриту область з границею $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 1). Вважатимемо, що функція $\varphi(x, y)$ однозначна, має неперервні похідні першого порядку і система рівнянь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \varphi = 0$$

має скінченну кількість розв'язків; їм відповідають точки, які в диференціальній геометрії називаються *особливими точками.* Інші точки кривої $\varphi(x, y) = 0$ називаються *звичайними.*

Виведення умов екстремуму. Отже, умову (8) можна інтерпретувати геометрично: всі криві класу допустимих ліній мають належати закритій області, обмеженій кривою $\varphi = 0$.

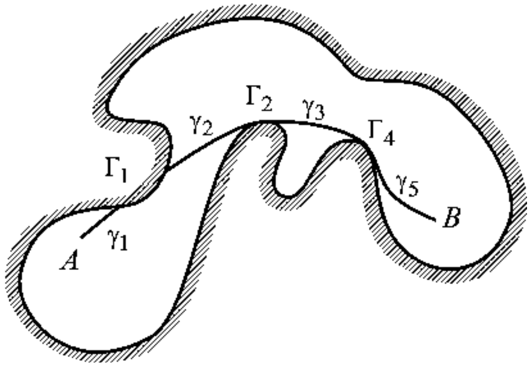


Рис. 2

Припустимо, що крива γ, яка дає мінімум у розглядуваному класі допустимих ліній, існує і задається рівнянням $y = y(x)$. В загальному випадку шукану криву γ можна поділити на послідовні ділянки γ_1, $\gamma_2,\ldots,\ \gamma_k$, Γ_1, $\Gamma_2,\ldots,\ \Gamma_{k-1}$, де всі ділянки γ_i належать області $\varphi(x,y) > 0$, всі ділянки Γ_i належать границі (рис. 2). Позначимо через A_1, B_1; A_2, B_2; ... ; A_{k-1}, B_{k-1} відповідно ліві та праві кінці кривих Γ_1, Γ_2, ... , Γ_{k-1}. Вважатимемо, що ділянки Γ_i складаються з правильних звичайних точок кривої $\varphi = 0$. Задача полягає у знаходженні умов, які мають задовольняти

1) криві γ_i, при $\varphi > 0$;

2) криві Γ_i;

3) криві γ_i, в точках з'єднання A_i, B_i.

Умови для кривих γ_i знаходяться відразу. Дійсно, оскільки криві γ_i належать області $\varphi > 0$, то для них допустимими є двосторонні[1] варіації і тому кожна крива γ_i є екстремаллю для інтеграла *J*, тобто задовольняє рівняння Ейлера

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0.$$

Знайдемо умови для кривих Γ_i. Для цих кривих можливі лише односторонні варіації і очевидно, що якщо для точок даної кривої $\frac{\partial\varphi}{\partial y} > 0$, то допустимі лише варіації $\delta y \geq 0$ (уздовж кривої $\varphi = 0$, отже, якщо $\frac{\partial\varphi}{\partial y} > 0$, то при від'ємному прирості δy φ стає від'ємною і крива $y = y(x) + \delta y(x)$ не належатиме класу допустимих ліній). Аналогічно, якщо $\frac{\partial\varphi}{\partial y} < 0$, то можливі лише варіації $\delta y \leq 0$. Розглянемо перший випадок.

Оскільки розглядувана крива дає мінімум, то при всіх нескінченно малих додатних варіаціях δy варіація інтеграла *J* має бути невід'ємною. Застосовуючи метод варіювання в точці, дістанемо

---

[1] Тобто, якщо δy – допустима варіація, то $-\delta y$ також допустима.

$$\delta_x J = \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\int \delta y \mathrm{d}x \geq 0\,.$$

Звідси уздовж кожної дуги Γ_i, для якої $\frac{\partial\varphi}{\partial y} > 0$, маємо

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \geq 0\,.$$

Аналогічно для тих дуг Γ_i, для яких $\frac{\partial\varphi}{\partial y} < 0$, маємо:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \leq 0\,.$$

Об'єднуючи обидва випадки, для мінімуму отримаємо

$$\frac{F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \geq 0$$ [1]

для всіх точок дуг Γ_i.

Розглянемо останнє питання − питання про умови в точках A_i. Визначимо варіацію J при варіаціях точки A_i, вздовж кривої Γ_i. Ця варіація складається з двох частин: якщо через x_i позначити абсцису точки A_i, то

$$\delta J = \delta\int_a^{x_i} F(x,y,y')\mathrm{d}x + \delta\int_{x_i}^{b} F(x,y,y')\mathrm{d}x\,.$$

Варіація першого інтеграла обчислювалася при розв'язанні задачі з рухомими границями:

$$\delta\int_a^{x_i} F(x,y,y')\mathrm{d}x = \left\{\left[k - y'(x_i)\right]F_{y'}\left(x_i, y(x_i), y'(x_i)\right) + F\left(x_i, y(x_i), y'(x_i)\right)\right\}\delta x_i\,,$$

де k − кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $\varphi = 0$ у точці A_i. Варіація другого інтеграла зводиться до зменшення довжини інтервалу інтегрування на δx_i; звідси

$$\int_{x_i}^{b} F(x,y,y')\mathrm{d}x = -F\left(x_i, y(x_i), k\right)\delta x\,.$$

Оскільки розглядувана варіація двостороння (з точністю до малих вищих порядків), то при екстремумі необхідно, щоб сума двох обчислених варіацій дорівнювала нулю. Дістанемо:

---

[1] Очевидно, що через однозначність $y = y(x)$ уздовж дуги Γ_i функція $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ не змінює знаку.

$$F\left(x_i, y(x_i), k\right) - F\left(x_i, y(x_i), y'(x_i)\right) - \left(k - y'(x_i)\right) F_{y'}\left(x_i, y(x_i), y'(x_i)\right) = 0$$

або

$$F\left(x_i, y(x_i), -\frac{(\partial\varphi/\partial x)}{(\partial\varphi/\partial y)}\right) - F\left(x_i, y(x_i), y'(x_i)\right) + \left(\frac{(\partial\varphi/\partial x)}{(\partial\varphi/\partial y)} + y'(x)\right) F_{y'}\left(x, y, y'\right)\Big|_{x=x_i} = 0 .$$

Отримана умова задовольнятиметься, якщо

$$k = y'(x), \tag{9'}$$

тобто якщо в точці A_i дотична до γ співпадає з дотичною до Γ_i.

Якщо крива $\varphi = 0$, а функція $F_{y'y'} \neq 0$ при будь-яких y', то розв'язок (9') єдиний, отже в цьому разі в усіх точках, де мінімізуюча крива $y = y(x)$ переходить із області $\varphi > 0$ на границю області, дотична до кривої має збігатися з дотичною до границі. Іншими словами, функція $y = y(x)$, що є рівнянням мінімізуючої кривої, має неперервну похідну. Проведений аналіз задачі можна оформити в таку теорему.

Якщо крива $y = y(x)$ серед всіх кривих, що з'єднують дві дані точки A і B і лежать в області $\varphi(x, y) \geq 0$ (y' неперервна крім, можливо, точок границі $\varphi(x, y) = 0$), *дає мінімум інтегралу J, то:*

1. *В усіх точках всередині області, крива $y = y(x)$ є екстремаллю*:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0 .$$

2. *В усіх точках кривої $y = y(x)$, що належать границі*

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \geq 0, \text{ якщо } \frac{\partial\varphi}{\partial y} > 0,$$

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \leq 0, \text{ якщо } \frac{\partial\varphi}{\partial y} < 0 .$$

3. *В точках переходу з області на границю області*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[F\left(x, y(x), -\frac{(\partial\varphi/\partial x)}{(\partial\varphi/\partial y)}\right) - F\left(x, y(x), y'(x)\right)\right] + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y'\right) F_{y'}\left(x, y, y'\right) = 0 .$$

Аналогічне твердження справедливе і для функціоналів виду $J = \int\limits_{x_0}^{x_2} F\left(x, y, y', y''\right) \mathrm{d}x$. У всіх точках всередині області крива $y = y(x)$ є екстремаллю і має задовольняти рівняння Ейлера-Пуассона для такого функціонала:

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0 .$$

У точках переходу на границю області (п. 3 останньої теореми) умови записуються на основі виразу для задачі з рухомими кінцями. Якщо границя області задається рівнянням $y = g(x)$ і $y' = g'(x)$, то перша частина варіації функціонала записується у такому вигляді:

$$\delta\int_a^{x_i} F\left(x,y,y',y''\right)\mathrm{d}x = \left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''}) + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)g' + F_{y''}g''\right]_{x=x_i}\delta x_i .$$

Звідки, аналогічно попереднім висновкам для функціоналів виду $\int\limits_{x_0}^{x_2} F\left(x,y,y',y''\right)\mathrm{d}x$, в точках переходу з області на границю області маємо

$$F - y'(x)F_{y'} - y''(x)F_{y''} + y'(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F_{y''}\right) + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)g'(x) + F_{y''}g''(x) -$$
$$- F\left(x, y\left(x\right), g'(x), g''(x)\right) = 0 . \qquad (10)$$

Як приклад розглянемо задачу знаходження брахістохрони: *серед всіх кривих, що лежать у вертикальній площині xOy вище за пряму* $y = ax + b$ *і з'єднують точки A і B, знайти ту, рухаючись по якій під дією своєї ваги точка M дістанеться із A у B за найкоротший час.*

Вважатимемо, що початок координат знаходиться у точці *A*, координати точки *B* позначимо через x_1, y_1 (рис. 3).Я відомо, ця задача зводиться до знаходження мінімуму інтеграла

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x .$$

Сімейство екстремалей складається з циклоїд:

$$x = r(\theta - \sin\theta) + C , \quad y = r(1 - \cos\theta) . \qquad (11)$$

Для цієї задачі

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 .$$

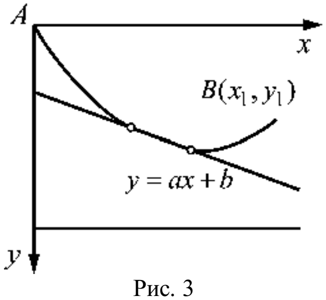


Рис. 3

Отже, екстремаль має дотикатися до границі області. Крім того, допустимі лінії за умовою належать області:

$$\varphi = ax + b - y \geq 0 , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -1 < 0 .$$

Отже, для ділянок шуканої кривої, що лежать на границі, має бути

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} \leq 0 .$$

Ця умова для розглядуваної задачі задовольняється, бо, з одного боку,

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = \frac{y''}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

і, з іншого боку, $y'' < 0$, оскільки всі екстремалі − циклоїди, розташовані під віссю *Ox,* опуклі.

У загальному випадку при розв'язанні є такі дві можливості.

1. Через точки *A* і *B* можна провести екстремаль, що належить даній області $\varphi \geq 0$; в такому разі ця екстремаль і є шуканою кривою.

2. Через точки *A* і *B* неможливо провести екстремаль, що цілком належить області $\varphi \geq 0$; в цьому випадку з точок *A* і *B* проводимо циклоїди сімейства (11), дотичні до прямої $y = ax + b$. Нехай A_1 і B_1 є точками дотику циклоїд, що проходять через *A* і *B* відповідно (рис. 4). Шукана крива складатиметься з циклоїди AA_1, відрізка A_1B_1 і циклоїди B_1B.

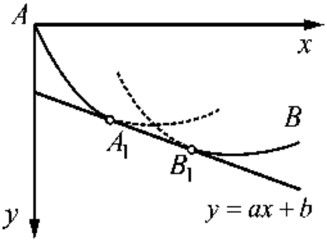


Рис. 4

Наведемо числовий приклад. Нехай $a = 0,\ b = 1$, $x_1 = \frac{1}{4}(2 + 3\pi),\ y_1 = \frac{1}{2}$. В цьому разі лінія найшвидшого спуску складатиметься з ділянки циклоїди

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y &= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\} \ (0 \leq \theta \leq \pi),$$

з горизонтального відрізка $A_1B_1 : A_1(\pi/2, 1),\ B_1(\pi/2+1, 1)$ і ділянки циклоїди

$$x = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta),\quad y = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta).$$

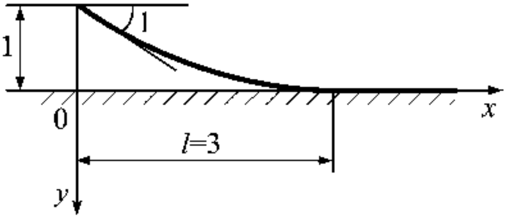


Рис. 5

Розглянемо ще задачу, показану на рис. 5, яка описується функціоналом $J = \int\limits_0^{x_1} (y'')^2\,\mathrm{d}x$ при граничних умовах

$$\begin{aligned} &y(0) = -1;\ y(l) = 0, \\ &y'(0) = 1;\ y'(l) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Рівняння Ейлера-Пуассона для функціонала, який залежить від другої похідної, має вигляд

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0,$$

де $F = (y'')^2$ і відповідно $F_y = 0$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''} = 2y''$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 2y^{IV}$.

Екстремум функціонала знаходиться серед розв'язків рівняння

$$y^{IV} = 0. \tag{13}$$

Зазначимо, що в даній задачі до невідомих також належить довжина ділянки l, в межах якої графік шуканої функції $y(x)$ має ненульову кривизну. Отже, загальний розв'язок рівняння (13), який має вигляд

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3, \tag{14}$$

окрім граничних умов повинен задовольняти ще додаткову умову, яка витікає із варіаційного рівняння для цієї задачі як задачі з рухомими границями:

$$y''(l) = 0.$$

Використовуючи цю умову та співвідношення (12), (14), знаходимо $l = 3$, $y(x) = -1 + x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} = \frac{(x-3)^3}{27}$.

Далі, виходячи з отриманого розв'язку, розглянемо таку задачу: *серед усіх функцій, графіки яких проходять через точки* $A(0, -1)$ *і* $B(a, -1)$ *та лежать вище осі Ox знайти ту, що надає мінімального значення функціоналу* $J = \int_0^a (y'')^2 \,\mathrm{d}x$. *Також відомо, що* $y'(0) = -y'(a) = 1$, $a = 8$.

Отже, треба знайти криву, розташовану в області $\varphi(x, y) = y + 1 \ge 0$. Оскільки границя області є односторонньою, то шукана функція $y = y(x)$ має задовольняти три умови. По-перше, всередині області ця функція повинна бути екстремаллю, тобто задовольняти рівняння (13). По-друге, оскільки в усіх точках границі маємо $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = 1 \ge 0$, то і величина y^{IV} в цих точках має бути невід'ємною. Нарешті, третя умова полягає в тому, що в точках переходу з області на границю, яка задана рівнянням $y = g(x)$, маємо

$$F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)g'(x) + F_{y''}g''(x) - F\big(x, y(x), g'(x), g''(x)\big) = 0.$$

Оскільки одностороння границя задана рівнянням $y = g(x) = 0$, то будь-яка похідна в точках границі дорівнює нулю, і отже, друга умова виконується автоматично. З цієї ж причини третя умова набирає вигляду

$$F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''} = 0. \tag{15}$$

Знайдемо рівняння лівої ділянки кривої, що задовольняє рівняння (13) і (15), а також граничні умови

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 . \tag{16}$$

Також зазначимо, що в точці $x=l$, де крива виходить на границю $y=0$, маємо

$$y(l)=0, \quad y'(l)=0 . \tag{17}$$

Остання умова витікає з неперервності першої похідної $y'(x)$, яка повинна дорівнювати нулю в точках границі.

Таким чином, рівняння Ейлера-Пуассона та граничні умови розглядуваної задачі збігаються із співвідношеннями (12), (13) попередньої задачі.

Загальний розв’язок (14) за умов (16) має вигляд

$$y(x)=-1+x+C_2x^2+C_3x^3 . \tag{18}$$

Використовуючи значення $F=(y'')^2$, $F_{y'}=0$, $F_{y''}=2y''=4C_2+12C_3x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}=2y'''=12C_3$, $y'=1+2C_2x+3C_3x^2$, із (15) знаходимо

$$3C_3=C_2^2 .$$

Тепер з граничної умови $y'(l)=0$ можна знайти $1+2C_2l+C_2^2l^2=0 \Rightarrow C_2=-1/l$, а з умови $y(l)=0$ знайдемо, що $l=3$. І нарешті,

$$y(x)=\frac{(x-3)^3}{27}, \quad 0\le x\le 3,$$

що збігається із розв’язком попередньої задачі.

Якщо повторити всі викладення для правої симетричної ділянки кривої, то дістанемо вираз

$$y(x)=\frac{(5-x)^3}{27}, \quad 5\le x\le 8 .$$

В інтервалі $3 \le x \le 5$ значення функції збігаються зі значеннями обмеження, тобто $y(x)=g(x)=0$.

Таким чином, шукана функція, що надає мінімального значення функціоналу, має вигляд (рис. 6)

$$y(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-a)^3}{27}, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & 3 < x < 5, \\ \dfrac{(5-x)^3}{27}, & 5 \le x \le 8. \end{cases}$$

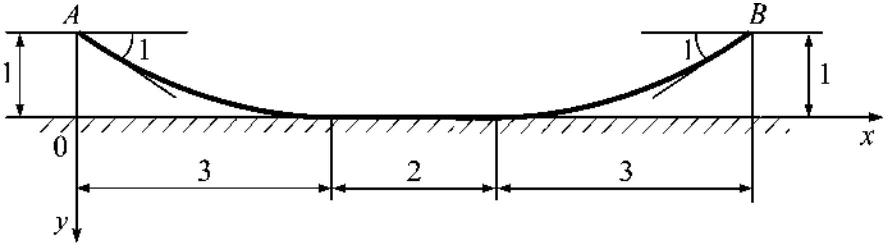


Рис. 6

Випадок параметричного задання кривої. Розглянуту вище найпростішу задачу можна легко поширити на випадок, коли за клас допустимих ліній беруться криві, задані у параметричній формі: серед кривих

$$\gamma : \ x = x(t), \ y = y(t),$$

що належать закритій області

$$\varphi(x, y) \geq 0^{1},$$

з'єднують точки A і B цієї області і мають дотичну, що неперервно обертається, всюди, крім, можливо, точок границі $\varphi = 0$, треба визначити криву, уздовж якої інтеграл

$$J = \int\limits_{\gamma} F\left(x, y, x', y'\right) \mathrm{d}t$$

має екстремальне значення[2].

Використовуючи наведене вище або оперуючи безпосередньо з варіаціями інтеграла *J,* легко отримати такий результат: *якщо крива* γ *класу допустимих ліній реалізує шуканий екстремум, то* γ *складається з дуг екстремалей інтеграла J усередині області* $\varphi > 0$ *і з ділянок границі області* $\varphi \geq 0$, *причому в точках кривої* γ *на границі* $\varphi = 0$ *маємо*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \overline{x}' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \overline{y}' = 0,$$

$$F(x, y, \overline{x}', \overline{y}') - \overline{x}' F_{x'}(x, y, x', y') - \overline{y}' F_{y'}(x, y, x', y') = 0,$$

де за x', y' *і* $\overline{x}', \overline{y}'$ *можна взяти напрямні косинуси дотичних відповідно до кривої* γ *і до кривої* $\varphi = 0$.

Використовуючи умову однорідності функції *F* і позначивши для скорочення

$$\overline{F}_{x'} = F_{x'}\left(x, y, \overline{x}', \overline{y}'\right),$$

$$\overline{F}_{y'} = F_{y'}\left(x, y, \overline{x}', \overline{y}'\right),$$

---

[1] Крива $\varphi = 0$ вважається замкненою і такою, що має дотичну, яка неперервно обертається.

[2] Припускається, що функція *F* задовольняє звичайні умови однорідності і неперервності.

ці умови можна подати у простішому вигляді:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{x}' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{y}' = 0\,,$$

$$\overline{x}'(\overline{F}_{x'} - F_{x'}) + \overline{y}'(\overline{F}_{y'} - F_{y'}) = 0\,,$$

або остаточно

$$\frac{\overline{F}_{x'} - F_{x'}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\overline{F}_{y'} - F_{y'}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}\,.$$

Зокрема, якщо область $\varphi \geq 0$ обмежена відрізком прямої, паралельної осі *Oy,* то умова набирає вигляду:

$$\overline{F}_{y'} = F_{y'}\,.$$

Задача розрахунку систем з односторонніми в’язями у загальному вигляді математично являє собою крайову задачу з граничними умовами, які залежать від навантаження або інших параметрів системи, і тому є нелінійною навіть у тому разі, коли основні розв’язувальні рівняння і обмеження виражаються лінійними співвідношеннями. При варіаційному підході задачі теорії пружності з односторонніми крайовими умовами зводяться до еліптичних варіаційних нерівностей, що дозволяє при переході до чисельної дискретизації при певних умовах довести теореми існування і єдиності розв’язків. В результаті варіаційної постановки задачі вона зводиться до знаходження екстремуму деякого функціонала, що не має властивості гладкості, необхідної для застосування класичних методів варіаційного числення.

При реалізації варіаційних принципів для систем з односторонніми в’язями характерно, що потенціальна енергія таких систем є функцією, визначеною не на всіх уявних значеннях узагальнених координат, як у класичній механіці систем із «звичайними» пружними в’язями, де вираз для потенціальної енергії записується у вигляді функцій узагальнених координат, які можуть мати довільні значення. При двобічних в’язях обмеження–рівності визначають для області визначення функції потенціальної енергії множину значень аргументів без будь-яких обмежень. Для умов-нерівностей, які мають місце при урахуванні односторонніх в’язей, це положення не витримується і потенціальна енергія у загальному випадку є функцією, визначеною на певній множині значень узагальнених координат.

Метод варіаційних нерівностей виявився ефективним при розв’язанні задач теорії пружності з односторонніми крайовими умовами (Синьоріні [Signorini, 1959], Фікера [Fichera, 1964]) і задач теорії пластичності (Койтер [Koiter, 1960], Прагер [Прагер, 1963], Дюво і Ліонс [Duvaut, Lions, 1972]), при дослідженні стаціонарних процесів гідродинаміки пористих середовищ і спеціальних неньютонівських рідин [Duvaut, Lions, 1972]), при розв’язанні задач теорії імпульсних систем управління і задач управління системами з розподіленими параметрами.

Сутність цього методу покажемо на простому прикладі, наведеному в роботі [Duvaut, Lions, 1972]. У відкритій обмеженій області Ω із R^n $(n=2,3)$ з границею Γ шукається деяка дійсна функція $x \to u(x)$, що задовольняє в Ω класичне рівняння

$$-\Delta u + u = f\,, \tag{19}$$

де f задана в Ω, $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Граничні умови задаються у вигляді нерівностей:

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{20}$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ означає похідну вздовж напряму зовнішньої нормалі на Г.

Задача (19), (20) є екстремальною з обмеженнями. Якщо ввести функціонал

$$I(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - (f,v)\,, \tag{21}$$

де

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_{\Omega} uvdx\,,\ (f,v) = \int_{\Omega} fvdx\,,$$

і замкнену опуклу множину

$$K = \left\{ \frac{u}{v} \geq 0 \text{ на } \Gamma, \right. \tag{22}$$

то розв’язання рівняння (19) з умовами (20) зводиться до задачі знаходження такого $u \in K$, що

$$I(u) = \inf I(v), \quad v \in K\,. \tag{23}$$

Задача (23) має єдиний розв’язок, який характеризується умовою

$$a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall u \in K, v \in K\,, \tag{24}$$

що називається еліптичною варіаційною нерівністю.

Наявність нерівностей у постановці цієї задачі робить її нелінійною, незважаючи на те що розв’язувальне рівняння і обмежуючі нерівності описуються лінійними співвідношеннями. Така нелінійність, що виключає можливість стандартної лінеаризації, має назву конструктивної, а самі системи називаються системами змінної структури.

Та обставина, що K є замкненою опуклою множиною, свідчить про єдиність розв’язку поставленої задачі. Для його знаходження можна використати методи опуклого програмування. Такий підхід представляється найбільш загальним і дозволяє розглядати як одновимірні [Гордеев, Перельмутер, 1967], так і двовимірні задачі для дискретних і дискретно-континуальних систем, тобто систем з дискретним розташуванням в’язей та з в’язями, неперервно розподіленими по поверхні [Кравчук, 1978]. Ефективність застосування методів опуклого програмування полягає в тому, що можна використовувати розроблені алгоритми і немає необхідності в проведенні великої кількості спроб при пошуку робочої системи, а також в зручності комп'ютерної реалізації.

Фізичний зміст функціонала (21) для механічної системи пов'язаний з її повною потенціальною енергією. Тому наведену вище постановку задачі можна легко поширити на випадок з односторонніми в'язями.

У реальних системах конструктивна нелінійність часто супроводжується геометричною і фізичною нелінійностями, наявність яких призводить до різкого ускладнення поставленої задачі, тому що в цих випадках доводиться мати справу з більш загальним класом задач. На основі енергетичних принципів вони також зводяться до екстремальних, але на ширшій множині функцій, ніж традиційні, причому необхідні функціонали можуть не бути гладкими і мати особливі точки типу сідлових і локальних екстремумів, пов'язаних з критичними і інваріантними станами механічної системи.

Для розв'язання таких задач мають використовуватися методи нелінійного програмування, які дозволяють вивчати глобальні властивості досліджуваних функціоналів. Мабуть найефективнішим є підхід, що базується на синтезі методу продовження розв'язку за параметром і методу проекції градієнта на лінеаризовані обмеження, оскільки його можна поставити у відповідність до реального процесу деформування механічної системи, контролювати включення і виключення в'язей [Баженов і ін., 1989]. Зіставленням властивостей градієнта потенціальної енергії та аналізу його напряму по відношенню до гіперплощин лінеаризованих обмежень можна ідентифікувати критичні та інваріантні стани механічної системи. При цьому для перевірки рівноваги системи буває корисно застосовувати принцип можливих переміщень [Ланцош, 1965], який дозволяє встановити момент включення або виключення в'язі. Згідно з цим принципом у випадку рівноваги системи на тих можливих нескінченно малих переміщеннях, при яких навантажена система відокремлюється від однієї або декількох із її односторонніх в'язей, сумарна віртуальна робота зовнішніх сил від'ємна або, в частинному випадку, дорівнює нулю.

Необхідно також зазначити, що під методами нелінійного програмування в теперішній час розуміють сукупність методів, що дозволяють мінімізувати деякі функціонали за певних обмежень або безпосередньо знаходити розв'язок систем нелінійних рівнянь і нерівностей. Часто ці задачі і методи їх розв'язання виявляються еквівалентними.

Цікавою є доля наукової спадщини Н.М. Гернет. Найпростіші з її результатів (випадок скінченних нерівностей і невироджених функціоналів) увійшли в підручники варіаційного числення; інші залишалися маловідомими. Проблема екстремуму в замкнених областях із включенням багатьох результатів Н.М. Гернет найдокладніше розглядалася в підручнику Н.М. Гюнтера (1871-1941) [Гюнтер, 1941], але він вийшов у світ під час Другої світової війни і більша частина накладу підручника була втрачена. Та й сама книга «Про основну найпростішу задачу варіаційного числення», видана малим накладом у 1913 р., швидко стала бібліографічною рідкістю. У 1937 р. деякі з результатів Н.М. Гернет перевідкрив американський математик Валентайн (Valentine F.A.), але і роботи Валлентайна не користувалися великою популярністю до 50-х років XX ст., допоки потреби теорії управління, що почала швидко розвиватися, не привернули увагу математиків до варіаційних задач в замкненій області. Тільки тоді виявилося, що такі важливі проблеми, як пошук найкращих законів руху і програм управління для ракет, штучних супутників Землі та інших технічних об'єктів, можуть розглядатися як варіаційні задачі, але із обов'язковим урахуванням обмежень на самі шукані функції та їхні похідні. Щодо першої половини XX ст., то методи варіаційного числення дуже рідко використовувалися в техніці. Варіаційне числення вивчалося в університетах здебільшого для потреб фізики, в технічних навчальних закладах воно не викладалося і майже ніколи не застосовувалося для задач вибору найкращих конструкцій, законів управління і т.п.


Микола Максимович Гюнтер
(1871 – 1941)

Використання варіаційного числення, перш за все, було важким через те, що технічні задачі майже завжди приводили до необхідності пошуку екстремуму в замкненій області; в підручниках методи вирішення таких задач майже не викладалися, а роботи Н.М. Гернет і Валлентайна були практично невідомі не тільки інженерам, а й більшості математиків. Крім того, існував і важкоздоланий психологічний бар'єр, який зашкодив проникненню абсолютно нових методів розрахунку до широких верств інженерів. Можливо, що цей бар'єр був зумовлений тим, що варіаційне числення включалося лише в університетські підручники і на досить абстрактному рівні; інженерам воно здавалося незрозумілою «чистою» математикою.

9.2. Принцип максимума Понтрягіна

Оптимальне управління можливе за неповного знання.
В.В. Налімов

Психологічний бар'єр менше позначався в абсолютно нових галузях техніки - таких як ракетна і космічна техніка. Не випадково, що саме в них, починаючи з 1950-х років, почали особливо широко застосовуватися нові варіаційні методи, розробка яких пов'язана, перш за все, з ім'ям академіка Л.С. Понтрягіна (1908–1988).

Зіткнувшись з необхідністю (характерною для технічних задач) пошуку екстремуму в замкнених областях, Л.С. Понтрягін розробив особливий метод, що отримав в подальшому широку популярність під не зовсім вдалою назвою «принцип максимуму». Назва пов'язана з тим, що функція $u(t)$, що доставляє екстремум функціоналу в замкненій області, визначається за методикою Л.С. Понтрягіна з умови максимуму гамільтонової функції H по змінній u.

Лев Семенович Понтрягін (1908—1988)

Олександр Аронович Фельдба́ум (1913 - 1969)

Відзначимо, що роботи Л.С. Понтрягіна по «принципу максимуму» ґрунтувалися на його спільних дослідженнях з видатним теоретиком і практиком систем управління О. А. Фельдбаумом (1913-1969). О.А. Фельдбаум вперше у 1953-55 рр. звернув увагу на специфіку задач оптимізації для лінійних систем, помітив, що управління в цьому разі проходить цілком по границях допустимої області, стрибком переходячи від нижньої границі до верхньої, довів теорему про кількість перемикань («теорема про n інтервалів»), що лежить в основі застосувань, і привернув до цієї проблеми увагу математиків.

«Принцип максимуму» був вперше висунутий Л.С. Понтрягіним як гіпотеза у 1956 р. і відразу ж мав широке застосування у розв'язанні різних технічних задач оптимізації. Доведення «принципу максимуму» було здійснено дещо пізніше.

Принципових відмінностей між методами варіаційного числення (з урахуванням результатів Н.М. Гернет) і «принципом максимуму» немає. Відмінності полягають лише в позначеннях і в методиці доведень, які в «принципі максимуму» значно складніші. Теореми «принципу максимуму» стосуються об'єктів, диференціальні рівняння яких записані в нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,\ldots,x_n,u)\,; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1,\ldots,x_n,u)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

де u – функція, яку називають управлінням. Обмеження накладені тільки на управління:

$$|u| \le 1\,, \tag{26}$$

а функціоналом, мінімум якого шукається, є час переходу об’єкта (25) з одного заданого стану в інший. Л.С. Понтрягін запропонував ввести проміжну функцію:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i\,, \tag{27}$$

де $\psi_i(t)$ - допоміжні змінні, що задовольняють рівняння

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{28}$$

і довів, що мінімум часу переходу забезпечить управління, яке доставляє максимум функції H (теорема про максимум). В загальному випадку із теореми про максимум випливає, що всередині допустимої області, окресленої нерівністю (26), має виконуватися рівняння:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \tag{29}$$

яке разом з n рівняннями (25) і n рівняннями (28) дозволяє визначити $2n+1$ функцій (екстремалей) $x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_n$ і $u(t)$, що доставляють екстремум всередені допустимої області. Для точок спряження екстремалі і границі в [Понтрягин і ін., 1961] наведені «умови стрибка», аналогічні до умов, знайдених раніше Н.М. Гернет.

Найцікавішим є випадок, коли в рівняння (25) управління u входить лінійно, тобто вони мають вигляд:

$$\dot{x}_i = g_i(x_1,\dots,x_n) + uh_i(x_1,\dots,x_n). \qquad (30$$

В цьому разі очевидно, що за наявності обмеження (26) максимум проміжної функції H досягається на границі області, а конкретно - на функції:

$$u = \operatorname{sign}\sum_{i=1}^{n} \psi_i h_i. \tag{31}$$

Всі результати легко узагальнюються і на випадок кількох керуючих впливів $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Власне, саме окремий випадок управлінь, що входять в рівняння (25) лінійно, як раз і обумовив популярність «принципу максимуму». Цей окремий випадок часто зустрічається на практиці і водночас для нього «теорема про максимумі» відразу дозволяє визначити структуру управління (31), а потім і точки перемикання від $u = +1$ до $u = -1$ і навпаки.

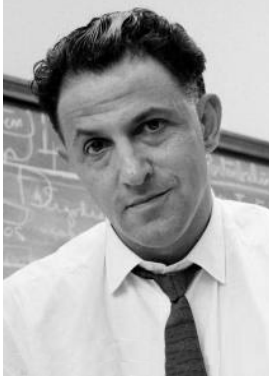
Для загального випадку, коли рівняння (25) не є лінійними по u, «принцип максимуму» не дає нічого зручнішого, ніж використання теореми Н.М. Гернет: точки переходу від екстремалей до границі допустимої області $u = \pm 1$ треба знаходити за допомогою «умов стрибка», а це складніше, ніж використання умов спряження, наведених в [Гернет, 1913] і [Петров, 1977].

Докладний порівняльний аналіз переваг і недоліків методів розв'язання задач оптимізації, заснованих на варіаційному численні і на «принципі максимуму» з вказівками, в яких випадках краще використовувати той чи інший метод, наведений в монографії [Петров, 1977].

Розробка Л.С. Понтрягіним і його колегами «принципу максимуму», викладеного в [Понтрягин і ін., 1961], стала важливим і високо оціненим внеском в науку.

Негативну роль зіграло наведене в [Понтрягин і ін., 1961, с. 264-265] твердження про непридатність методів варіаційного числення для вирішення задач оптимізації в замкнених областях, оскільки дисертація Н.М. Гернет [Гернет, 1913] і підручник Н.М. Гюнтера [Гюнтер, 1941] залишилися, мабуть, невідомими Л.С. Понтрягину. Зауважимо, що Л.С. Понтрягін багато і неодноразово вказував на хибність його тверджень про варіаційне числення, наведених в [Понтрягин і ін., 1961, с. 264-265]. Однак, незважаючи на всі ці заперечення, твердження про неможливість для варіаційного числення розв'язати задачу на екстремум в замкненій області в незмінному вигляді повторювалося в другому і в усіх наступних виданнях монографії [Понтрягин і ін., 1961]. Адже авторитет Л.С. Понтрягіна був великим і цілком заслуженим.

Постає цікаве питання - чому Л.С. Понтрягін відмовлявся виправити своє невірне судження про можливості варіаційного числення, незважаючи на те, що багато обізнаних людей вказували йому на помилку? Відповідно до однієї з оповідок, на пропозицію виправити помилку Л.С. Понтрягін відповів: «Монографія [Понтрягин і ін., 1961] - це класика. А класику не виправляють». В результаті методикою «принципу максимуму» користувалися навіть при розв'язуванні тих задач, в яких методи варіаційного числення вели до мети набагато швидше і простіше.



Річард Ернст Беллман, англ. Richard Ernest Bellman (1920 - 1984)

У США все відбувалося простіше: результати Н.М. Гернет, як зазначалося, були у 1937 р. перевідкриті американським математиком Валентайном ([Петров, 1977, с. 271]). Напевно, Валентайн не був знайомий з роботами Н.М. Гернет. Він також ввів заміну змінних для перетворення замкнені області у відкриту, використавши підстановку, дуже схожу на застосовану Н.М. Гернет. Тому американські дослідники від самого початку з успіхом використовували методи варіаційного числення для розв'язання задач оптимізації як у відкритих областях зміни змінних, так і в замкнених областях, з урахуванням обмежень у вигляді нерівностей [Атанс, 1968], [Брайсон, 1972], [Исследование..., 1959], а «принципом максимуму» користувалися тільки там, де він дійсно був корисним і зручним.

Трохи пізніше за Л.С. Понтрягіна американський математик Річард Беллман (Bellman, 1920–1984) розробив ще один цікавий метод оптимізації в замкнених областях, що отримав назву «динамічне програмування». Монографія Р. Беллмана під цією назвою вийшла у 1957 р., а у російському перекладі – у 1960 р. [Беллман, 1960]. Методи Л.С. Понтрягіна, Р. Беллмана та їхні численні модифікації в подальшому стали називати «некласичними варіаційними методами», або «теорією оптимального управління», протиставляючи їх «класичному варіаційному численню» [Алексеев і ін., 1979], [Янг, 1974]. Підстав для такого протиставлення немає - і в рамках класичного варіаційного числення були розроблені методи, що дозволяють вирішувати задачі на екстремум в замкненій області та інші задачі оптимального управління. Інша справа, що специфіка практичних задач оптимізації змусила детальніше розробити ті розділи варіаційного числення, на які до другої половини XX ст. не звертали великої уваги.

НАРИС 10

ВІДРОДЖЕННЯ ПРЯМИХ МЕТОДІВ. СТАНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Математика – це мистецтво називати різні речі одним ім'ям.

Ж.А. Пуанкаре

10.1. Встановлення зв'язку теорії рівнянь в частинних похідних з варіаційними задачами. Принцип Діріхле

У другій половині XIX ст. був виявлений глибокий зв'язок між деякими проблемами теорії рівнянь з частинними похідними і варіаційними задачами. П. Лежен-Діріхле показав [Dirichlet, 1876], що розв’язок крайової задачі для рівняння Лапласа можна звести до розв’язання деякої варіаційної задачі, і висунув так званий принцип Діріхле, що дозволяє робити висновок про існування розв’язку крайової задачі із існування розв'язку варіаційної задачі.

М.В. Остроградський у 1834 р. показав, що задача варіаційного числення про екстремум кратних інтегралів еквівалентна задачі розв'язання деякого диференціального рівняння математичної фізики. Дійсно, якщо

$$I=\iint_G F(x,y,z,p,q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

де

$$z=z(x,y),\quad p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

то

$$\Delta I=\iint_G [F(x,y,z+\delta z,p+\delta p,q+\delta q)-F(x,y,z,p,q)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_G\left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial p}\delta p+\frac{\partial F}{\partial q}\delta q+R\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Необхідна умова екстремуму:

$$\delta I=\iint_G\left(\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial p}\delta p+\frac{\partial F}{\partial q}\delta q\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

Застосовуючи формулу Остроградського, можна дістати

$$\iint_G\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right)\delta z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

звідки, в припущенні неперервності підінтегральної функції, випливає

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0.$$

Варіаційна задача про екстремум подвійного інтеграла виявлялася, таким чином, еквівалентною крайовій задачі для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку.

Наприклад, гармонічна функція, що є розв’язком задачі Діріхле

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

буде водночас давати екстремум подвійного інтеграла

$$I=\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

На цю обставину звернули увагу низка вчених: Гаусс (1840), Томсон (1847) і, нарешті, німецький математик Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле (1805-1859). Можливості, пов'язані з відкриттям такої еквівалентності, були високо оцінені. Фізичний сенс цього явища в просторовому випадку встановлюється легко: якщо u - потенціал швидкості усталеної течії однорідної нестисливої рідини, то відповідне рівняння буде

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Шуканий розв’язок u_0 (серед всіх функцій, які приймають на границі області задані значення) перетворює в мінімум інтеграл

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

що відповідає мінімуму кінетичної енергії.

Ріман, який довідався про цей факт з лекцій Діріхле, назвав його принципом Діріхле. Назва збереглася. Висновки він поширив на введені нимріманови поверхні, які, як видно, зберегли його ім'я. Для Рімана є очевидним (мабуть, з фізичних міркувань), що для будь-якої гармонічної функції досить задати її значення на границі області, щоб мати її однозначну визначеність всередині області.


Йоганн Петер Густав Лежен-Діріхле, нім. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)


Георг Фрідріх Бернгард Ріман, нім. Georg-Friedrich-Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Цікаво, що Діріхле був одружений з Ребекою Мендельсон-Бартольді, сестрою відомого композитора Ф. Мендельсона. У 1855 р. Діріхле став спадкоємцем Гаусса на посаді професора вищої математики в Геттінгенському університеті.

Розглянемо найпростіший випадок крайової задачі Діріхле для однолистого кола. Нехай задана функція розподілу крайових значень $u(\psi)$ - неперервна функція кута. Задача зводиться до встановлення теореми існування: всередині кола існує одна і тільки одна неперервна функція u, що неперервно наближається до заданих крайових значень і задовольняє рівняння $\Delta u=0$.

Розглянемо інтеграл

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

який визначений всередині кола і в будь-який його точці має сенс. Всі значення цього інтеграла скінченні і, очевидно, невід'ємні. Тоді існує невід'ємна нижня грань його значень для всіх можливих *u*. Ця грань досягається при деякому *u*, тобто

$$\delta\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

Тоді рівняння

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

є необхідною і достатньою умовою перетворення в нуль першої варіації.

Це міркування, що стало поштовхом до формування в роботах Рімана геометричної теорії функцій комплексної змінної, виявилося вразливим у вихідному положенні. З'ясувалося, що неможливо дійти висновку про існування гармонічної функції, спираючись на варіаційну задачу, оскільки можна навести приклади таких задач, які не допускають ніякого розв’язання.

Карл Готфрід Не́йман
нім. Carl Gottfried Neumann
(1832 – 1925)

Карл Герман Амандус Шварц.
нім. Karl Hermann Amandus Schwarz
(1843 – 1921)

Уже Б. Ріман чітко розумів необхідність доведення існування розв’язку варіаційної задачі і накреслив шляхи такого доведення. Однак його міркування були нестрогими, і Веєрштрасс (1895) [Weierstrass, 1894-1927, т. 2, с. 49-54] виступив з критикою принципу Діріхле. Він показав на прикладі, що є варіаційні задачі, розв’язку яких у заданому класі функцій не існує, і тим самим вказав на необхідність в кожному конкретному випадку доводити існування розв’язку варіаційної задачі. Веєрштрасс ще за життя Рімана довів, що з факту існування нижньої границі вказаного вище інтеграла не випливає, що ця границя досягається в класі допустимих функцій. Знаменитий приклад Веєрштрасса про те, що ламана, яка з'єднує точки площини, менша за будь-яку криву, що проходить через ці точки, хоча до сімейства цих кривих не належить (рис. 1), був оприлюднений тільки в 1869 р., але був відомий Ріману, який не зміг дати переконливого доведення своїх результатів, заснованих на застосуванні принципу Діріхле.

Рис. 1

Це вдалося зробити його учневі Нейману (1884) і учневі Веєрштрасса Шварцу, які в своїх доведеннях не вдавалися до варіаційних методів.

В наш час принцип Діріхле на площині формулюється в такому вигляді: задана область G, границя якої γ складається з жорданових кривих. Нехай g - функція, неперервна в $G+\gamma$, кусково-гладка в G і має скінченний інтеграл Діріхле

$$D[g]=\iint_G\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Розглянемо клас всіх функцій φ, які є неперервними в $G+\gamma$, кусково-гладкими в G і приймають на γ ті ж граничні значення, що і функція g. Тоді задача знаходження функції φ, для якої інтеграл $D[\varphi]$ досягає свого мінімуму, має єдиний розв'язок $\varphi=u$. Функція u є розв'язком граничної задачі для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

і заданих на γ граничних значень g.

Аж до недавнього часу не було єдиного трактування принципу Діріхле. Частина математиків називала принципом Діріхле факт існування і єдиності розв'язку першої крайової задачі для рівняння Лапласа, інша частина - метод доведення існування розв'язку шляхом зведення граничної задачі до варіаційної. Ця плутанина у означеннях пояснюється такими обставинами. Спочатку під принципом Діріхле розуміли твердження про існування розв’язку граничної задачі Діріхле. Такого роду формулювання можна знайти в підручнику Пуанкаре з теорії ньютонівського потенціалу, в коментарях Грубе до лекцій Діріхле і т.д. Тільки після того як проти доведення принципу Діріхле були висунуті серйозні заперечення, а теореми існування були доведені іншими шляхами, принципом Діріхле стали називати метод, що дозволяє по наявності зв'язку між граничною і варіаційною задачами судити про існування розв'язку граничної задачі. Так, характеризуючи лекції Діріхле з теорії потенціалу, Клейн пише ([Клейн, 1937, с. 133]): «Тут же викладений і так званий принцип Діріхле, тобто метод, що дає можливість робити висновок про існування шуканого розв’язку на підставі тієї обставини, що серед всіх функцій v, що приймають на границі задані значення, шуканий розв'язок перетворює в мінімум інтеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}T.$$

Тому, коли у 1900 р. Д. Гільберт за допомогою прямих методів варіаційного числення зумів обґрунтувати такий хід міркувань, то цей факт було розцінено як порятунок принципа Діріхле. Сучасне означення принципу Діріхле включає в себе як твердження існування розв'язку крайової задачі, так і метод доведення цього твердження.

Принцип Діріхле виник при вирішенні задач, пов'язаних з теорією потенціалу. Розвиток фізики і техніки в XIX ст. привів до постановки цілого ряду складних задач. Кожна фізична задача вимагала для свого опису математичної моделі. І якщо раніше питання про існування розв’язків не виникало або тому, що розв’язки шукалися в явному вигляді, або тому, що їх існування здавалося очевидним, то тепер математики почали розуміти, що оскільки математична модель ніколи в точності не збігається з самим фізичним явищем, то необхідно кожен раз доводити існування розв’язку тієї чи іншої задачі, не апелюючи до фізичної очевидності.

Таким чином виявилася різниця між екстремальною проблемою в скінченно-вимірному точковому просторі і в просторі функціональному. У першому послідовність точок неодмінно допускає граничні точки. У другому з послідовності функцій не завжди вдається виділити підпослідовність, що сходиться до деякої граничної функції. Для подолання подібних труднощів у варіаційному численні знадобилося знову розробити прямі методи.

Відродження прямих методів у варіаційному численні відбулося на початку XX ст. Застосовані Л. Ейлером в його монографії 1744 р. [Эйлер, 1934] при виведенні рівняння, що носить його ім'я, вони були надовго забуті після публікації алгоритму Лагранжа. У другій половині XVIII і в XIX ст. вчені, і Ейлер також, використовували тільки метод варіацій. В 1900 р. у зв'язку з проблемою обгрунтування принципу Діріхле Д. Гільберт знову звернувся до прямих методів [Гаусс, 1956]. В 20-й зі своїх «Математичних проблем» у 1900 р. [Проблемы Гильберта, 1969] він стверджував, що загальний підхід до доведення існування розв’язку крайових задач для рівнянь в частинних похідних полягає у зведенні їх до варіаційних задач. При цьому Гільберт вказав на необхідність узагальнення поняття розв'язку - ідею, яка зіграла у XX ст. значну роль як у розвитку варіаційного числення, так і в теорії рівнянь в частинних похідних. Він висунув проблему [Проблемы Гильберта, 1969, с. 55]: «Чи не допускає розв’язку кожна регулярна варіаційна задача, якщо тільки на дані граничні умови накладені певні припущення ....і якщо в разі необхідності самому поняттю розв’язку надати розширене тлумачення».

Миха́йло Васи́льович Острогра́дський
(1801 – 1861)

Давид Гільберт,
нім. David Hilbert
(1862 – 1943)

Обґрунтуванню принципу Діріхле Гільберт присвятив дві роботи [Hi1bert,1900], [Hi1bert, 1904]. У них він відродив прямі методи варіаційного числення, розвинені Л. Ейлером (вони детально описані в [Рыбников, 1949], [Дорофеева, 1970–1972]), які полягають у тому, що варіаційна задача розглядається як гранична при $n \to \infty$ для задачі про екстремум функції скінченного числа n змінних.

10.2. Від Ейлера до сучасних обчислювальних підходів

Не допустити помилок означає прожити неповноцінне життя.
С. Джобс

10.2.1. Варіаційне числення Ейлера-Лагранжа

Варіаційне числення почалося у 1696 р. з відомого виклику, пов'язаного із задачею про брахістохрону, що призвело до нескінченних суперечок між братами Бернуллі. Ейлер [Euler, 1744] у 1744 р. дав загальне розв’зання варіаційних задач у вигляді диференціального рівняння. Одинадцять років по тому дев'ятнадцятирічний Лагранж надіслав у знаменитому листі до Ейлера елегантне підтвердження цього рівняння. Дивовижний внесок Ейлера щодо аналітичних і чисельних рішень диференціальних рівнянь, зокрема його Institutiones Calculi Integralis [Euler, 1768, 1769, 1770] згодом додали останній штрих до теорії.

У 1696 р. Й. Бернуллі запропонував своєму братові Якобу вирішити таку проблему: при заданих двох нерухомих точках *A* і *B* у вертикальній площині знайти криву *AMB*, таку, що тіло, ковзаючи по ній під дією сили тяжіння починаючи з *A*, дістанеться до *B* за найкоротший час, або латиною: «Datis in plano verticali duobus punctis *A* & *B*, assignare Mobili *M* viam *AMB*, per quam gravitate sua descendens, & moveri incipiens a puncto *A*, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum *B*» (рис. 2). Ще Галілей у 1638 р. знав, що найкоротший шлях пряма лінія між *A* і *B* не є найшвидшим і що краще почати з більшого нахилу, щоб збільшити швидкість з самого початку. Але справжня форма кращої кривої залишалася загадкою майже століття.

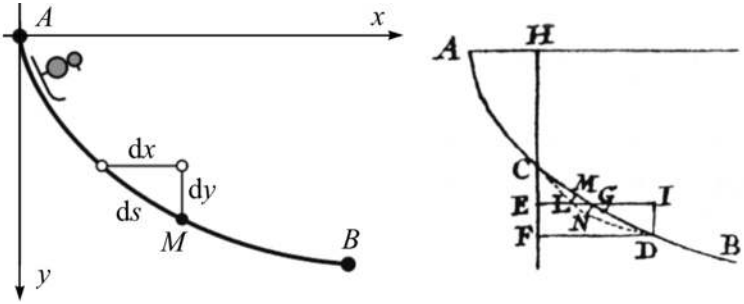


Рис. 2. Задача і її розв’язок за оригінальним рисунком Якоба Бернуллі

Для надання задачі математичної форми, зауважимо, що час проходження вздовж дуги малої довжини d*s* дорівнює $\mathrm{d}J = \dfrac{\mathrm{d}s}{v}$. Після підстановки $v = \sqrt{2gy}$ (Галілей) отримаємо задачу про знаходження функції $y(x)$ при $y(a) = A,\ y(b) = B$ такої, що інтеграл

$$J=\int_a^b \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gy}}=\int_a^b \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy}}=\min, \tag{1}$$

де $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Ейлер [Euler, 1744] стверджував: якщо загальна варіаційна задача задана як

$$J=\int_a^b Z(x,y,p)\,\mathrm{d}x=\min \quad \text{або} \quad \max, \tag{2}$$

де $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, то оптимальний розв'язок задовольняє рівняння

$$N-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P=0, \tag{3}$$

де $N=\frac{\partial Z}{\partial y}$, $P=\frac{\partial Z}{\partial p}$.

Оскільки P в загальному випадку містить $p=y'$ і диференціюється ще раз, то маємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку, розв'язання якого може бути утрудненим. У разі, коли Z не залежить від x, тобто $\mathrm{d}Z=N\mathrm{d}y+P\mathrm{d}p$, Ейлер знайшов елегантний спосіб зниження порядку [Euler, 1744]. За допомогою елементарних дій він отримав

$$\underbrace{N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}p}_{\mathrm{d}Z}-\underbrace{(P\,\mathrm{d}p+P\,\mathrm{d}p)}_{\mathrm{d}(p\cdot P)}=0 \;\Rightarrow\; Z-p\frac{\partial Z}{\partial p}=\text{const}. \tag{4}$$

Як приклад [Euler, 1744] розглядаються задачі про знаходження кривої найменшої довжини та про визначення мінімуму енергії деформації. В першому випадку шукається крива з початком у точці $y(a)=A$ та кінцем у точці $y(b)=B$ найменшої довжини, тобто

$$J=\int_a^b \sqrt{1+p^2}\,\mathrm{d}x=\min. \tag{5}$$

Тут $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0$, тобто $P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ має бути сталою величиною, а отже і $p=\text{const}$. Зрозуміло, що розв'язок є прямою лінією.

Ейлер пояснює, що той же результат справедливий для будь-якої задачі, де Z залежить тільки від p.

Цікавим випадком є друга задача $J=\int_a^b \frac{p^2}{2}\mathrm{d}x=\min$, в якій рівняння (3) має вигляд

$$-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0\,. \tag{6}$$

Тут J з точністю до множника є енергію деформації натягнутої струни. Якщо на струну діє поперечна сила $f(x)$ (рис. 3), дістанемо задачу

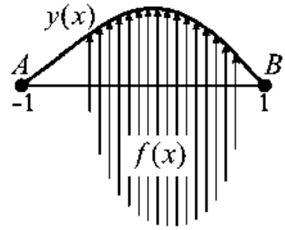


Рис. 3

$$J=\int_a^b\left(\frac{p^2}{2}-f\cdot y\right)\mathrm{d}x=\min\,,$$

яка зводиться до

$$-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=f(x)\,. \tag{7}$$

Цей випадок був занадто простим для Ейлера, і він про нього не згадує, але його поширення на вищі розмірності виявилося важливим в майбутньому.

Ще одним прикладом є проблема брахістохрони ([Euler, 1744, §34]). Для (1) отримаємо з (4)

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy}}-\frac{p^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+p^2}}=C \text{ або } 1=\sqrt{1+p^2}\sqrt{2gy}\cdot C\,. \tag{8}$$

І зараз не кожен відразу вкаже криву з такими властивостями. Відзначимо, що Й. Бернуллі прийшов до цього рівняння в результаті типової для нього блискучої здогадки, застосувавши закон світлового заломлення Снелліуса-Декарта. Оскільки v задовольняє рівність

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{const}=\frac{1}{v}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{2gy}},$$

то на підставі (8) цей закон виконується всюди і згідно з принципом Ферма розв'язок є найшвидшим шляхом.

Значна частина роботи Ейлера присвячена аналітичним і чисельним методам розв'язання інтегральних та диференціальних рівнянь. Ця робота завершується в трьох томах Institutiones Calculi Integralis [Euler, 1768].

Застосуємо деякі з методів Ейлера до задачі про брахістохрону (8). Розв'яжемо рівняння при $p=y'$ і отримаємо

$$1+p^2=\frac{1}{C^2 y} \quad \text{або} \quad p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{1}{C^2 y}-1}=\sqrt{\frac{c-y}{y}}, \tag{9}$$

де $c=C^{-2}$. Ейлер (і брати Бернуллі) стверджують, що, коли це можливо, змінні x і y мають бути розділені, що приводить до $\sqrt{\frac{y}{c-y}}\cdot\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$.

Цей вираз треба проінтегрувати з обох сторін знаку рівності. Для таких інтегралів Ейлер знайшов багато підстановок. Тут найпростіше підставити $y = c \cdot \sin^2 u$, так що знаменник стає $c \cdot \cos^2 u$ і квадратний корінь зникає. Дістанемо

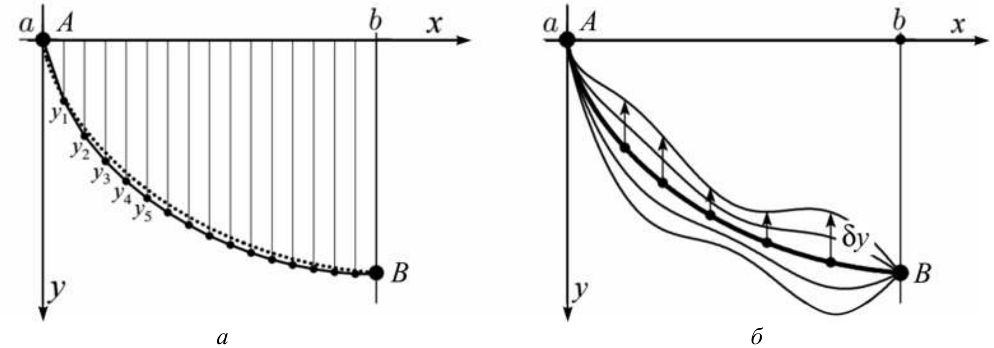
$$y = c \cdot \sin^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\cos 2u, \quad x - x_0 = cu - \frac{c}{2}\sin 2u,$$

тобто розв'язком є рівняння циклоїди («curvam quaesitam esse Cycloidem»).

У тих випадках, коли неможливо отримати розв'язок аналітично, Ейлер пропонує обчислювати розв'язок наближено [Euler, 1768, розділ Secunda, §650]. Рівняння (9) записується в загальному вигляді

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = V(x, y) \text{ так, що } x_{i+1} = x_i + \Delta x, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot V(x_i, y_i) \tag{10}$$

і послідовно при $i = 1, 2, 3, ...$ чисельно обчислюється наближений розв'язок. Чим меншим є крок Δx, тим кращим буде наближення. На рис. 4,*а* показано чисельний результат обчислення за допомогою цієї формули 16 кроків для задачі про брахістохрону. Це перший з так званих різницевих методів, які домінували у всіх наукових розрахунках протягом двох століть.



а *б*

Рис. 4. Чисельне розв'язання задачі про брахістохрону методом Ейлера: *а* - точний розв'язок (пунктирна лінія); *б* - лагранжеві варіації $\varepsilon\delta y$ функції *y* при $\varepsilon = -1, -1/2, 1/2, 1$

12 серпня 1755 р. Лагранж (Людовіко де ла Гранж Турньє), якому на той час було 19 років, надіслав листа до Л. Ейлера і 6 вересня отримав захоплену відповідь. Ідея Лагранжа така: припустимо, що $y(x)$ є оптимальним розв'язком і виберемо довільну варіацію $\delta y(x)$. Якщо додати цю варіацію (для простішого розуміння помножену на ε) до $y(x)$ (див. рис. 4, *б*) і підставити результат в (2), цей інтеграл має зростати у всіх напрямках, тобто похідна від

$$J = \int_a^b Z(x, y + \varepsilon\delta y, p + \varepsilon\delta p)\mathrm{d}x = \min \tag{11}$$

по ε має дорівнювати нулю при ε = 0. Продиференціюємо

$$\left.\frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b (N \cdot \delta y + P \cdot \delta p)\mathrm{d}x = 0. \qquad (12)$$

Оскільки δp є похідною δy, то інтегруємо частинами:

$$\int_a^b (N - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P) \cdot \delta y\, \mathrm{d}x = 0 \text{ -- "слабкий розв'язок".} \qquad (13)$$

Оскільки δy довільна, то для всіх x

$$N - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P = 0 \text{ -- "сильний розв'язок".} \qquad (14)$$

Цей останній крок, тривіальний висновок юного першовідкривача, пізніше зумовив дуже великі труднощі.

Перехід шляхом диференціювання від варіаційної задачі (11) до (12), а потім інтегруванням частинами до (13) і, нарешті, до (14) є центральною магістраллю варіаційного числення. У наш час (12) назвуть «похідною J за напрямком», функцію $\delta y(x)$ в (13) називатимемо «тестовою функцією». Це рівняння буде відправною точкою методу Гальоркіна. Якщо вдається розв'язати (14), то розв'язана вихідна варіаційна задача `a la Euler. Подальший розвиток теорія дістала з виходом у 1788 році лагранжевої M'ecanique analytique, де вищевказана «магістраль» з'єднує лагранжіан механічної системи (різниця потенціальної і кінетичної енергії) з диференціальними рівняннями руху. Це пізніше привело до гамільтонової механіки.

10.2.2. Рівняння Лапласа і принцип Діріхле

З Начал Ньютона відомо ще з 1687 р., що небесні тіла рухаються під дією сил, що підкорюються закону обернених квадратів, а з роботи Ейлера 1749 р., що їх рух підкорюється диференціальним рівнянням другого порядку з відповідним членом

$$f_x \approx \frac{x-\xi}{r^3}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Але це справедливо тільки для точкових або, щонайбільше, абсолютно сферичних тіл. Якщо тіло має іншу форму (рис. 5), то сили тяжіння визначаються досить складними виразами

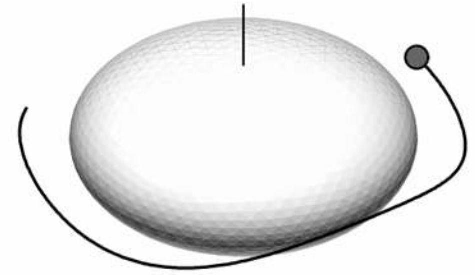


Рис. 5. Тяжіння несферичного небесного тіла

$$f_x = \iiint \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{x-\xi}{r^3} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta, \qquad (15)$$

і аналогічно для f_y і f_z. Лаплас [Laplace, 1785] запропонував ввести потенціал

$$V = \iiint \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{1}{r} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta, \text{ і, отже } f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad (16)$$

і аналогічно для f_y і f_z. Якщо ще раз продиференціювати (15) по x (і y і z відповідно), то для V дістанемо вираз

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{17}$$

який має назву *рівняння Лапласа*.

В подальшому це рівняння отримало безліч важливих застосувань, і не тільки на небесах, а й на землі:

- теорія стаціонарного теплообміну (Фур'є [Fourier 1822]);
- теорія магнетизму (Гаусс [Gauss, 1839]);
- теорія електричних полів (В. Томсон [Thomson, 1847]);
- конформні відображення (Гаусс [Gauss, 1825]);
- в комплексному аналізі (Коші [Cauchy, 1825], Ріманн [Riemann, 1851]);
- двовимірний вихровий рух рідини (Гельмгольц [Helmholtz 1858]).

Поява такої кількості нових напрямів досліджень зумовили заяву молодого Рімана: «Повністю автономна математична теорія, яка ... прогресує безупинно, якщо діють сили тяжіння або Electricitat, або магнетизм, або баланс тепла».

Розглянемо таку задачу. Нехай Ω - обмежена область, а F - довільна функція, задана на границі $\partial\Omega$. Знайти функцію $w(x, y)$ з $\Delta w = 0$, таку, що $w = F$, якщо $(x, y) \in \partial\Omega$ (рис. 6).

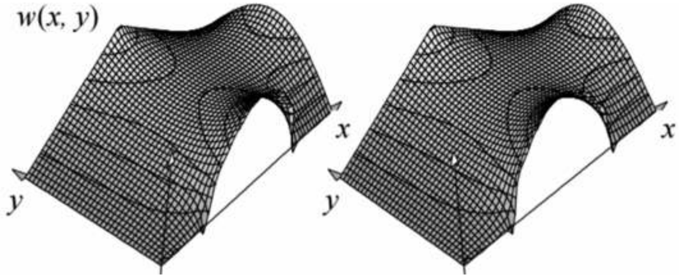


Рис. 6. Стереограма розв'язку задачі $\Delta w=0,\ 0 \le x \le \Phi,\ \Phi=1.618...,\ 0 \le y \le 1,\ F(x,0)=\sqrt{\left(-2\cos\frac{2\pi x}{L}\right)^{+}}$,

$$F(x,1)=\min\left(\frac{\pi^2 x}{4L}, \frac{\pi^2 (L-x)}{4L}\right),\ F(0,y)=0, F(\Phi,y)=\sin \pi y$$

Розв'язання Рімана грунтується на тому, що розв'язок задачі (7) для більшої розмірності має вигляд

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right) - f \cdot w \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min \Rightarrow -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f. \tag{18}$$

Це співвідношення було встановлено незалежно Гауссом [Gauss, 1839], В. Томсоном [Thomson, 1847] і Діріхле (в його лекціях, на яких був присутній Ріман). Доведення таке, як наведене вище. Трохи складнішим є перехід від (12) до

(13): перший доданок безпосередньо інтегрується частинами по x, оскільки інтегрування по x є внутрішнім відносно інтегрування по y. Другий доданок треба проінтегрувати частинами по y; змінивши перед цим порядок інтегрування.

Ріман зробив висновок, що для всіх функцій, визначених на Ω із заданим на границі значенням F, інтеграл

$$J(w)=\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

є завжди додатним.

Вибираємо з цих функцій ту, що надає інтегралу найменшого значення.

Інакше кажучи, шлях Ейлера-Лагранжа (11) - (14) проходиться в протилежному напрямку (11) $\Leftarrow$ (14). На відміну від «світу Ейлера», тут розв'язання диференціального рівняння (14) безнадійно важке, а варіаційна задача (11) представляється «тривіальною». Звідси бере початок назва «*принцип Діріхле*», і «*граничні умови Діріхле*».

Зараз, з огляду на минуле, дисертація Рімана вважається однією з найвизначніших подій в історії сучасної математики. Разом з тим довіра до неї була підірвана, коли Веєрштрасс [Weierstrass, 1870] піддав принцип Діріхле критиці, зазначивши, що припущення про обов'язкове існування функції, на якій інтеграл приймає найменше значення, не є обгрунтованим з математичної точки зору. Це було показано на прикладі, який стосувався мінімізації інтегралу від функції однієї змінної:

$$\int_{-1}^{1}(xy')^2\mathrm{d}x=\min,\quad y(-1)=a,\ y(1)=b\,. \tag{20}$$

Зазначимо відразу, що рівняння Ейлера даної задачі $F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$ приводить до диференціального рівняння $x^2y''+2xy'=0$, розв'язок якого при заданих граничних умовах має вигляд $y=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2x}$. Ця функція має розрив на заданому інтервалі і не може вважатися розв'язком варіаційної задачі.

Веєрштрасс розглядав множину функцій $y=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{\mathrm{arctg}(x/\varepsilon)}{\mathrm{arctg}(1/\varepsilon)}$ (графік функції наведений на рис. 7), які відрізняються одна від одної значенням параметра ε.

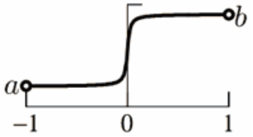


Рис. 7

Похідна цієї функції $y'=\frac{b-a}{2\mathrm{arctg}(1/\varepsilon)}\cdot\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}$, і відповідно інтеграл, який треба мінімізувати є функцією параметра ε:

$$J(\varepsilon)=\left[\frac{(b-a)\varepsilon}{2\mathrm{arctg}(1/\varepsilon)}\right]^2\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{(b-a)\varepsilon}{2\mathrm{arctg}(1/\varepsilon)}\right]^2\left[\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{arctg}(1/\varepsilon)-\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right].$$

Графік залежності інтеграла J від параметра ε наведений на рис. 8. Видно, що інтеграл $J(\varepsilon)$ може бути як завгодно малим, але мінімального значення ніколи не набере, оскільки при $\varepsilon=0$ функція $J(\varepsilon)$ не існує.

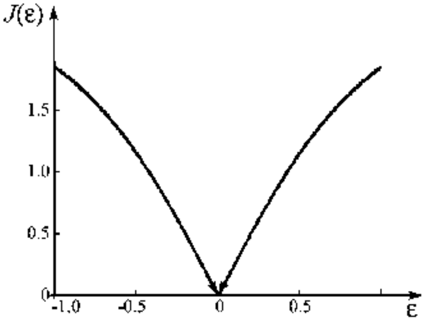


Рис. 8

Зауважимо, що з погляду будівельної механіки до мінімізації такого інтегралу зводиться задача про розтяг стержня, жорсткість якого змінюється від середини до країв за квадратичним законом $EF(x)=EF_0x^2$. Якщо початок координат розмістити посередині стержня, то функціонал Лагранжа матиме вигляд

$$\Pi^{\text{Л}}(u)=\frac{EF_0}{2}\int\limits_{-l/2}^{l/2}x^2u'^2\mathrm{d}x\,.$$

Зрозуміло, що фізичного сенсу така постановка задачі не має, оскільки стержень відразу розірветься посередині, де його жорсткість дорівнює нулю. Тому для нематематика може здатися безглуздою висунута Веєрштрассом вимога математичного обгрунтування принципу, який безумовно можна застосовувати до фізично можливих явищ. Але насправді це не так, що і визнав сам Ріман. Тільки строге математичне доведення може встановити остаточну справедливість математичного твердження і гарантувати, що воно завжди дає адекватне математичне описання фізичного явища.

Ф. Клейн ([Klein, 1926, с. 264]) повідомив, що Ріман відповів Веєрштрасу «мої теореми залишаються, проте, істинними» (Existenztheoreme Sind trotzdem richtig), і що Гельмгольц оголосив «для нас фізиків принцип Діріхле залишається в силі ».

За півстоліття після появи дисертації Рімана Д. Гільберт ([Hilbert, 1900, 1904]) взяв на себе зобов'язання поставити принцип Діріхле на нову основу. Звичайно, контрприклад Веєрштрасса приголомшує, але інтеграл в (20) не є таким самим як у (19). Таким чином, Гільберт зумів незвичайним способом довести існування u безпосередньо з властивостей інтеграла (19).

Дві дисертації, написані під керівництвом Гільберта, включаючи роботи Куранта [Courant, 1912, 1914], згодом поліпшили цю теорію, зробивши її більш простою і повною. Ці дискусії стали додатковою мотивацією для В. Рітца при розробці його методу.

10.2.3. Трактування Рітцем задачі про згин пластинки і принципу Діріхле. Метод Рітца, його поширення і застосування

Головною мотивацією для В. Рітца був конкурс Prix Vaillant у 1907 році, оголошений Паризькою Академією наук в т. 53 журнала für Mathematik und Physik, p. 65. Повідомлення про конкурс надіслав Рітцу його друг Пол Еренфест з метою, щоб «Scheusaltheorie» дисертації Рітца знайшла нове застосування.

Вальтер Рітц,
нім. Walter Ritz
(1878-1909)

Дослідження деформації згину пружної пластини було дуже складною проблемою того часу, поставленою Софі Жермен в кількох статтях, до яких Лагранж і Пуассон додали виправлення і поліпшення. Остаточний прорив був досягнутий у великій статті Кірхгофа [Kirchhoff, 1850], де отримано диференціальне рівняння

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x,y), \qquad (21)$$

із відповідними граничними умовами. Якщо пластина затиснута з усіх боків, то

$$w = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \qquad (22)$$

Рітц працював над багатьма такими проблемами у своїй дисертації, де він намагався пояснити серію Бальмера в спектроскопії (1902). Тому йому здавалося, що він має гарні шанси на успіх в цьому конкурсі.

Перейдемо тепер до публікації в журналі Crelle [Ritz, 1908], з якою Рітц увійшов у безсмертя. Найвідоміший внесок В. Рітца – це вирішальний прогрес для варіаційних задач, який ініціює таким чином важливі алгоритми для сучасних наукових обчислень.

Як і Ріман, пройдемо шляхом Ейлера-Лагранжа у зворотному напрямку і дістанемось, виходячи з (21), варіаційної задачі

$$J = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left((\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})^2 \right) - f \cdot w \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min. \qquad (23)$$

Стандартна процедура («wie man ohne weiteres einsieht») перетворює всі доданки (23) у доданки (21). Треба просто кожного разу виконувати два інтегрування частинами, так що знак мінус в (18) знову зникає. Рітц записав цей вираз у формі

$$J = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f \cdot w \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min,$$

$$J = \iint\limits_{R} \left[\frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f(x,y) \cdot w \right] \mathrm{d}S. \qquad (24)$$

Головна ідея методу Рітца полягає у виборі функцій

$$\psi_1(x,y), \psi_2(x,y), \psi_3(x,y), \ldots \qquad (25)$$

і спробі апроксимувати розв’язок задачі (23) за їхньою допомогою у вигляді лінійної комбінації

$$w(x,y) = a_1 \psi_1(x,y) + a_2\, \psi_2(x,y) + \ldots + a_m\, \psi_m(x,y),$$

$$w_m = a_1 \psi_1 + a_2\, \psi_2 + \ldots + a_m\, \psi_m \qquad (26)$$

з коефіцієнтами $a_1, a_2, \ldots, a_m$, які необхідно знайти. Якість розв'язку залежить, звичайно, від вдалого вибору функцій (25).

У самому Геттингені, де Рітц провів останні роки свого життя і який був тоді головним центром математичних досліджень, важливість винаходу Рітца не була відразу визнана. Жодна з багатьох дисертацій, написаних за Гільберта в ці роки, присвячених принципу Діріхле, не містить посилань на роботу Рітца. Єдиним винятком є стаття Keніга [König, 1912], в якій просто сказано, що Рітц спростив деякі доведення Гільберта. 10 років по тому в знаменитій книзі Гурвіца і Куранта у виносці зазначається: «Фактично, оскільки це доведення існування не є важливим, побудова мінімальних послідовностей не викликає принципових проблем. Наприклад, якщо G – скінченна область, обмежена кривими C без точок розгалуження, ми припускаємо, що G покривається трикутними сітками T_j, причому розміри трикутників зменшуються при збільшенні j. Ми обчислюємо тепер тільки функції φ або $\varphi=\varphi-S$, де різниця $\varphi - \dfrac{x}{x^2+y^2}$ в кожному трикутнику T_j є лінійною функцією. Тоді функція φ_j, асоційована з T_j, є такою, що $D[\varphi]$ має найменше значення з усіх можливих. Вимога про те, що $D[\varphi] = \min$ тепер є проблемою мінімізації із скінченним числом змінних, а саме інтегралів, які залежать від значень φ у вузлах трикутної сітки; цю проблему, безумовно, можна вирішити шляхом зведення до лінійних рівнянь. Той факт, що функції, утворені таким чином, формують послідовності мінімізації, негайно випливає з факту, який легко довести, що можна апроксимувати кожну допустиму функцію φ і відповідний інтеграл Діріхле за допомогою нашої побудови з довільною точністю при досить великому j».

Видно, що Курант мало цікавився методом Рітца і не згадував Рітца взагалі. Його неувага до практичних питань в той час привела до того, що Курант навіть видалив цю виноску з другого видання (1925) книги. Він видалив в той же час історично перший опис того, що пізніше стало одним з найважливіших інструментів наукових обчислень. Йдеться, звісно, про метод скінченних елементів.

Ще сумніше є те, що знаменитий, хоча на той час вже дуже немолодий Релей опублікував статтю [Rayleigh, 1911], в якій звинуватив Рітца в плагіаті і стверджував, що всі ідеї Рітца вже були в його попередній роботі. Це призвело до назви «метод Релея-Рітца», визнаній багатьма вченими. Дуже ретельне вивчення всіх оригінальних робіт, виконане в [Leissa, 2005], ясно показало, що це звинувачення і відповідна назва методу невиправдані.

Після всього сказаного зрозуміло, що в конкурсі Академії перемогла зовсім інша робота.

На відміну від Західної Європи метод Рітца був негайно застосований в Росії, для вирішення складних проблем, пов'язаних з технікою. Над реалізацією методу працювали такі відомі вчені як С.П. Тимошенко, І.Г. Бубнов та Б.Г. Гальоркін.

С.П. Тимошенко (1878-1972), який, у той час працював професором в Київському політехнічному інституті, пізніше в Санкт-Петербурзі, а ще пізніше в

Стенфорді, був першим, хто усвідомив важливість винаходу Рітца для розв'язання прикладних задач [Тимошенко, 1910]: «Ми не будемо розглядати математичні аспекти цього методу: чудова публікація швейцарського вченого Вальтера Рітца була присвячена цьому питанню. Перетворивши проблему інтегрування рівнянь в задачу оцінки інтегралів, В. Рітц показав для великого класу задач, що, збільшуючи кількість параметрів a_1, a_2, a_3, …, можна наблизитись до точного розв'язку задачі. Для проблем, які нас цікавлять, такого доведення не існує, але застосування методу до задач, для яких ми знаємо точний розв'язок, показує, що метод дає дуже хороші результати».

І.Г. Бубнов (1872-1919) був інженером-конструктором, який спеціалізувався на будівництві суден, зокрема підводних човнів. Як і С.П. Тимошенко, він працював в Політехнічному інституті Санкт-Петербурга і мав розраховувати оболонки як елементи конструкції підводних човнів. Зачарований роботами С.П. Тимошенко (Бубнов не цитує роботу Рітца безпосередньо), простотою підходу і точністю результатів, він в своєму посібнику із суднобудування [Бубнов, 1912-1914] навів наближені розв'язання низки проблем.

Іван Григорович Бубнов
(1872-1919)

Основний внесок І.Г.Бубнова в розвиток методу скінченних елементів полягає в тому, що він усвідомив, вивчивши роботу С.П. Тимошенко, нагороджену премією Д.І. Журавського [Bubnov, 1913], що: «... надзвичайно прості розв'язки можна також отримати звичайним шляхом, тобто, не вдаючись до розгляду енергії системи ... ми просто підставляємо розклад для w в загальний диференціальний вираз для рівноваги, множимо отриманий вираз на $\varphi_k dx dy$ і інтегруємо по всьому об'єму тіла, тоді отримуємо рівняння, що зв'язує коефіцієнт a_k з усіма іншими ... і яке ідентичне тим, що знайдені професором Тимошенком».

Це зауваження спростило побудову лінійних систем для обчислення коефіцієнтів і дало алгоритм, який легко запам'ятовується. Бубнов в своєму зауваженні також висунув без пояснень вимогу, щоб координатні функції були ортогональними. Взагалі він використовував для φ_k тригонометричні функції.

Б.Г. Гальоркін (1871-1945) походив з бідної сім'ї і почав працювати вже у віці дванадцяти років як каліграф. Проте, йому вдалося закінчити механічний факультет Санкт-Петербурзького технологічного інституту, після чого він працював в Російському паровозному Союзі і на Китайсько-Східній залізниці.

Борис Григорович
Гальоркін
(1871-1945)

Він також цікавився політикою, був заарештований у 1905 р. за політичну діяльність і посаджений у в'язницю на півтора роки. Це повністю змінило його вподобання, і саме у в'язниці він вирішив присвятити все життя науці. Б.Г. Гальоркін у 1909 р. здійснив наукову поїздку в Європу і відвідав серед інших країн також Швейцарію. Невідомо, чи зустрів він В. Рітца в цій поїздці, але Гальоркін дає точні посилання на обидві статті Рітца в своїй найвідомішій публікації [Галёркин, 1915], яка зазвичай цитується, коли йдеться про метод Гальоркіна, а сам Гальоркін називає свій метод методом Рітца.

У цій статті на перших кількох сторінках Гальоркін викладає метод Рітца, а потім демонструє використання цього методу для наближеного вирішення багатьох цікавих і складних прикладних проблем. Гальоркін зауважує, що координатні функції не обов’язково мають бути ортогональним, в іншому разі виходить додаткова матриця, яка сьогодні називається матрицею мас. Основний внесок цієї статті Гальоркіна полягає у з’ясуванні, що для побудови скінченновимірної системи за алгоритмом Бубнова не потрібен принцип мінімізації. Можна тільки припустити, чому метод в даний час здебільшого називається методом Гальоркіна. Можливо, численні практичні приклади Гальоркіна були більше оцінені, ніж теоретичний аналіз Рітца. Більшість читачів навіть не помітили назви методу в поданні Гальоркіна і перейшли безпосередньо до прикладів, які є сутністю його статті.

10.2.4. Подальше визнання роботи Рітца і створення методу скінченних елементів. Повернення до Ейлера

Майже за три десятиліття після трагічної смерті В. Рітца Р. Курант змінив свою думку і третього травня 1941 року звернувся до Американського товариства математиків [Courant, 1943]. У цьому зверненні Курант дав високу оцінку роботі Рітца: «Спочатку переважав теоретичний інтерес щодо доведень існування, і тільки багато пізніше виникла зацікавленість у практичному використанні, передбачена двома фізиками, Лордом Релеєм і Вальтером Рітцем. Вони незалежно один від одного висловили ідею використання цієї еквівалентності для чисельного визначення розв’язків шляхом наближеної заміни варіаційних задач простішими екстремальними задачами, в яких має визначатися скінченне число параметрів».

«Але тільки вражаючий успіх Вальтера Рітца і його трагічна доля викликали загальний інтерес. В двох публікаціях 1908 і 1909 рр. Рітц, усвідомлюючи свою неминучу смерть від туберкульозу легенів, надав віртуозний підсумок теорії і водночас застосував свій метод до визначення вузлових ліній коливань пластинки, яка до того не мала задовільного тлумачення».

Зрозуміло, що хвиля покотилася у зворотній бік, і роботу Рітца високо оцінив Курант. Крім того, Курант усвідомив важливість виноски у першому томі своєї з Гурвіцем книги [Hurwitz, Courant, 1922]: «Однак труднощі, які вимагають винахідливості і майстерності від фахівця з прикладної математики, полягають в тому, щоб знайти придатні координатні функції». І замість власних функцій, що використовувалися Рітцем як координатні, і тригонометричних функцій, які використовували Бубнов і Гальоркін, Курант запропонував використовувати те, що зараз називається капелюховими функціями (рис. 9).

У двовимірній задачі, кусочно-лінійні функції, які Курант має на увазі, найлегше визначаються на трикутній сітці, на відміну від домінуючого тоді скінченнорізницевого методу: «Замість того, щоб починати з квадратної або прямокутної сітки, ми можемо з самого початку розглянути будь-які поліедральні поверхні з ребрами над довільно обраною (бажано трикутною) сіткою». На рис. 10 наведено кілька прикладів таких капелюхових функцій.

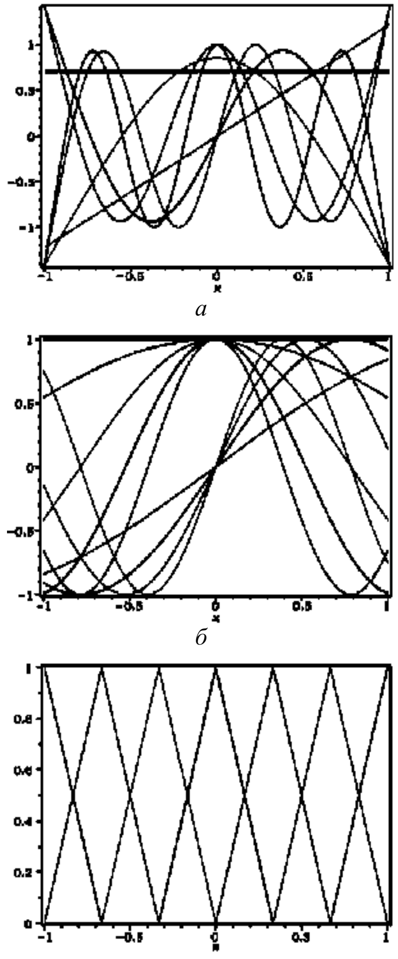
У своєму зверненні, Курант представив перший відомий скінченноелементний розрахунок, показаний на рис. 11. Курант вибрав як модельну задачу квадратну область з отвором (рис. 11 а) і зводив до мінімуму функціонал

$$\int\int (\nabla u)^2 + 2u \;\rightarrow\; \min$$

з u=0 на зовнішній границі і u=c (c - невідома константа) на внутрішній границі. Потім він порівняв результати визначення величини c і загальної жорсткості

$$S = -\int\int u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

при використанні різних координатних функцій. Курант дійшов висновку, що «ці результати показують самі по собі і в порівнянні що узагальнений метод трикутних сіток має свої переваги».



а

б

в

Рис. 9

Термін *метод скінченних елементів* був згодом введений Реєм Клафом в [Clough, 1960], який почав працювати з Джоном Тернером з компанії Боїнг над задачами динаміки конструкцій, і ця робота привела до першого опублікованого описання методу скінченних елементів, без назви, в [Turner et al., 1956], див. також історичну замітку Рея Клафа [Clough, 2001].

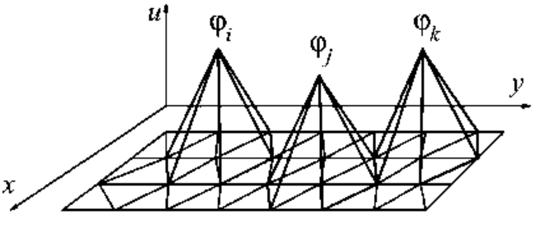
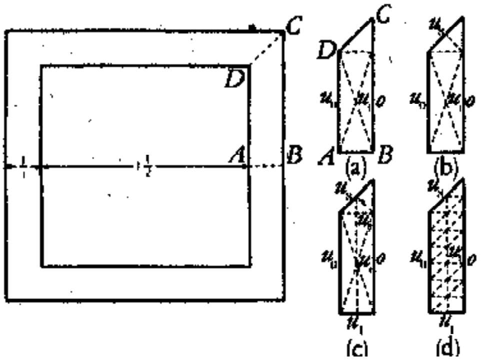


Рис. 10



а *б*

Рис. 11

Вище досить повно описаний шлях розвитку від варіаційного числення до робіт Рітца і до методу скінченних елементів. Є й інші описання цих історичних подій в літературі, наприклад, коротке описання Тейлора [Taylor, 2002] або більш повне дослідження Лейсси [Leissa, 2005].

Після всіх обговорень (чи слід називати метод методом Релея? Релея-Рітца? Рітца? Рітца-Гальоркіна? Бубнова-Гальоркіна? Тимошенка-Бубнова-Гальоркіна? Гальоркіна?), звернемось до оригіналу роботи Ейлера 1744 року. Ейлер опублікував у 1744 р. диференціальне рівняння (3) для варіаційної задачі (2), стандартне доведення цього рівняння було дано Лагранжем у 1755 р. Постає природне питання: як сам Ейлер знайшов «своє» диференціальне рівняння для варіаційної задачі? У [Euler, 1744] вказані такі процедури:

1. апроксимація кривої багатокутником;
2. апроксимація інтеграла сумою і диференціювання

$$Z\mathrm{d}x + Z'\mathrm{d}x + Z''\mathrm{d}x + Z'''\mathrm{d}x + \ldots\ ;$$

3. прирівнювання похідної $(P + N'\mathrm{d}x - P')$ до нуля;
4. обернення методу Ейлера $N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0$ ($N = \frac{\partial Z}{\partial y}$, $P = \frac{\partial Z}{\partial p}$).

Що робив Ейлер? Єдине, що він міг зробити за відсутності будь-яких інших теорій: в пункті 1 він дискретизував криву скінченновимірним об'єктом, який і є простором капелюшних скінченноелементних функцій у одновимірному випадку. У пункті 3, Ейлер безпосередньо вирішував проблему скінченної розмірності, отриману після дискретизації інтеграла в пункті 2. Отже, метод скінченних елементів Рітца ближчий до роботи Ейлера, ніж до будь чого, опублікованого впродовж півтора століття між Лагранжем і Гільбертом.

10.3. Становлення функціонального аналізу

Наприкінці XIX ст. почалося формування функціонального аналізу, який будувався як узагальнення диференціального та інтегрального числення. Його творці неодноразово підкреслювали той факт, що варіаційне числення є складовою частиною нової дисципліни. Д. Гільберт писав про це вже в 1900 р. [Гильберт, 1969, с. 58]: «Варіаційне числення в широкому сенсі - це вчення про зміну функцій, і як таке воно виявляється природним продовженням диференціального та інтегрального числення». Цю ж думку висловлював у своїх роботах Віто Вольтерра, який в 1896 р. ввів поняття функціональної похідної за аналогією із знаходженням рівняння Ейлера у варіаційному численні.

Для першого етапу розвитку функціонального аналізу характерним є конкретний підхід, коли вивчаються не множини довільної природи, а множини функцій A і кожній функції з A ставиться у відповідність число. Функціонал є головним об'єктом дослідження, а саме числення називалося функціональним.

Першими за розробку взялися італійські вчені професор Болонського університету С. Пінкерле і В. Вольтерра, який викладав в Пізі (1883-1892), Турині (1892-1900), Римі (1900-1931), прославився результатами в різних областях аналізу, в математичній фізиці і застосуваннями аналізу до біології. У Пінкерле елементи множини A - аналітичні функції, Вольтерра вивчав множини неперервних функцій $C[a,b]$ або множини m раз диференційовних функцій $C^m[a,b]$.

Сальваторе Пінкерле,
італ. Salvatore Pincherle
(1853-1936)

Віто Вольтерра,
італ. Vito Volterra
(1860-1940)

Починаючи з 1887 р. Вольтерра в низці заміток вводить поняття функціоналу: нехай A – множина функцій $x(t)$, заданих на інтервалі $a \leq t \leq b$; якщо кожному $x \in A$ відповідає деяке число $F = F[x]$, то F називається функцією лінії (функціоналом), визначеним на A. Вольтерра вводить норму в простір A

$$|||\, x \,||| = \sum_{k=0}^{m} \max_{a \leq t \leq b} \left| x^{(k)}(t) \right|, \quad x^{(0)} = x(t),$$

і поняття неперервності відносно цієї норми.

Він вводить також поняття варіаційної похідної. Як один із прикладів Вольтерра наводить класичний функціонал варіаційного числення

$$F(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t))\,\mathrm{d}t.$$

Обчисливши варіаційну похідну для цього функціоналу і прирівнявши її до нуля, Вольтерра, природно, отримує рівняння Ейлера. Отже, у Вольтерра варіаційне числення є зразком для побудови нової дисципліни, яка узагальнює математичний аналіз.

Однак поняття варіаційної похідної, введене Вольтерра, є незручним для узагальнень, оскільки спирається на поняття інтеграла. Вольтерра міркував так: нехай

$$A = C^m[a,b], \quad x \in A, \quad \delta x \in A, \quad a < \alpha \leq \xi \leq \beta < b.$$

Склавши відношення

$$\Delta F/\sigma = (F(x+\delta x) - F(x))/\sigma,$$

де $\sigma = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\mathrm{d}t$ (рис. 12), він переходив до границі

$$\lim_{|||\delta x|||\to 0} (\Delta F/\sigma)$$

при $\alpha,\beta \to \xi$ і отримував похідну $F'[x/\xi]$ (варіаційну похідну від F по x в точці $\xi \in (\alpha,\beta)$).

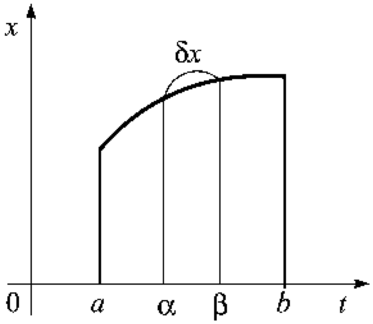


Рис. 12

У другій половині 90-х років XIX ст. почали свої дослідження представники французької математичної школи теорії функцій дійсної змінної (Е. Борель, Р. Бер, А. Лебег, М. Фреше і ін.), а в перші роки XX ст. Фреше почав практично заново зводити будинок функціонального аналізу, керуючись аналогіями з теорією функцій дійсної змінної.

Моріс Рене Фреше,
фр. Maurice René Fréchet
(1878 – 1973)

Жак Соломон Адамар,
фр. JacquesHadamard
(1865 – 1963)

У 1906 р. М. Фреше ввів в математику метричний простір [Frechet,1906]. Він поклав початок абстрактного підходу до побудови функціонального аналізу, оскільки вивчав множину E, яка складається з елементів довільної природи. Кожній парі (a,b) елементів з E Фреше поставив у відповідність деяке число, «що має властивості, дуже схожі з властивостями відстані між двома точками», яке Фреше назвав відхиленням (l'ecart). На основі цього поняття Фреше в 1911 р. дав [Frechet, 1911] означення диференціала, яке широко використовується в наші дні в теорії оптимального управління. До цього часу вже склалося поняття лінійного функціоналу. Адамар в підручнику [Hadamard,1910, с. 288-289] у 1910 р. так формулював властивість лінійності:

$$U(y_1 + y_2) = U(y_1) + U(y_2), \quad U(cy_1) = cU(y_1),$$

де y_1 і y_2 - функції змінної x.

Адамар висунув умову: варіація функціонала має бути лінійною. Він писав [Hadamard,1910, с. 288]: «Фундаментальний результат диференціального числення полягає в тому, що диференціал функції є лінійною функцією диференціалів змінних», подібно до цього варіація функціонала - лінійний функціонал відносно варіації δy ». Зауважимо, що сам термін «варіація» явно вказує на аналогію з варіаційним численням, якою постійно керувався Адамар в роботах з функціонального аналізу. Ці міркування Адамара розвивав Фреше. Він вводить [Frechet, 1911] спочатку диференціал функції багатьох змінних, про який говорив «диференціал в моєму розумінні». Функція $F(x,y,z,t)$ має диференціал в точці (x_0,y_0,z_0,t_0), якщо існує лінійна функція приростів

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + D\Delta t,$$

яка відрізняється від приросту функції Δf на величину, що є нескінченно малою відносно відхилення Δ точок (x_0,y_0,z_0,t_0) і $(x_0+\Delta x,...,t_0+\Delta t)$. Під відхиленням можна розуміти, наприклад, $\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + ... + (\Delta t)^2}$, причому кількість змінних тут може бути довільною.

Потім Фреше дає означення диференціала функціонала: функціонал U_A має диференціал для елемента A_0, якщо існує функціонал $V_{\Delta A}$, лінійний відносно приросту ΔA і такий, що відрізняється від приросту функціонала U_A на величину, нескінченно малу порівняно з відхиленням між елементами A_0 і $A_0+\Delta A$. Під відхиленням між двома функціями $f(x)$ і $\varphi(x)$ Фреше запропонував розуміти, наприклад,

$$\max_{a\le t\le b}\left|f(x)-\varphi(x)\right| \quad \text{або} \quad \int_a^b \left(f(x)-\varphi(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

При визначенні диференціала Фреше виходив вже не з множини елементів довільної природи, а з множини A, елементами якої є функції.

У наступних роботах Фреше неодноразово повертався до введеного ним поняття диференціала. При цьому він вказував, що в підручниках з математичного аналізу зазвичай дається таке означення диференціала функції багатьох змінних: нехай функція багатьох змінних має в деякій точці скінченні частинні похідні, тоді диференціал функції в цій точці дорівнює виразу

$$\mathrm{d}f = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z.$$

Фреше пише, що вже після публікації своєї роботи у 1911 році він зустрів в підручнику О. Штольца [Stolz, 1893, т. 1] інше означення диференціала функції багатьох змінних: функція диференційовна в точці $(x_0,y_0,...,u_0)$, якщо в цій точці існують скінченні частинні похідні по всіх аргументах і якщо приріст функції можна подати у вигляді


Отто Штольц,
нім. Otto Stolz
(1842 – 1905)

$$f(x_0+\Delta x, ... ,u_0+\Delta u) - f(x_0, ... ,u_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0}\Delta x + ... + \frac{\partial f}{\partial u_0}\Delta u + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + ... + \varepsilon_n\Delta u,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ прямують до нуля, коли $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta u$ прямують до нуля. Це поняття диференціала функції багатьох змінних, яке після робіт Фреше стали називати диференціалом за Штольцем, набагато раніше давалося Веєрштрассом в його численних курсах з теорії функцій, прочитаних в Берлінському університеті. Воно є вже в його курсі в 1861 р., прочитаному в Берлінському промисловому інституті.

Трохи пізніше Фреше до поняття похідної у функціональному численні з інших позицій підійшов учень і співробітник Адамара Р. Гато. Він визначив варіацію δU за допомогою границі

$$\delta U = \lim_{\lambda \to 0} \frac{U\left[x(t) + \lambda \delta x(t)\right] - U\left[x(t)\right]}{\lambda}.$$

Роботи Гато відносяться до 1913-1914 рр., але опубліковані у 1919 р. [Gàteaux, 1919] після смерті автора, який загинув на фронті в Першу світову війну. Похідна за Гато, так само як і похідна за Фреше, застосовується в теорії оптимального управління (див. [Леви, 1967, с. 521]).

Література

1. *Александрова Н.В.* К истории вариационного исчисления.— Труды ИИЕТ, 1959, т. 28, стр. 219—236.
2. *Александрова Н.В.* Некоторые вопросы истории вариационного исчисления в XVIII—XIX вв.— Труды ИИЕТ, 1959, т. 22, стр. 251—271.
3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука. 1979. — 429 с.
4. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин СВ.* Оптимальное управление. М., 2007.
5. *Андреев Ю. Н., Бутковский А.Г.* Оптимальное управление нагревом массивных тел // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 5.
6. *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Пер. Д.М. Перевощикова. Т. 3, 1861.
7. *Арис Т.* Оптимальное проектирование химических реакторов. — М.: Издательство иностранной литературы, 1967.
8. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.
9. *Архимед.* Сочинения. — М.: Физматлит, 1962. С. 95—117.
10. *Асмус В.Ф.* Декарт. - М.: Высшая школа, 2006. - 335 с.
11. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение. 1968.
12. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. - 248 с.
13. *Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И.* Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. – К.: Высшая школа, 1989. – 399 с.
14. *Баженов В.А.* Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.
15. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы – М.: Мир, 1982. – 584 с.
16. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства - М.: Мир, 1965.
17. *Белл Э.Т.* Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979. — 256 с.
18. *Беллман Р.* Динамическое программирование. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
19. *Белоцерковский О.М.* Вычислительная механика. Современные проблемы и результаты. - М.: Наука, 1994.
20. *Белый Ю. А.* Иоганн Кеплер. — М.: Наука, 1971.
21. *Бермант А.Ф.* Курс математического анализа. Т II, изд. 8-е. – Гостехиздат, 1956. – 358 с.
22. *Бернулли И.* Избранные сочинения по механике. М.-Л.: Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. — 297 с.
23. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. Пер. с англ. Солнцевой Ю.К. под редакцией Эльсгольца Л.Э. М.: ИЛ, 1950. – 347 с.
24. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. - 232 с.
25. *Боголюбов А.Н.* Математики и механики. Биографический справочник. – К.: Наук. думка, 1983. - 639 с.
26. *Боголюбов А.Н.* Огюстен Коши и его вклад в механику, и физику. Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1988 — С. 179 — 199.
27. *Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С.* К теории оптимальных процессов.— ДАН СССР, 1958, 110, № 1, с. 7—10.

28. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Биографический словарь деятелей в области математики. — Киев: Радянська школа, 1979. — 607 с.
29. *Босс В*. Интуиция и математика. - М.:Айрис-пресс, 2003. - 192 с.
30. *Брайсон А., Хо Ю-Ши*. Прикладная теория оптимального управления. —М.: Мир. 1972. — 544 с.
31. *Бубнов И.Г.* Строительная механика корабля, — СПБ, 1912—1914.
32. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
33. *Бюлер В.* Гаусс. Биографическое исследование. — М.: Наука, 1989. — 208 с. — ISBN 5-02-013919-X.
34. *Вазари Дж.* Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих. - М.: Терра, 1993-1994.
35. *Валле-Пуссен.* Курс анализа бесконечно малых. - ОНТИ, 1933.
36. Вариационные принципы механики. Сборник статей / Под ред. Л.С. Полака. — М.; Л.: Физматгиз. 1959. — 639 с.
37. *Виппер Ю.Ф.* Семейство математиков Бернулли. - М., 1875.
38. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Лаплас. — М.: Наука, 1985. — 288 с.
39. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. 8-е изд. – М.: Наука, 1966. – 872 с.
40. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимального управления.— В кн.: Итоги науки и техники: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1976, т. 6, с. 133—206.
41. *Галилео Галилей.* Сочинения, т. I, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Русский перевод С.Н. Долгова. Серия «Классики естествознания». - М.-Л.: Гос. тех.-теор. изд., 1934. – 695 с.
42. *Галёркин Б.Г.* Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. // Вестник инженеров. — 1915. — Т. 1. — С. 897—908.
43. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М., 1966. - 300 с.
44. *Гаусс К.Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях // Основания геометрии (сб.). — М.: ГИТТЛ, 1956.
45. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
46. *Гернет Н.Н.* Об основной простейшей задаче вариационного исчисления. СПб. Эрлих, 1913.
47. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. — издание третье, расширенное. — М.: МЦНМО, 2001. — 465 с.
48. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. — М.: Мир, 1973.
49. *Гловински Р. Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
50. *Гнеденко Б.В.* Михаил Васильевич Остроградский М.: Гостехиздат, 1952.
51. *Гольдштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 350 с.
52. *Гордеев В.Н., Перельмутер А.В.* Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования // Исследования по теории сооружений. – М., 1967. – Вып. 15. – С. 208-212.

53. *Григорьян А.Т., Ковалев Б.Д.* Даниил Бернулли. — М.: Наука 1981. — 318 с.
54. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964.
55. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
56. *Гюйгенс Х.* Трактат о свете, ОНТИ, 1935, 59—62.
57. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. — Гостехиздат, 1941.
58. *Декарт Р.* Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и перепиской Декарта. − М.−Л.: ГОНТИ, 1938.
59. *Демидович В.Б., Тихомиров В.М.* Кафедра общих проблем управления: немного о прошлом и настоящем // Математика в Московском университете на пороге XXI века / Под ред. С.С.Демидова, К.А.Рыбникова. М., 2005. С.3-101.
60. *Демидович В.Б.* Кто Вы, Г. Эрдман // История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 2009, вып. 13 (48), с. 307—317.
61. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. — 179 с.
62. *Демьянов В.П.* Рыцарь точного знания (П.Л. Чебышёв). — М. : Знание, 1991. — 192 с. — (Творцы науки и техники). — ISBN 5-07-000060-8.
63. *Дирак П.* Основы квантовой механики. Пер. с англ. М. П. Бронштейна. М.—Л., ОГИЗ, 1932, стр. 106.
64. *Дорофеева А.В.* Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций.— ИМИ, 1961, т. XIV, стр. 101—180.
65. *Дорофеева А.В.* Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. XIV. Физматгиз, М, 1961, стр. 101—181.
66. *Дорофеева А.В.* Вариационное исчисление во второй половине XIX в.— ИМИ, 1963, вып. 15. - С. 99—128.
67. *Дорофеева А.В.* Вариационное исчисление [История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1970–1972. Т. 3].
68. *Дорофеева А.В.* Создание теории поля и включение вариационного исчисления и функциональное в конце XIX — начале XX в. // История и методология естеств. наук. 1970. Вып 9. - С. 135—149.
69. *Дорофеева А.В., Тихомиров В.М.* От правила множителей Лагранжа до принципа максимума Понтрягина.— ИМИ, 1980, XXV, 104—138.
70. *Дорофеева А.В.* Вариационное исчисление в последней трети XIX в. // История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1982, вып. 29. - С. 64—74.
71. *Дорофеева А.В.* Вариационное исчисление [Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под общ. ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича.— М.: Наука, 1987.— 318 с.
72. *Дорофеева А.В., Чернова М.Л.* Карл Вейерштрасс. - М.: Знание, 1985.
73. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Мир, 1981. – 383 с.
74. *Егоров Д.Ф.* Основания вариационного исчисления. М.; Пг.: Госиздат, 1923.
75. *Ермаков В.П.* Вариационное исчисление по Вейерштрассу.— Унив. изв. Киев. Сер. 2, 1903, т. 2, с. 1—35. На фр. яз.: Ermakoff W. Calcul des variations d'apres Weierstrass. - J. math, pures et appl. Ser. 6, 1905, vol. 1, p. 97—137.
76. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Вариационное исчисление в целом. – М.: Иностранная литература, 1947. - 148 с.

77. *Зетель С.И.* Задачи на максимум и минимум. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
78. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления судами и другими подвижными объектами. — Л.: Судостроение, 1966. — 352 с.
79. *Идельсон Н.И.* О механике Лагранжа. В сб. «Жозеф Луи Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л. Изд-во АН СССР, 1937.
80. *Идельсон Н.И.* Этюды по истории небесной механики. – М., Наука, 1975.
81. *Иоффе А.Л., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
82. Исследование оптимальных режимов движения ракет. Сборник переводов. — Оборонгиз. 1959.
83. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970–1972. Т. 1–3.
84. *Канторович Л.В. и Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л., 1962. - 708 с.
85. *Касумова Т.К., Сутрилина М.И.* Оптимизация АРВ синхронных машин. Сборник "Оптимизация режимов работы электроприводов". — Красноярск, 1990. —с. 173—187.
86. *Кеплер И.* Новая стереометрия винных бочек. – М.-Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1935.
87. *Кирин Н.Е.* Вычислительные методы теории оптимального управления. —Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. — 143 с.
88. *Клейн Ф.* Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. ГТТИ, М., 1956.
89. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.
90. *Кокстер Г.* Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
91. *Коновалова Л.В.* К истории понятия линейной независимости частных решений линейных однородных дифференциальных уравнений.— ИМИ, 1985, вып. 29, с. 77-88.
92. Коперник. Галилей. Кеплер. Лаплас и Эйлер. Кетле: Биографические повествования / Сост. *Н.Ф. Болдырева*. — Челябинск: Урал, 1997. — 452 с. — (Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека Ф. Павленкова).
93. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1979.
94. *Котек В.В.* Леонард Эйлер. — М.: Учпедгиз, 1961. — 106 с.
95. *Кошляков Н. С.* Вариационное исчисление Эйлера.— В сб.: Леонард Эйлер. М., 1935, стр. 39—50.
96. *Кравчук А.С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика.– 1978.– Т. 42, вып. 3.– С. 466–474.
97. *Кротов В.Ф.* Разрывные решения вариационных задач // Изд. вузов. Математика. I960. № 5. - С. 86—98.
98. *Кротов В.Ф.* О разрывных решениях в вариационных задачах // Изд. вузов. Математика. 1961. № 2. - С. 75—89.
99. *Кротов В.Ф., Букреев В.З. Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969. — 446 с.
100. *Крылов А.Н.* Жозеф Луи Лагранж. - В сб.: Ж.Л. Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1937.
101. *Крылов А.Н.* Леонард Эйлер // Леонард Эйлер. 1707 — 1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М.-Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 1 — 28.

102. *Крылов А.Н.* Собр. трудов. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936—1956. Т.1—12.
103. *Крылов А.Н.* Ньютон и его значение в мировой науке (1643 – 1943). – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. – 40 с.
104. *Крылов А.Н.* Мои воспоминания. — Л.: Судостроение, 1984. — С. 332.
105. *Кудрявцев П.С.* Исаак Ньютон, 1643—1943: к 300-летию со дня рождения / А. Тимирязев. — Учпедгиз, 1943. — 143 с.
106. *Кудрявцев П.С.* Исаак Ньютон. — Учпедгиз, 1955. — 124 с.
107. *Кудрявцев П.С.* История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1948. — Т. 1. От античной физики до Менделеева.
108. *Кудрявцев П.С.* История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1955. — Т. 2. От Менделеева до открытия квант (1870—1900).
109. *Кудрявцев П.С.* История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1971. — Т. 3. От открытия квант до создания квантовой механики (1900—1925).
110. *Кудрявцев П.С.* Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.
111. *Кузнецов Б.Г.* Эйнштейн. — М.: Издательство Академии наук СССР. 1963. — С. 188.
112. *Кузнецов Б.Г.* Галилей. - М.: Наука, 1964. - 326 с.
113. *Кузнецов П.И.* Дмитрий Федорович Егоров: К столетию со дня рожцезия.— УМН, 1971, т. 26, вып. 5, с. 169—206.
114. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. – М., 1951.– 476 с.
115. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2 – ОГИЗ, Гостехиздат, 1945. – 619 с.
116. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? - М.: Просвещение, 1967. - 558 с.
117. *Лаврентьев М. и Люстерник Л.* Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.
118. *Лаврентьєв М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. Издание 2-е переработанное. – М.: Гостехиздат, 1950. - 296 с.
119. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, том 1. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 594 с.
120. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, том 2. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 440 с.
121. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. Пер. с англ. В.Ф.Гантмахера. Под ред. Л.С.Полака. – М.: Мир. 1965. – 408 с.
122. *Леви-Чивита и Амальди.* Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2. М., ИЛ, 1951, стр. 275—276.
123. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967.
124. *Лейбниц Г.В.* Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления.— УМН, 1948, 3: 1(23), с. 166—173.
125. *Лейбниц Г.В.* Сочинения в 4-х т. Т. 1. - М.: 1982. - С. 235-284.
126. *Липилин В.* Алексей Николаевич Крылов. — М.: Молодая гвардия, 1983. — 223 с.
127. *Лопиталь.* Анализ бесконечно малых. Серия «Классики естествознания, Гостехиздат, - М.-Л., ГТТИ, 1935.
128. *Люстерник Л.А.* Об условных экстремумах функционалов. — Мат. сб., 1934, 41.
129. *Маркушевич А.И.* Работы Гаусса по математическому анализу.— В кн.: Карл Фридрих Гаусс. М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 145—216.
130. *Матвиевская Г.П.* Рене Декарт, 1596–1650. М.: Наука, 1976.
131. Математическая энциклопедия. Т. 1, М., 1977. Т. 2, М., 1979. Т. 3, М., 1982. Т. 4, М.,

1984. Т. 5, М., 1985.
132. *Мах Э.* Механика,- СПб, 1909, стр. 362—363.
133. *Михлин С.Г.* Вариационные методы решения задач математической физики. УМН, 5:6(40), 1950. – С. 3–51.
134. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 250 с.
135. *Михлин С.Г.* Прямые методы математической физики. – М.-Л.: ГТТИ, 1950. – 428 с.
136. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966.– 432 с.
137. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
138. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
139. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. — М.:Наука. 1971. — 526 с.
140. *Мышкис А.А.* Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971.
141. *Никифорский В.А.* Великие математики Бернулли. — М.: Наука, 1984. — 176 с.
142. *Никольский С.М.* Курс математического анализа, т. 1. 2-е изд. М-: Наука, 1975.
143. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии /Пер. с примеч. и поясн. А.Н. Крылова.
144. *Ньютон И.* Математические работы. М.; Л.: ОНТИ, 1937.
145. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. рос. з лат. А.Н. Крылова, т.7, Изд. АН СССР, М.-Л., 1936.
146. Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, 1956.
147. *Олейников В.А.* Оптимальное управление технологическими процессами. —Л.: Недра, 1982. — 216 с.
148. *Остроградский М.В.* Доказательство одной теоремы интегрального исчисления. - ИМИ, 1965, вып. 16, с. 49—64.
149. *Остроградский М.В.* Избранные труды. – Л.: АН СССР, 1958.
150. *Остроградский М.В.* Избранные труды. – М.: АН СССР, 1968. – 583 с.
151. *Остроградский М.В.* Мемуар о распространении тепла внутри твердых тел.— ИМИ, 1965, вып. 16, с. 65—96.
152. *Остроградский М. В.* Поли. собр. трудов. Киев: Изд-во АН УССР, 1959—1961. Т. 1-3.
153. *Отрадных Ф.П.* Михаил Васильевич Остроградский. - Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1953.
154. *Охоцимский Д.Е. Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук. Т. 63, вып. 1, 1957.
155. *Павлова Г.Е., Фёдоров А.С.* Михаил Васильевич Ломоносов. М.: Наука, 1986.
156. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем. — Минск: Изд-во БГУ. 1977. — 266 с.
157. *Панасюк В.И.* Оптимальное микропроцессорное управление электроприводом. — Минск: Вышейшая школа, 1991. — 167 с.
158. *Панасюк В.И., Ковалевский В.Б., Политыко Э.Д.* Оптимальное управление в технических системах. — Минск: Навука и техника, 1990. —272 с.
159. *Петров Ю.П.* К вопросу о принципе минимума скорости возрастания энтропии в стационарном режиме // Биофизика 1966. Т. 11, № 5. С. 926—928.

160. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления. — Л.: Энергия, 1965,2-е изд., доп., 1977. — 280 с.
161. *Петров Ю.П.* О научном наследии Н.Н. Гернет // Вопр. истории естествознания и техники. 1980. Вып. 3 (67)/4 (68). - С. 102—164.
162. *Петров Ю.П.* Оптимальное управление электроприводом. — Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 187 с.
163. *Петров Ю.П.* Оптимальный режим остановки ядерного реактора // Атомная энергия, т. 17, вып. 2, 1964. — с. 144—145.
164. *Петров Ю.П.* Из истории вариационного исчисления и теории оптимальных процессов — В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1990, вып. 32-33, с. 53—74.
165. *Петров Ю.П.* История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. – СПБ.: БХВ-Петербург, 2005. – 448 с.
166. *Петрова С.С.* О принципе Дирихле.— В кн.: История и методология естественных наук. М.: Изд-во МГУ, 1965, вып. 6, с. 200—218.
167. Письмо Д. Бернулли к Эйлеру от 22/X 1742. См. Fuss, Corresp., II, 505-507.
168. *Погребысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну.– М.: Наука, 1966.– 326 с.
169. *Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И.* Основы и методы прикладной теории упругости. М. 1981. – 328 с.
170. *Полак Л.С.* В.Р. Гамильтон и принцип стационарного действия, Изд. АН СССР, 1936 г.
171. *Полак Л.С.* Скобки Пуассона // Труды института истории естествознания и техники АН СССР. – т. 17, М., 1957. – с. 450 – 473.
172. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.
173. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. Изд. 2-е, испр. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. - 600 с.
174. *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. — КомКнига, 2007. — 184 с. — ISBN 978-5-484-00775-2
175. *Понтрягин Л.С. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. 391с.
176. *Понтрягин Л.С, Болтянский Я.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Р.В.* Математическая теория оптимальных процессов. 3-е изд. М.: Наука, 1976.
177. *Постников М.* Теорема Ферма. - М., 1978.
178. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред.– М.: изд. иностр. лит., 1963.– 340 с.
179. *Предтеченский Е.А.* Кеплер, его жизнь и научная деятельность. – Петербург: изд-во З.И.Гржебина, 1921.
180. Проблемы Гильберта / Под общ. ред. П.С.Александрова. М.: Наука, 1969.
181. *Пуанкаре А.* Избранные труды: В 3 т.– М.: Наука, 1974.– 584 с.
182. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. – 561 с.
183. *Пуанкаре А.*. Наука и метод. – С.-Пб., 1910.
184. *Ремез Е.Я.* Об исследованиях М.В. Остроградского в области анализа / Е.Я. Ремез // Полное собрание сочинений : в 3 т. / М. В. Остроградский. – М., 1961. – Т. 3. – С. 375–394.
185. *Ремез Е.Я.* О математических рукописях академика М.В. Остроградского.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. IV. - М.—Л., 1951.

186. *Рівкін С.А., Баженов В.А.* Контактні зусилля між шарами складової балки при наявності тертя.- Сб."Опір матеріалів і теорія споруд". Вип.4.- К.: Будівельник, 1966. - с. 101-107.
187. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задачи теории упругости с идеальными односторонними связями. Задачи Синьорини // Метод конечных элементов и строит. механика: Тр. ЛПИ.–№ 363 – Л., 1979.– С. 3–15.
188. *Рыбников К.А.* История математики. т. II. - Изд-во московского университета, 1963. – 336 с.
189. *Рыбников К.А.* Первые этапы вариационного исчисления. В сб.: «Историко-матемлтические исследования», вып. II. Гостехиздат, М., 1949, стр. 355—498.
190. *Сабинин Е.Ф.* О мемуаре Саррюса.— Мат. сб., 1888—1889, т. 14, с. 451—470.
191. *Сабинин Е.Ф.* Михаил Васильевич Остроградский: (По поводу столетия со дня рождения).—Мат. сб., 1902, т. 22, с. 499—531.
192. Сб. ст. к 200-летию со дня рождения Ж.-Л. Лагранжа. ГТТИ, М., 1937.
193. *Соколов И.Д.* Исследование некоторых предметов, относящихся к вариационному исчислению, Харьков, 1842.
194. *Соколов Ю.Д.* Исследования М.В. Остроградского по механике. П. с. тр., т. II. Стр. 354.
195. *Соколовская З.К.* 400 биографий ученых. — М.: Наука, 1984. — 510 с.
196. *Старков А. П.* Об одной задаче вариационного исчисления. Одесса, 1885.
197. *Стеблев Ю.И.* Условия минимальных потерь в теории поверхностного эффекта // Электричество, 1983. № 6. — с. 62—65.
198. *Стеклов В.А.* Представление в члены-корреспонденты Российской академии наук А. Кнезера.— ИМИ, 1982, вып. 26, с. 320—322.
199. *Стеклов В.А., Кнезер А.* Научная переписка. М.: Наука, 1980.
200. *Стрельцова Г.Я.* Паскаль и европейская культура. — М.: Республика, 1994. — 495 с.
201. *Тарарыкин С.В., Тютиков В.В.* Элементы структурной оптимизации электромеханических систем // Известия ВУ, Электромеханика, 1994. №1—1, с. 25—31.
202. *Тарасов Б.Н.* Паскаль. — М.: Молодая гвардия, 1979.
203. Теория автоматического управления / Под общ. ред. А.В. Нетушила. М.: Высш. шк., 1972.
204. *Тимошенко С.П.* Об устойчивости упругих систем // Изв. Киевского политехн. ин-та. — 1910. — № 4. — С. 375—560.
205. *Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974. – 482 с.
206. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
207. *Трусделл К.* Очерки по истории механики. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 316 с.
208. *Трухаев Р.И., Хоменюк В.В.* Теория неклассических вариационных задач.—Л., 1971.
209. *Тюлина И.А.* Жозеф Луи Лагранж. – М.: Наука, 1977. – 221 с.
210. *Тюлина И.А.* История и методология механики. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.
211. *Тюлина И.А., Ракчеев Е.Н.* История механики. - Изд-во МГУ, 1962.
212. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
213. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
214. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.– М., 1970.

215. *Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: «Наука», 1979. – 429 с.
216. *Хашимов А.А., Петрушин А.Д.* Оптимальные режимы работы частотнорегулируемых асинхронных электропривводов. — Ташкент: Изд-во "ФАН", 1990. —79 с.
217. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.– М.: Мир, 1975.– 408 с.
218. *Цейтен Г.Г.* История математики в древности и в средние века. М.— Л.: ГТТИ, 1932.
219. *Циммерман В.* Правила Эйлера в применении к одному классу вопросов об относительных maxima или minima, Одесса, 1899.
220. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1970. – 184 с.
221. *Цырлин А.М., Балакирев В.С, Дудников Е.Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. — М.: Энергия, 1976.
222. *Чернов С.Н.* Леонард Эйлер и Академия наук // Леонард Эйлер (1707 — 1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М. — Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 163-238.
223. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.
224. *Чистов В.П., Бондаренко В.И., Святославский В.А.* Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока. — М.: Энергия, 1968. —232 с.
225. *Шмыглевский Ю.Д.* Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел // Прикладная математика и механика, т. 25, 1962, вып. 1.
226. *Шумилов В.Ф., Никитин В.К., Шумилова Н.И.* Принцип стохастического оптимума в автоматизированном электроприводе // Электричество, 1992, №1, с. 31—34.
227. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле (русский перевод под ред. Н.С. Кошлякова). - ГТТИ, М.—Л., 1934.
228. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление / Пер. и коммент. Ф.И. Франкеля. М.-Л.: Физматгиз, 1958. Т. 3.
229. *Эйлер Л.* Соображения по поводу некоторых общих законов природы, которые наблюдаются в действии любых сил. В сборнике: Вариационные принципы механики, под ред. Л.С. Полака, Физматгиз, М., 1959.
230. *Эйлер Л.* Диссертация о принципе наименьшего действия с разбором возражений славнейшего проф. Кенига, выдвинутых против этого принципа.– В сборнике: Вариационные принципы механики, под ред. Л.С. Полака, Физматгиз, М., 1959.
231. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. В четырех томах. Т. 4. – М.: Наука, 1965-1967. – С. 121.
232. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 163 с.
233. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
234. *Юшкевич А.П.* Декарт и математика.
235. *Юшкевич А.П.* Леонард Эйлер. Жизнь и творчество // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. — М.: Наука, 1988. — С. 15-46.
236. *Юшкевич А.П.* О неопубликованных ранних работах М.В. Остроградского.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. XVI. - М.: «Наука», 1965.
237. *Яглом И.М.* Феликс Клейн и Софус Ли. — М.: Знание, 1977.
238. *Якоби К.* Лекции по динамике. - М.-Л., ОНТИ, 1936.

239. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.– 488 с.
240. *August F.* Über die Rotationsflache kleinsten Widerstandes und tiber die giinstigste Form der Geschosspitzen nach der Newtonschen Theorie,— J. fur reine und angew. Math., 1888, Bd. 103, S. 1—24.
241. *Belhoste B.* Cauchy 1789-1857. Un mathematicien legitimiste au XIXe siecle. — Paris; Berlin, 1985. — 226 p.
242. *Beltrami E.* Sulla teoria delle linee geodetiche.— Rend. Ist. Lombardo sei. e lett. Ser. 2, 1886, vol. 1, p. 708—718.
243. *Beltrami E.* Opere matematiche. Milano: Hoepli, 1902-1920. Vol. 1-4.
244. *Berlrand J.* Note sur un point du calcul des variations.— J. math. pures et appl.,.1842, vol. 7, p. 55—58.
245. *Bernoulli J.* Opera omnia tam antea sparsim edita quam hactenus inedita : tomus primus, quo continentur ea quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt. - Lutetiae Parisiorum: apud Carolum Jombert ..., 1742.
246. *Bernoulli J.* Problema novum ad cujus solutionem mathematice invitantur / / Acta Eru-' ditorum Lipsiae. 1696. Vol.6. P. 119-123.
247. *Bernoulli J.* Curvatura radii in diaphanis non uniformibus. Acta Eruditorum, 206–211(1697)
248. *Bernoulli J.* Opera, Vol. II. - Genéve, 1744.
249. *Bertrand.* Note sur un point du calcul des variations (Journal de Mathematiques pures et'appliquees, 1842, VII, 55).
250. *Bliss G.* Tbc problem of Mayer with variable end-points.— Trans. J Amer. Math. Soc, 1918, 19, p. 305—314.
251. *Bliss* G. The problem of Lagrange in the calculus of variations— Amer. J. Math., 1930, 52, p. 673—744.
252. *Bliss G.A.* Some recent developments in the Calculus of variations.— Bulletin of the American Mathematical Society, т. 26, стр. 351.
253. *Bolza O.* Lectures of the calculus of variations. Chicago, 1904. Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearb. und stark verm. deutsche Ausgabe. Leipzig; Berlin: Teubner, 1909.
254. *Bolza O.* Vorlesungen iiber Variationsrechnung. Leipzig; Berlin, 1909.
255. *Bolza O.* Die Lagrangesche Multiplikatorenregel in der Variationsrechnung für den Fall von gemischten Bedingungen und die zugehörigen Grenzgleichungen bei variablen Endpunkten.— Math. Ann., 1907, Bd. 64, S. 370—386.
256. *Bolza O.* Über den «Anormalen Fall» beim Lagrangeschen und Mayerschen Problem mit gemischten Bedingungen und variablen Endpunkten.— Math. Ann., 1913, Bd. 74, S. 430—446.
257. *Bolza O.* Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig und Berlin, 1909.
258. *Bolza O.* Weierstrass theorem and Kneser's theorem on transversals for the most general case of an extremum of a simple difinite integral. «Trans. Amer. math, soc», vol. VII, 1906, 459—488.
259. Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Leipzig: Teubner, 1907.
260. *Brioschi F.* Sopra un teorema di Jacobi intorno al criterio d'integrabilità per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive.— Ann. sei. mat., fis., 1852, vol. 3, p. 322—326.
261. *Bubnov I.G.* Report on the works of Professor Timoshenko which were awarded the Zhuravski Prize. Symposium of the Institute of Communication Engineers, 81, 1913. All

Union Special Planning Office (SPB), in Russian.
262. *Cantor M.* Vorlesungen iiber Geschichte der Mathematik, Bd. IV, Leipzig, 1908, стр. 1067.
263. *Caratheodory C.* Ueber die diskontinuirlichen Losungen in der Variationsrechnung, Gottingen, Diss., 1904.
264. *Caratheodory C.* The beginning of research in the calculus of variations, Osiris, III, 1937, 224-240.
265. *Caratheodory C.* The beginning of research in the calculus of variations, Osiris, III, 1937.
266. *Cauchy A.-L.* Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, 1825. Paris: Bure Frères.
267. *Clapeyron E.* Sur la puissance motrice de la chaleur. - Poggend. Annal. LIX, 1843.- pp. 446–450.
268. *Clebsch A.* Über die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form.—J. für reine und angew. Math., 1858, Bd. 55, S. 254—273.
269. *Clough R. W.* The finite element method in plane stress analysis. In Proc ASCE Conf Electron Computat, Pittsburg, PA, 1960.
270. *Clough R. W.* Thoughts about the origin of the finite element method. Computers and Structures, 79:2029–2030, 2001.
271. Commentarii Academiae Petropolitanae, 11, 1727, 139.
272. *Corradi M.* The mechanical sciences in Antiquity. In: Essays in the history of theory of structures, ed. S. Huerta. - Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2005. - pp. 103–116.
273. Correspondance de Lagrange avec Euler, Oeuvres de Lagrange, vol. XIV, Paris, 1892, стр. 139.
274. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. - Mémoires de mathématique et physique presenté à l'Acádemie des sciences par savantes étrangères, Paris, 1773.
275. *Courant R.* Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung. Mathematische Annalen, 71:145–183, 1912.
276. *Courant R.* Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie. Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik (Crelle), 144:190–211, 1914.
277. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Math Society, 49:1–61, 1943.
278. *Crotti F.* Conversazioni - Saggi di critica scientifico-pratica, Minelli, Rovigo 1877.
279. *Crotti F.* Esposizione del teorema Castigliano e suo raccordo colla teoria dell’elastricita. «Atti Coll. Ing. Arch. Milano». Tomo II, fasc., 4, 20 parte.
280. *D'Alembert I.B.I.* Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange - Œuvres de Lagrange, V.1, Paris, 1867, p. XVI.
281. *Darboux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris: Gauthier-Villars, 1887—1896. Vol. 1—4; 2 ed., 1914—1925.
282. *Darboux G.* Théorie des surfaces. Paris, 1889, vol. II, n° 514—526; 1894, vol. Ill, n° 622—627.
283. *De l'Hospital.* Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. - Paris, MDCCXVI.
284. *Delambre J.B.J.* Oeuvres de Lagrange, t. I. - Paris, 1867.
285. *Delaunay Ch.* These sur la distinetion des maxima et des minima dans les questions qui dependent de la methode des variations.— J. math. pures et appl., 1841, vol. 6, p. 209—237.
286. *Denis Diderot et Jean le Rond d’Alembert.* Liste des auteurs. Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. 1751 — 1772.

287. *Dietz P.* Die Urspiinge der Variationsrechnung bei Jacob Bernoulli. Basel, 1959.
288. *Dirichlet P.G.L.* Über die Stabilität des Gleichgewichts. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 32, 1846. - pp. 85–88.
289. *Dirksen E.H.* Analytische Darstellung der Variations-rechnung mil Amvendung derselben auf die Bestimmung des Grossten und Kleinsten, Berlin, 1823.
290. *Du Bois-Reymond P.* Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.— Math. Ann., 1879, Bd. 15, S. 283—314.
291. *Du Bois-Reymond P.* Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung.— Math. Ann., 1879, Bd. 15, S. 564—576.
292. *Duvaut G., Lions J.-J.* Les inequations en mecanique et en physiqe.–P: Dunod, 1972.–411 p.
293. *Egorow D.* Die hinreichenden Bedingungen des Extremums in der Theorie der Mayerschen Problems.—Math. Ann., 1906, Bd. 62, S. 371—380.
294. *Eisen1ohr F.* Untersuchungen iiber Variations-Reclinung, 1853.
295. Encyclopédie des sciences mathematiques pures et appliquées. Paris, 1912, II 26.
296. *Eneström G.* Sur la decouverte de 1'equation generate des lignes geodesiques, Bibliotheca Mathematica, 1899, S. 22-23.
297. *Erdmann G.* Über die Variationen in der Ordnung // Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1881. Bd.26. S.73-97.
298. *Erdmann G.* Über unstetige Lösungen in der Variationsrechnung// Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1877. Bd.82. S.21-30.
299. *Erdmann G.* Untersuchung der hoheren Variationen einfacher Integrate.— Zeitschrift f. Math- u. Phys., Leipzig, т. 22, 1877.
300. *Erdmann G.* Zur Untersuchung dcr zweiten Variation einfacher Integrale // Zeitschrift fur Mathematik und Physik. 1878. Bd.23. S.362-379.
301. *Escherich G. von.* Die zweite Variation der einfachen Integrale. IV. Mitteilung.— Sitzungsber. Kgl. Akad. Wiss. Wien. Abth. 2a, 1899, Bd. 108, S. 1269—1340.
302. *Escherich G.* Die zweite Variation der einfachen Integrale (V. Mittheilung). Sitzungsberichten der katserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, 1901, U0, 1356—1421.
303. *Eu1er L.* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive Solutio problematis isoperometrici latissimo sensu accepti. - Marc-Michel Bousquet, Lausanne & Geneva, 1744.
304. *Eu1er L.* Elementa calculi variatioiiuni; Analytica explicatio methodi maximarum ct minimoruin, Novi Comm. Ac. Sc. Petr. 10(1764), 1766.
305. *Euler L.* Elementa calculi variationum. — Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1764), 1766, vol. 10. Reprinted in Opera omnia. Ser. 1, t. 25, pp. 141—176.
306. *Eu1er L.* Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi.—Novi Conim. Ac. Sc. Petr. 16 (1771).
307. *Euler L.* Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum.— Novi comment. Acad. sci. Petrop. (1764), 1776, vol. 10. Reprinted in Opera omnia. Ser. 1, t. 25, pp. 177—207.
308. *Euler L.* Methodus nova et facilis calculum variationum traetandi.— Novi comment. Acad. sei. Petrop. (1771), 1772, vol. 16.
309. *Euler L.* Institutionum calculi integralis, vol. I, Petropolis, 1768. Enestr. 342, Opera Omnia, Ser.I, vol. XI.
310. *Euler L.* Institutionum calculi integralis, vol. II, Petropolis, 1769. Enestr. 366, Opera Omnia, Ser.I, vol. XII.

311. *Euler L.* Institutionum calculi integralis, vol. III, Petropolis, 1770. Enestr. 385, Opera Omnia, Ser.I, vol. XIII.
312. *Euler.* Sur la force des colonnes. Memoires de l'academie des sciences de Berlin T.13, 1759, pp. 252-282.
313. *Euler L* Deinsigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit.— Memoires de l'Academie des sciences de St.-PctersLourg, 3 (1809/10), 1811.
314. *Euler L.* Opera omnia. Ser. IV. A. Commercium epistolicum / Ed. A. Juskevic et R. Taton. Basel, 1980. Vol. 5.
315. *Euler L.* Opera Omnia. Leipzig; Berlin; Zurich; Basel: Teubner, Fussli, Birkhauser, 1911-1980. Ser. 1, Opera mathematica. Vol. 1-29; Ser. 2, Opera mechanica et astronomica. Vol. 1-15, 18, 19, 22, 25, 28-30; Ser. 3, Opera physica, miscellanea. Vol. 1-8, 11, 12; Ser. 4, Commercium epistolicum. Vol. 1, 5, 6.
316. *Fahie J.J.* Galileo, his life and work. - New York, 1903.
317. *Fermat P.* Oeuvres, т.1, Paris, 1891.
318. *Fichera G.* Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: in problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lei Lincei.– 1964.–N 8.–P. 91–140.
319. *Fiechet M.* Sur quelques points du calcul fonctionnel.— Rend. circ. mat. Palermo, 1906, vol. 22, p. 1 — 74.
320. *Fourier J.B.J.* Théorie analytique de la chaleur, 1822.
321. *Frechet M.* Sur la notion de differentielle.— C. r. Acad. sei. Paris, 1911, vol. 152, p. 845—848.
322. *Funk P.* Variationsrechnung und ihre Anwendung in der Technik, 2nd edn. Springer, Berlin (1970).
323. *Galileo Galilei.* Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In Leida, MDCXXXVIII. – 1638.
324. *Gäteaux R.* Sur la notion d'integrale dans le domaine fonctionnel et sur la theorie du potential.— Bull. Soc. math. France, 1919, vol. 47, p. 47—70.
325. *Gauss K.F.* Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibri. Ges. Werke. Bd. 5, 1830, S. 31-77.
326. *Gauss K.F.* Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. Methodo nova tractata. Werke. Gottingen, t. 5, 1867. - C. 3—221.
327. *Gauss C.F.* Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich ist, 1825. Werke 4, pp. 189-216.
328. *Gauss C.F.* Allgemeine Lehrsatze in Beziehung auf die im verkehrten Verhaltnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. Magnetischer Verein, 1839. Werke vol. 5, p. 195–242.
329. *Gauss C.F.* Werke. Gottingen, 1863—1933. Bd. 1 — 12.
330. *Gerstner F.J.* Handbuck der Mechanik. Bd 1-3. — Prag: 1831 — 1834.
331. *Goldstine H.* A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.
332. *Graves L.M.* On the Weierstrass condition for the problem of Bolza in the calculus of variations,— Ann. Matli., 1932, 33, p. 747—752; Contributions to the calculus of variations. Dept Math. Univ. Chicago, 1931—1932. - P. 339—359.
333. *Green G.* An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham: Wheelhouse, 1828.

334. *Guiraudet M.* Aperçu historique au sujet des problémes auxquelles s'applique le calcul des variations, jusqu'aux travaux de Lagrange, Paris, Diss., 1856.
335. *Hadamard J.* Lecons sur le calcul des variations. Paris: Hermann, 1910.
336. *Hahn H.* Bemerkungen zur Variationsrechnung.— Math. Ann., 1904, Bd. 58, S. 148—168.
337. *Hahn H.* Zur Theorie der zweiten Variation einfachen Integrale.— Monatsh. Math, und Phys., 1902, Bd. 14, S. 3—57.
338. *Hamel G.* Elementare Mechanik. Leipzig/Berlin: B.G. Teubner, 1912.
339. *Hamilton W. R.* The mathematical papers. Cambridge: Univ. press, 1931—1967. Vol. 1—3.
340. *Hamilton W.R.* Geometrical optics [*Hamilton W. R.* The mathematical papers. Cambridge:Univ. press, 1931—1967. V. 1].
341. *Hamilton W.R.* On a general Method in Dynamics, by which the Study of the Motions of all free Systems Attracting or Repelling Points is Reduced to the Search and Differentiation of One Central Relation or Characteristic Function, Phil. Trans, of the Roy. Soc, ч. II, 1834.
342. *Hamilton W.R.* Second essay on a general method of dynamics, t. I. - «Philos. Trans. Roy. Soc.», 1835.
343. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen., Journal für reine und angew. Mathematik, Vol. 55, 25-55, 1858.
344. Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik, herausgegeben und übersetzt von L. Nix und V. Schmidt, Leipzig, 1900.
345. *Hesse O.* Über die Criterien des Maximums und Minimums der einfache Integrale.— J. für reine und angew. Math., 1857, Bd. 54, S. 227—273.
346. *Hi1bert D.* Mathematische Probleme. «Gesammelte Abhandlungen», Bd. 3, Berlin, 1935.
347. *Hilbert D.* The Foundations of Geometry. The open court publishing company, La Salle, Illinois, 1950.
348. *Hilbert D.* Zur Variationsrechnung.— Göttinger Nachrichten. 1905, S. 159—180; Math. Ann., 1906; 62, S. 351—368.
349. *Hilbert D.* Über das Dirichlet'sche Princip.— Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1900, Bd. 8, H. 1, S. 184—188.
350. *Hilbert D.* Über das Dirichlet'sche Princip. — Math. Ann., 1904, Bd. 59, S. 161-186.
351. *Hilbert D.* Zur Variationsrechnung.—Math. Ann., 1906, Bd. 62, S. 351-370.
352. *Hilbert D.* Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer-Verl., 1935.
353. *Hurwitz A., Courant R.* Vorlesungen ¨uber die allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Berlin, Julius Springer, 1922.
354. *Huygens C.* Horologium oscillatorium sive de motu pendularium (1673).
355. *Jacobi C.G.J.* Note sur l'integration des equations differentielles de la dynamique.- C. r. Acad. sei. Paris, 1837, vol. 5.
356. *Jacobi C.G.J.* Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.— J. für reine und angew. Math., 1837, Bd. 17, S. 68—82; Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Teubner, 1936, N° 47.
357. *Jacobi C.G.J.* Gesammelte Werke. Berlin: Reimer, 1881-1891. Bd. 1-7.
358. *Karman T.* Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften. T. VI, 1910.
359. *Kirchhoff G.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik, 44:51–92, 1850.
360. *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin, 1926. Reprinted New York 1950 and 1967.

361. *Kneser A.* Beitrage zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung.—Math. Annalen, 1902, 55, 86—107.
362. *Kneser A.* Lehrbuch der Variationsrechnung. Berlin, 1900. 2.umgearb. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1925.
363. *Kneser A.* Lehrbuchder Variationsrechnung. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1900.
364. *Kneser A.* Variationsrechnung, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Leipzig; 1904, Bd. II, Hf. 5, стр. 597.
365. *Knezer A.* Euler und die Variationsrechnung. Festsrhrift zur Feier des 200 Geburtstagi's L. Eulers, Leipzig und Berlin, 1907.
366. *Koiter W.T.* General theorems for elastic plastic solids // Progress in solid Mechanics. 2. North–Holland, P. C.– 1960.– P. 165–221.
367. *König R.* Konforme Abbildung der Oberfl¨ache einer r¨aumlichen Ecke. Mathematische Annalen, 71:184–205, 1912.
368. *Kurrer K.-E.* The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.
369. *Lacroix S.F.* Traite du calcul differentiel et du calcul integral, Paris, 1819, vol. 3.
370. *Lagrange J.L.* Mecanique analytique. Paris, 1788.
371. *Lagrange J.L.* Memoire sur la theorie generale de la Variation des constantes arbitraires, dans les problemes de la mecanique.— Mem. Inst. France, 1809, p. 257—302; Suppl.— Ibid., p. 363-364.
372. *Lagrange J.-L.* Théorie des functions analytiques, Paris, 1813.
373. *Lagrange J.L.* Mecanique analytique. 3 ed. Paris, 1855. Vol. 2.
374. *Lagrange J.L.* Oeuvres. P., 1867. Vol. 1.
375. *Lagrange J.L.* Oeuvres. Paris: Gauthier-Villars, 1867—1892.
376. *Lagrange J.L.* Essai d 'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrates indefinies. Oeuvres de Lagrange, vol. I, Paris, 1867, стр. 335—362.
377. *Lagrange J.L.* Rocherches sur la metliode de rnaximis et minim is, Oeuvres tie Lagrange, vol. I, Paris, 1867, стр. 15.
378. *Lagrange J.L.* Sur la methode des variations, Oeuvres de Lagrange, vol. II, Paris, 1868, стр. 37-67.
379. *Lagrange.* Memoire sur la theorie generate de la variation des constantes arbitrages dans tous les problemes de la mecanique. «Oeuvres», t. VI, 1873, стр. 771—809.
380. *Lagrange.* Second Memoire sur la theorie de la variation dos constantes arbitrages dans les problemes de mecanique, dans lequel on simplifie 1'application des formules generates a ces problemes. «Oeuvres», t. VI, 1873, стр. 809—816.
381. *Lagrange.* Sur l'équation seculaire de la Lune. «Oeuvres», t. VI, стр. 335—403.
382. *Lagrange J.L.* Theorie des functions analytiques, Oeuvres de Lagrange, vol. IX, Paris, 1881.
383. *Lagrange J.L.* Lecons sur le calcul des l'onclions, Oeuvres de Lagrange, vol. X, Paris, 1884.
384. *Lagrange.* Application de la méthode exposée… Див. в зб. «Вариационные принципы механики». М.: Физматгиз, 1959. - С. 117-158.
385. Lagranges matheniatische Werke, Berlin, Bd. II, стр. 853.
386. *Laguerre E.* Oeuvres. Paris: Gauthier-Villars, 1898—1905, Vol. 1—2.
387. *Laplace P.-S.* Oeuvres completes. Paris: Gauthier-Villars, 1878—1912. Vol. 1—14.
388. *Laplace P.-S.* Theorie des attractions des spheroides et de la figure de la terre, Mem. AS, 1785

389. *Lebesgue V.* Memoire sur une formule de Vandermonde et son application ä la demonstration d'un theoreme de M. Jacobi.— J. math. pures et appl., 1841, vol. 6, p. 17—35.
390. *Lecat M.* Calcul des variations.— Encycl. sei. math. pures et appl., 1913, t. 2, p. 1 — 128.
391. *Legendre A.M.* Memoire sur la maniere dedistinguer les maxima et minima dans lc Calcul des Variations (Memoires de l'Academie royale de Sciences, annee 1786, Paris, 1788, стр. 7—37).
392. *Legendre A.M.* Addition. Memoires de l'Academie royale des Sciences, Paris, 1789, c. 348-351.
393. *Leibniz G.W.* Demonstrationes novae de Resistentis solidorum // Acte Eruditorum Lipsiae 1684. — P. 319 — 325.
394. *Leibniz G.W.* De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis. Submitted to the Academie des Sciences, Paris (1676), Translated into German with comments by E. Knobloch, Berlin.
395. *Leibniz G.W.* Communicatio suae pariter, duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Jo. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curvae celerrimi descensus a Dn. Jo Bernoullio geometris publice propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem postea propositi. Acta Eruditorum, 201–206 (May 1697).
396. Leibnizens Mathematischen Schriften, herausgegeben von Gerhardt, I Abt., том 3, 1855.
397. *Lejeune-Dirichlet P.G.* Vorlesungen über die umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Leipzig, 1876.
398. *Lejeune-Dirichlet P.G.* Vorlesungen uber Zahlentheorie. – Braunschweig, 1863.
399. *Leissa A. W.* The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods. Journal of Sound and Vibration, 287:961–978, 2005.
400. *Lie S.* Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen. «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab», Bd. XL Kristiania, 1877, стр. 128—156.
401. *Mainardi G.* II calcolo delle variazioni.— Ann. sei. mat. e fis., 1852, vol. 3, p. 149—192.
402. Mathematische Annalen, 1910, 68, 133–140.
403. *Mayer A.* Begriiudung der Lagrangescben Multiplikatoreninethode der Variationsreclmung.— Math. Ann., 1886, 26, S. 74—82.
404. *Mayer A.* Die Lagrangesche Multiplikatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variablen.— Ber. Verhandl. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, 1895, Bd. 47, S. 129—144.
405. *Mayer A.* Über das allgemeinste Probleme der Variationsrechnung.— Ber. Verhandl. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, 1878, Bd. 30, S. 16—32.
406. *Mayer A.* Unabhängigkeitssatz und Jacobi—Hamiltonsche Theorie des zugehörigen Integrationsproblem. - Math. Ann., 1903, Bd. 58, S. 235—248.
407. *McSchane E. J.* On multipliers for Lagrange problems.— Amer. J. Math., 1939, 61, p. 809 - 819.
408. Mechanica sive motus scientia, II, 1736.
409. Memoires de l'Acad sci. St. Pétersb., v. 3, (1809–1810) 1811.
410. Miscellanea Taurinensia, t. 1, 1750.
411. *Moigno F. M., Lindeföf L.L.* Lecons sur le calcul des variations. Paris, 1861.
412. *Morse M., Myers H.* The Problems of Lagrange and Mayer with variable end-points.— Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., 1931, 66, p. 235-253.
413. *Newton Is.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687.

414. Oeuvres de Fermat, Paris, 1891—1892, II, 354.
415. Oeuvres de Fermal, supplement aux tt. I-IV, par M. C. de Waard, Paris 1922.
416. Oeuvres de Lagrange, vol. I, Paris, 1867.
417. Oeuvres de Lagrange, vol. XIV.
418. *Ohm M.* Die Lehre vom Grossten und Kleinsten, Berlin, 1825.
419. *Ostrogradski M.* Memoire sur le calcul des variations des integrales multiples.— Mem. Acad. sei. St.-Petersb. Sei. math., phys. et nat. (1834), 1838, vol. 1, p. 35— 38.
420. *Ostrogradski M.* Memoire sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres.— Mem. Acad. sei. St.-Petersb. Sei. math., phys. et nat. Ser. 6 (1848), 1850, vol. 4, p. 385—517.
421. *Ostrogradski M.* Note sur la theorie de la chaleur.— Mem. Acad. sei. St.-Petersb. Sei. math., phys. et nat. Ser. 6 (1828), 1831, vol. 1, p. 129—138.
422. *Ostrogradsky M.* Sur les integrales des equations generales de la dynamique. Melanges de L'academie de St. Petersbourg, 6/18 oct 1848, изб. произв., изд. АН СССР, 1958.
423. Ostwalds Klassiker, № 46, Leipzig, 1894.
424. Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt. 3 vols. Berlin, 1876–78.
425. *Poisson S.D.* Memoire sur le calcul des variations.— Mem. Acad. sei. Paris, 1833, vol. 12, p. 223—331.
426. *Poisson S.D.* Lehrbuch der Mcchanik, Berlin, Bd. I, стр. 238.
427. *Poisson S.D.* Traite de mecanique, Paris, 1811.
428. *Poisson S.D.* Traite de mecanique. V. 1-2. — Paris: — 1833.
429. *Poisson S.D.* Memoire sur la variation des constantes arbitrages dans les questions de mecanique. «Journ. de TEcole Poly-technique», t. VIII. Paris, 1809, стр. 281—282.
430. *Poisson S.D.* Memoire sur la variation des constantes arbit-raires dans les questions de mecanique. «Mem. Inst.», t. 1, 1816, стр. 1—70.
431. *Poisson S.D.* Sur les inegalites seculaires de moyens mouvements des planetes. «Journ. de 1'EcoIe Polytechnique», t. VII. Paris, 1809, стр. 1—56.
432. *Rankin W.J.M.* Manual of applied machanics. — London: 1858.
433. *Rayleigh J.W.S., Lindsay Robert B.* The Theory of Sound vol. I - London : Macmillan, 1877, 1894. [Переклад російською: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 1. — 503 с.].
434. *Rayleigh J.W.S., Lindsay Robert B.* The Theory of Sound vol.II - London: Macmillan, 1878, 1896. [Переклад російською: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 2. — 474 с.].
435. *Rayleigh.* On the calculation of chladnis figures for a square plate. Philosophical Magazine Sixth Series, 22:225–229, 1911.
436. *Riemann B.* Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Inauguraldissertation Göttingen, 1851. (Gesammelte Werke, p. 3–43).
437. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." J. reine angew. Math. (Crelle), 135, 1-61, 1908.
438. *Scheeffer L.* Die Maxima und Minima der einfachen Integrate zwischen festen Grenzen.— Math. Annalen, 1885, 25, 522—593.
439. *Schellbach K.H.* Probleme der Variationsrechnung. Crelle's Journal f¨ur die Reine und Angewandte Mathematik 41, 293–363 + 1 table (1851).

440. *Signorini A.* Questioni di elasticiti non linearizzata o semilinearizzata//Rend, di Matem. e. delle sue appl.– 1959.– P. 17–31.
441. *Spiess O.* Die Mathematiker Bernoulli. – Basel, 1948.
442. *Spitzer S.* Über die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung.— Sitzungsber. Kgl. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. KL, 1854, Bd. 12, H. 2, S. 1014—1071.
443. *Stäckel P.* BemerkungenzurGeschichtedergecdasisclien Linien, Leipzig, 1893.
444. *Stein E., Wiechmann K.:* New insight into optimization and variational problems in the 17th century. Engineering Computations 20, 699–724 (2003).
445. *Stevin S.* De Beghinselen der Weeghconst, 1586.
446. *Stolz O.* Grundzüge der Differential-und Integralrechnung. Leipzig: Teubner, 1893. Bd. 1.
447. *Taylor R. L.* Ritz & Galerkin: the road to the Finite Element Method. Bulletin for the international association for computational Mechanics, 12:2–5, 2002.
448. *Thomson W.* (later Lord Kelvin). Sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de Physique math´ematique. Journal de mathématiques pures et appliquées, 12:493–496, 1847.
449. *Todhunter I.* A history of the calculus of variations during the nineteenth Century. Cambridge; London: Macmillan, 1861; New York: Chelsea publ. co, 1962.
450. *Todhunter I.* Researches in the calculus of variations, principally in the theory of discontinuous solutions, London, 1871.
451. *Turksma B.* Begründung der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode in der Varia tionsrechnung.— Math. Ann., 1896, Bd. 47, S. 33—46.
452. *Turner N. J., Clough R. W., Martin H. C., and Topp L.J.* Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero. Sci., 23:805–23, 1956.
453. *Valentine F.A.* The problem of Lagrange differential inequalities as added side conditions. Chicago: Univ. press, 1937.
454. *Weierstrass K.* Mathematische Werke. Bd.7: Vorlesungen über Variationsrechnung (bearbeitet von Rudolf Rot he). Berlin-Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.
455. *Weierstrass K.* Mathematische Werke. Berlin: Mayer und Miiller, 1894—1927. Bd. 1-7.
456. *Weierstrass K.* Über das sogennante Dirichlet'sche Princip, 1895. Read in the Academy Berlin 14. July 1870.
457. *Young T.* A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. — London. — 1807. — V. 2. — 738 p.
458. *Zermelo E., Hahn H.* Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren.— Encykl. math. Wiss., 1904, Bd. 2, H. 5.

ЧАСТИНА II

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ

В історії діє два закони: закон великих чисел і закон великих людей.

Й. Левін

... в науці є своя естетика, і краса логічної стрункості варіаційних принципів механіки не може не захоплювати математиків, фізиків, механіків.

Л.С. Полак

НАРИС 11

ЗАГАЛЬНІ ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ МЕХАНІКИ. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ

Історія науки - це наука сама по собі.
Й.В. Гете

Як відомо, принцип віртуальних швидкостей перетворює будь-яку проблему статики в питання чистої математики, а за допомогою принципу D'Аламбера динаміка, в свою чергу, зводиться до статики. Звідси випливає, що жоден основний принцип рівноваги і руху не може істотно відрізнятися від двох згаданих нами вище принципів, і що яким би не був цей принцип, його завжди можна розглядати як більш-менш безпосередній висновок з них.
Й.К.Ф. Гаусс

Вступ

> *Історія механіки і фізики - це історія спроб пояснити те, що відбувається у світі, який нас оточує, за допомогою невеликої кількості законів і універсальних принципів. Найбільш вдалі і плідні спроби пов'язані з ідеєю про те, що явищам, які ми спостерігаємо, притаманні деякі екстремальні властивості і шукані загальні принципи мають варіаційний характер ...*
>
> В.Л. Бердичевський

Кожний варіаційний принцип стверджує, що для деякого класу задач, якщо задані умови задачі, то з усіх уявних станів, процесів тощо, у певному розумінні сумісних із цими умовами, в дійсності реалізується такий стан, такий процес, який надає деякому характерному для цього принципу функціоналу стаціонарне значення. Іноді говорять не про стаціонарне, а про екстремальне значення, що не завжди рівноцінно. Варіаційний принцип еквівалентний деякій системі диференціальних рівнянь. Тож варіаційний принцип характеризується класом задач, поняттям сумісності процесів, що порівнюються, з умовами задачі і визначеним для цих процесів функціоналом, який повинен приймати стаціонарне або екстремальне значення.

Щодо термінології слід зазначити, що, строго кажучи, термін «варіаційний принцип» слід було б вживати тільки стосовно систем з нескінченним числом ступенів вільності, зберігаючи для систем зі скінченною кількістю ступенів вільності термін «екстремальний принцип». Але частіше усі екстремальні принципи називають варіаційними незалежно від скінченної чи нескінченної кількості ступенів вільності систем, до яких ці принципи застосовуються. Тим більше, що сутність принципу не змінюється в залежності від того, до якої системи він застосовується [Гольденблат, 1957].

Взагалі мають місце дві основні групи варіаційних принципів. До однієї з них, яка починається з принципів Ферма, Мопертюї, Лаґранжа, Кастільяно, Гамільтона та ін. і має справу із задачами фізики і механіки та інших дисциплін, у найбільшій мірі підходять наведені вище визначення. Тут йдеться про вивчення об'єктивно існуючих процесів. Такий принцип може бути виведений із локальної теорії процесу, з його диференціальних рівнянь Ейлера для функціонала, який характеризує принцип. У цьому випадку більше йдеться про стаціонарне значення функціонала, оскільки для локальних властивостей екстремальність цього значення неістотна. Разом з тим, можуть бути класи задач, для яких екстремальність несе додаткову інформацію, наприклад, про стійкість процесу. Слід зазначити, що, якщо варіаційний принцип є еквівалентним диференціальному рівнянню, цей принцип часто є кориснішим за рахунок його більшої універсальності, а також зручності застосування чисельних методів.

Друга основна група варіаційних принципів має справу із задачами теорії математичної економіки, оптимального управління. Тут йдеться про розробку у заданих умовах певної стратегії, яка забезпечувала б за цих умов максимальну користь. Значення цієї користі, функції цілі і являє собою функціонал, причому, як правило, цей функціонал необхідно максимізувати. Відповідна математична теорія була створена у середині п'ятидесятих років минулого століття і отримала назву теорії оптимального управління. Теорія оптимального управління являє собою синтез ідей і методів класичного варіаційного числення із сучасними підходами.

Подібно математичному аналізу, побудованому у XVIII ст. по аналогії з основними алгебраїчними операціями, варіаційне числення у той же час будувалось по аналогії з відомими операціями аналізу і покладене в основу найновіших математичних методів теорії оптимального управління. Як підкреслив відомий американський математик Лоуренс Янг [Янг, 1974]: «Тепер видно, що задача Лаґранжа по суті не відрізняється від задачі оптимального управління: тільки остання являє собою більш сучасне формулювання першої. Інколи вказують на невеликі помітні розбіжності, але насправді вони є зовсім несуттєвими».

Бурхливий розвиток теорії оптимального управління і його застосувань у практичних задачах, відомий принцип максимуму Понтрягіна – все це, з одного боку, стимулювало інтерес до варіаційних задач, але, з іншого, призвело до досить розповсюдженого ставлення до класичного варіаційного числення, як до деякого анахронізму. Насправді, як визначає Л. Янг [Янг, 1974], це не зовсім так. І справа тут не тільки у тому, що варіаційне числення за Л. Янгом є «літописом математичних понять. А оскільки зараз прогрес у математиці багато у чому пов'язаний з появою нових понять, варіаційне числення являє собою актуальний напрям подальших досліджень, і в цьому відношенні жодна галузь математики не іде ні у яке порівняння з варіаційним численням».

Дослідження частинних задач варіаційного числення, або, як ми будемо говорити, частинних варіаційних задач, почалося надзвичайно давно. Це пояснюється тим, що в багатьох ситуаціях людину влаштовує тільки кращий з можливих варіантів. Так ми приходимо до проблем оптимізації, тобто до проблем знаходження максимуму або мінімуму. Деякі з цих задач були розв'язані за допомогою елементарних засобів математичного аналізу, однак у більшості випадків для їх вирішення потрібні складніші методи.

Насправді ці задачі вимагають не тільки нових методів, але, що більш істотно, нових понять. За такі задачі не варто братися голіруч; спочатку слід подбати про хороше спорядження. Необхідні поняття вироблялися досить повільно, і хоча зараз вони пронизують всю сучасну математику, багато хто навіть не підозрює, що ці поняття виникли саме у варіаційному численні. Це частково пояснюється тим, що в варіаційному численні ще збереглася старомодна термінологія.

Вже сама назва предмета є чисто історичною, вона пов'язана з одним методом, висхідним до Л. Ейлера і заснованим на так званих варіаціях. Цей метод колись грав у варіаційному численні важливу роль, однак зараз він представляє лише другорядний інтерес. Варіаційне числення фактично стало одним з розділів функціонального аналізу і займає в ньому таке ж місце, як теорія максимумів і мінімумів у звичайному аналізі.

А якщо це так, то й не дивно, що поняття, які, як прийнято думати, відносяться до функціонального аналізу або випливають з нього, насправді вперше виникли (можливо у менш елегантній формі) у варіаційному численні. Так, ряд основних засобів сучасної математики, - наприклад, узагальнені функції («розподілу») Л. Шварца, нерівність Юнга, а також опуклі фігури і їх поляри - можна в зародковій формі виявити в класичних методах варіаційного числення.

Що стосується безпосереднього зв'язку варіаційного числення з іншими розділами математики, то неважко зрозуміти, яку важливу роль відіграють у ньому фундаментальні питання чистої логіки. Однак основне застосування варіаційне числення знаходить в аналізі і геометрії або у зв'язку з отриманням певних нерівностей і оцінок (як в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними), або при розробці якісно нових методів і понять (як це було у Г. Рімана, який застосовував його до конформних відображень, а також в теорії потенціалу щодо принципу мінімуму Діріхле - принципу, який згодом отримав обґрунтування в знаменитій роботі Д. Гільберта [Hilbert, 1900]).

З наведеного можна було б зробити висновок, що варіаційне числення - наука досить «чиста», що має віддалене відношення до прикладної математики. Насправді якраз навпаки. Не тільки конкретні задачі варіаційного числення відіграють основну роль в повсякденному житті і в таких галузях як економіка, техніка тощо (адже людство намагається діяти найкращим чином в межах наявних можливостей), але й сама ця теорія усім своїм розвитком зобов'язана потребам оптики, а пізніше потребам космічних наук та інших подібних питань.

До речі, серед відомих «проблем Д. Гільберта» деякі (зокрема, двадцята) присвячені варіаційному численню [Янг, 1974].

Нагадаємо, що 8 серпня 1900 року на спільному засіданні секції історії і бібліографії та секції викладання і методології Другого Міжнародного конгресу математиків Д. Гільберт зробив доповідь «Математичні проблеми» [Гільберт, 1900]. Опублікований текст доповіді Д. Гільберта складався із вступу, основної частини, в якій сформульовані 23 проблеми, і заключення. У вступі Д. Гільберт говорить про важливість добре поставленої проблеми для розвитку науки, про те, яким якостям вона повинна відповідати, паро джерела, з яких математика черпає свої проблеми, а також про вимоги, які повинні бути висунуті до їх розв'язків. Далі він формулює власне проблеми, перші 6 з яких відносяться до обгрунтування різних математичних дисциплін, інші - до більш спеціальних питань алгебри, теорії чисел і геометрії (проблеми 7-15), теорії функцій, диференціальних рівнянь і варіаційного числення (проблеми 16-23) [Рыбников, 1970].

19-а і 20-а проблеми тісно пов'язані між собою, стосуються варіаційного числення і мають в значній мірі спільну історію.

19-а проблема ставиться наступним чином: чи будуть усі розв'язки регулярної варіаційної задачі, тобто задачі знаходження функції, що надає мінімум функціоналу

$$\iint\limits_{\Omega} F(p,q,z,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, \, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right],$$

де $F(p,q,z,x,y)$ - аналітична функція, що задовольняє нерівність $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0$, обов’язково аналітичними, тобто чи будь-який розв’язок рівняння Лагранжа регулярної варіаційної проблеми (а це еліптичне рівняння) є аналітичною функцією?

20-а проблема формулюється так: «чи існує розв’язок кожної регулярної варіаційної задачі, якщо тільки на граничні умови накладені певні припущення … і якщо при необхідності самому поняттю розв’язку надати розширеного тлумачення?» У більш широкому плані це проблема існування розв’язків граничних задач для еліптичних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Постановка 19-ої і 20-ої проблем диктувалась як міркуваннями суто математичного характеру, так і натурфілософськими ідеями Д. Гільберта. Обидві вони визначили основний напрямок розвитку квазілінійних еліптичних рівнянь. Їхнє розв’язання спонукало розробку «прямих» методів варіаційного числення, апарату апріорних оцінок, узагальнених розв’язків, теореми вкладення Соболєва, топологічних методів тощо.

Існує навіть думка, що історія механіки і фізики – це історія спроб пояснити все те, що відбувається у світі, що нас оточує, за допомогою невеликої кількості універсальних законів і загальних принципів. Найбільш вдалі і плідні спроби пов’язані з ідеєю про те, що явищам, які ми спостерігаємо, притаманні деякі екстремальні властивості і загальні принципи мають варіаційний характер, тобто стверджують, що у реально існуючих процесах деякі величини досягають свого максимального або мінімального значення [Бердичевский, 2005].

Варіаційні принципи механіки мають велике теоретичне і прикладне значення, оскільки:

- виявляють загальну енергетичну природу досліджуваних явищ;
- дають змогу автоматично отримати рівняння рівноваги (руху), статичні граничні умови або рівняння сумісності деформацій і кінематичні граничні умови, які інколи не можуть бути строго отримані іншими методами;
- функціонал, який підлягає варіюванню, має цілком визначений фізичний зміст і інваріантний відносно перетворення координат. Тобто, якщо варіаційний принцип сформульований в одній системі координат, то можна отримати визначальні рівняння в іншій системі координат, а потім здійснити варіювання. Наприклад, якщо варіаційний принцип був сформульований у прямокутній декартовій системі координат, то визначальні рівняння у циліндричній або сферичній системі координат можуть бути отримані за допомогою зазначеної процедури. Ця властивість робить варіаційні методи надзвичайно ефективними при дослідженні конструкцій;
- варіаційне формулювання є зручним для виконання звичайних математичних

процедур, а саме перетворення даної задачі у еквівалентну, яка розв'язується простіше вихідної задачі. У варіаційному формулюванні з додатковими умовами це перетворення здійснюється за допомогою множників Лаґранжа. Таким чином можна отримати сімейство варіаційних принципів, еквівалентних один одному. До таких перетворень, зокрема, відноситься відоме перетворення Фрідріхса;

- суттєвим є те, що іноді варіаційні принципи приводять до формул для верхньої і нижньої оцінок задачі. Звичайно при оцінці точності отриманих таким чином розв'язків слід дотримуватись обережності;
- дають змогу знаходити розв'язки задач, оминаючи складання і розв'язок диференціальних рівнянь, за допомогою так званих прямих методів варіаційного числення, найзручніших для реалізації у сучасних чисельних процедурах.

Варіаційні принципи набули особливого значення лише у даний час у зв'язку із розвитком методу скінченних елементів, який отримав широке розповсюдження починаючи з піонерної роботи Дж. Тернера [Turner et al. 1956], робіт Р. Клафа [Clough, 1960], Дж. Аргіріса [Argyris, 1954, 1955, 1957], О. Зенкевича [Zienkiewicz & Cheung, 1967] та інших. За тим неодноразово було доведено, що варіаційні принципи є ефективним засобом у математичному формулюванні методу скінченних елементів і що, навпаки, прискорений розвиток методу скінченних елементів стимулював удосконалення варіаційних принципів.

У механіці суцільного середовища існує багато різних і на перший погляд не пов'язаних між собою варіаційних принципів. Варіаційні постановки задач можуть бути представлені або у формі інтегральних тотожностей, які в механіці розглядаються як варіаційні начала і носять назву варіаційних рівнянь, або у формі вимог стаціонарності відповідних функціоналів, що в механіці розглядаються як варіаційні принципи. Для систематизації за основу обирають варіаційне рівняння для суцільного середовища. При цьому варіаційні принципи можуть мати різний характер в залежності від того, які функції варіюються, а які використовуються як залежності обмежень. Подальші перетворення основані на ідеї двоїстості. Прямій задачі мінімізації функціонала Лаґранжа відповідає двоїста задача максимізації функціонала Кастільяно із протилежним знаком. При цьому екстремальні значення відповідних функціоналів співпадають. За такою схемою будуються і змішані функціонали.

В цілому, в класичній будівельній механіці функції потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії є додатно визначеними квадратичними формами. Вони є двоїстими за Юнгом функціями і пов'язані між собою перетворенням Лежандра. Перетворення Лежандра є частинним випадком перетворення Юнга-Фенхеля і за фізичним змістом являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил, тобто відповідає теоремі Клапейрона. Екстремуми двоїстих функцій потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії дають теореми Лаґранжа і Кастільяно, та призводять до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці яких (матриці жорсткості і матриці піддатливості) є матрицями Гессе або матрицями других похідних відповідно від потенціальної енергії пружної деформації (матриця жорсткості) і доповнювальної потенціальної енергії (матриця піддатливості). Ці матриці є позитивно визначеними і задовольняють критеріям Сільвестера, тобто усі їх головні мінори є позитивно визначеними. Вони є також взаємно оберненими.

Еволюція варіаційних принципів механіки пружного середовища показана у наведеній нижче таблиці, де в стовпчиках 1,2,3 послідовно показані етапи розвитку відповідно: 1 – «Основні варіаційні принципи і теореми»; 2 - «Механіка матеріалів. Пружні константи. Напружені стани»; 3 – «Потенціали теорії пружності. Варіаційні теореми».

Ст.	**Основні варіаційні принципи і теореми**		**Механіка матеріалів. Пружні константи. Напружені стани**		**Потенціали теорії пружності. Варіаційні теореми**	
До XVII	Принцип можливих швидкостей (переміщень) Аристотель	384-322 до н.е.				
XVII	Принцип Ферма.	**1629**	Г. Галілей.	**1638**	Середовище Декарта.	**1637**
	Поняття дії Г. Лейбніца.	**1669**	Р. Гук.	**1660**	Середовище Ньютона.	**1687**
			Е. Маріотт.	**1680**		
			Г. Лейбніц.	**1684**		
XVIII	Принцип Д'аламбера.	**1743**	П. Варіньон.	**1702**	Р.Й. Бошкович.	**1763**
	Принцип найменшої дії Мопертюї.	**1744**	Якоб I Бернуллі.	**1705**	Перетворення Лежандра.	**1787**
	Л. Ейлер.	**1744**	А. Паран.	**1713**		
	Ж.-Л. Лагранж.	**1788**	Г. Білфінгер.	**1723**		
			Л. Ейлер.	**1727**		
			Ш.О. Кулон.	**1773**		
			П. Жирар.	**1798**		
XIX	Принцип Гаусса.	**1829**	Т. Юнг.	**1807**	А. Нав'є.	**1821**
	Принцип Гамільтона-Остроградського.	**1834** **1848**	А. Дюло.	**1820**	О. Коші.	**1822**
	Принцип Гамільтона-Пуанкаре.	**1834** **1892**	Т. Тредгольд.	**1821**	Нерівність Фур'є.	**1822**
	Принцип Лагранжа-Діріхле-Гріна.	**1839**	А. Нав'є.	**1826**	Теореми і формули Дж. Гріна.	**1828**
	Л. Менабреа.	**1857** **1875**	С.Д. Пуассон.	**1833**	Формула Гаусса-Остроградського.	**1828**
			Н. Персі.	**1834**	С.Д. Пуассон.	**1833**
			Д. Журавський.	**1840**	Теорема Клапейрона.	**1833**
			Ж. Бресс.	**1840**		
			А. Сен-Венан.	**1843**		

XIX	Теорема Максвелла. Д.Г. Коттерілл. Принцип Кастільяно. Ж. Бертран. I і II теореми Кастільяно. Теорема Мора. Теорема Енгессера-Кротті. Принцип Герца. Принцип Релея.	**1864** **1865** **1866** **1870** **1873** **1874** **1889** **1894** **1894**	В. Томсон, лорд Кельвін. Теорема Клапейрона за версією Ламе. Теорема Бетті.	**1839** **1852** **1872**
XX	Зайві невідомі Кирпичова. Принцип Журдена. Задача стійкості Тимошенка. Е. Хеллінгер. Г. Пранге. Е. Рейсснер. Б.М. Фрайш де Вебеке Ху Хайчанг. К. Васідзу.	**1902** **1908** **1913** **1914** **1915** **1950** **1951** **1955** **1955**	Теорема незалежності Гільберта. Нерівність Юнга. Теорема Нетер. Перетворення Фрідріхса. Перетворення Гільберта-Куранта. Формула Папковича	**1906** **1918** **1918** **1929** **1933** **1933**

11.1. Принцип можливих швидкостей (переміщень)

... усякий закон буде тим більш цінним,
чим більш він буде загальним.
А. Пуанкаре

Першорядне має бути вивчене спершу.
Я.А. Каменський

Відшукай усьому початок, і ти багато що зрозумієш.
К. Прутков

Принцип можливих швидкостей (переміщень) – диференціальний варіаційний принцип класичної механіки, що виражає найбільш загальні умови рівноваги механічних систем з ідеальними в'язями.

Згідно з цим принципом механічна система перебуває в рівновазі в деякому положенні тоді і тільки тоді, коли сума елементарних робіт заданих активних сил на будь-якому можливому переміщенні, що виводить систему з розглянутого положення, дорівнює нулю або є меншою за нуль:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \leq 0 \qquad (11.*)$$

у будь-який момент часу.

Можливими переміщеннями системи називаються елементарні (нескінченно малі) переміщення $\delta\mathbf{r}_\nu$ точок системи, що допускаються в даний момент часу накладеними на систему в'язями. Проекції можливих переміщень на декартові координатні осі називаються варіаціями декартових координат [Математическая энциклопедия, 1977].

Якщо в'язі є утримуючими (двосторонніми), то можливі переміщення зворотні, і в умові (11.*) слід брати знак рівності; якщо ж в'язі є неутримуючими (односторонніми), то серед можливих переміщень є незворотні. При русі системи під дією активних сил в'язі діють на точки системи з деякими силами реакцій $\mathbf{R}_\nu$ (пасивні сили), у визначенні яких передбачається повністю врахованими механічна дія в'язей на систему (в тому сенсі, що в'язі можна замінювати викликаними ними реакціями) (аксіома звільнюваності). В'язі називаються ідеальними, якщо сума елементарних робіт їх реакцій $\sum \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \geq 0$, причому знак рівності має місце для зворотних можливих переміщень, а знаки рівності або більше нуля - для незворотних переміщень. Положення рівноваги системи - такі положення $\mathbf{r}_\nu$=$\mathbf{r}_\nu(t_0)$, в яких система буде залишатися весь час, якщо вона поміщена в ці положення з нульовими початковими швидкостями $\mathbf{v}_\nu(t_0) = 0$; при цьому передбачається, що рівняння в'язей задовольняються при будь-якому t значеннями $\mathbf{r}_\nu$=$\mathbf{r}_\nu(t_0)$ і $\mathbf{v}_\nu$ =0. Активні сили в загальному випадку вважаються заданими функціями $F_\nu(t, r_\mu, v_\mu) \in C^1$, а в умові (11.*) слід вважати $F_\nu(t, r_\mu(t_0), 0)$.

В умові (11.*) містяться всі рівняння і закони рівноваги системи з ідеальними в'язями, завдяки чому можна сказати, що вся статика зводиться до однієї загальної формули (11.*).

Закон рівноваги, що виражається принципом можливих переміщень, вперше було встановлено Гвідо Убальді (Guido Ubaldi) на важелі і на рухомих блоках або поліспастах. Г. Галілей (G. Galilei) встановив його для похилих площин і розглядав цей закон як загальну властивість рівноваги простих машин. Дж. Валліс (J. Wallis) поклав його в основу статики і з нього вивів теорію рівноваги машин. Р. Декарт (R. Descartes) звів всю статику до єдиного принципу, який, по суті, збігається з принципом Галілея. Й. Бернуллі (J. Bernoulli) першим зрозумів загальний характер принципу можливих переміщень і його корисність при вирішенні задач статики. Ж. Лагранж [Лагранж, 1950] висловив принцип можливих переміщень у загальній формі і тим самим звів всю статику до єдиної загальної формули; він надав доведення (недостатньо строге) принципу можливих переміщень для систем, обмежених двосторонніми (утримуючими) в'язями. Загальна формула статики для рівноваги будь-якої системи сил і розроблений Ж. Лагранжем метод застосування цієї формули були систематично їм використані для виведення загальних властивостей рівноваги системи тел і вирішення різних проблем статики, включаючи задачі рівноваги нестисливих, а також стислих і пружних рідин. Ж. Лагранж вважав принцип можливих переміщень основним принципом для всієї механіки. Строге доведення принципу можливих переміщень, а також поширення його на односторонні (неутримуючі) в'язі було дано Ж. Фур'є [Fourier, 1798], М.В. Остроградським [Остроградский, 1946].

Слід зазначити, що в курсі аналітичної механіки формулюється принцип віртуальних переміщень. При цьому під віртуальними переміщеннями розуміють нескінченно малі переміщення, які припускаються в'язями, при «замороженому часі», а не при зафіксованому, як у випадку можливих переміщень. Тобто віртуальні переміщення відрізняються від можливих, тільки коли в'язі є реономними (явно залежать від часу).

Якщо, наприклад, на систему накладено l голономних реономних в'язей:

$$f_\alpha(\mathbf{r},t)=0, \quad \alpha=\overline{1,l},$$

то можливі переміщення $\Delta\mathbf{r}$ - це ті, які задовольняють рівність

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}\cdot\Delta\mathbf{r}+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t=0, \quad \alpha=\overline{1,l},$$

а віртуальні $\delta\mathbf{r}$:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}\cdot\delta\mathbf{r}=0, \quad \alpha=\overline{1,l}.$$

Віртуальні переміщення, взагалі кажучи, не мають відношення до процесу руху системи - вони вводяться лише для того, щоб виявити існуючі в системі співвідношення сил і отримати умови рівноваги. Малість переміщень потрібна для того, щоб можна було вважати реакції ідеальних в'язей незмінними.

Загалом відомо [Суслов, 1944], що голономна система – це система матеріальних точок, які або не обмежені ніякими в'язями, або обмежені тільки геометричними в'язями, що накладають обмеження на положення точок системи і можуть бути представленими у формі скінченних співвідношень виду

$$f_s(x_1,\dots,x_{3N},t)=0, \quad s=1,\dots,k; \quad f_s(x,t)\in C^2. \tag{11.1}$$

Тут t позначає час, x_i - декартові координати точок, N - число точок системи. Якщо $\partial f_s/\partial t\equiv 0$, то в'язі називаються стаціонарними, в іншому випадку - нестаціонарними. Будь-яке положення системи, для якого координати точок задовольняють рівнянням (11.1), називається можливим для даного моменту t. В'язі (11.1) накладають обмеження не тільки на положення x_ν, але і на швидкості v_ν і прискорення w_ν точок виду

$$\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}t}=\sum_{v=1}^{N}\operatorname{grad} f_s\cdot\upsilon_v+\frac{\partial f_s}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_s}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{v=1}^{N}\operatorname{grad} f_s\cdot\omega_v+\ldots=0. \tag{11.2}$$

Швидкості і прискорення, що задовольняють рівнянням (11.2), називають кінематично можливими в даному положенні x_v системи для даного моменту t. Нескінченно малі переміщення δr_{v}, що задовольняють умовам виду

$$\sum_{v=1}^{N}\operatorname{grad} f_s\cdot\delta r_{\mathrm{v}}=0,\ \ s=1,\ldots,k, \tag{11.3}$$

являють собою можливі (віртуальні) переміщення системи, на відміну від дійсних переміщень $\mathrm{d}r_{\mathrm{v}}$, що здійснюються системою за час $\mathrm{d}t$ під дією прикладених до неї сил і які відповідають умовам виду

$$\sum_{v=1}^{N}\operatorname{grad} f_s\cdot\mathrm{d}r_{\mathrm{v}}+\frac{\partial f_s}{\partial t}\mathrm{d}t=0,\ \ s=1,\ldots,k. \tag{11.4}$$

Для стаціонарних в'язей дійсні переміщення знаходяться серед можливих, для нестаціонарних - взагалі кажучи, не знаходяться. Можливі переміщення здатні перевести голономну систему з одного можливого для даного t положення системи в будь-яке інше нескінченно близьке положення, можливе для того ж моменту t.

Число незалежних варіацій координат точок системи називається числом її ступенів свободи, для голономної системи воно збігається з числом $n=3N-k$ незалежних довільних параметрів q_i, за допомогою яких рівняння (11.1) в'язей можна подати в формі скінченних співвідношень виду

$$x_v=x_v(q_1,\ldots,q_n,t),\quad v=1,\ldots,3N,\quad x_v(q,t)\in C^2. \tag{11.5}$$

Параметри q_i називаються узагальненими, або лагранжевими координатами системи; їх називають також голономними координатами, на відміну від неголономних координат, або квазікоординат π_s, що вводяться за допомогою неінтегруємих співвідношень виду

$$\mathrm{d}\pi_s=\sum_{i=1}^{n}a_{si}\,\mathrm{d}q_i,\quad a_{si}(q_i,t)\in C^1. \tag{11.6}$$

В'язі, які аналітично виражаються рівняннями (1), носять назву утримуючих, або двосторонніх в'язей, на відміну від неутримуючих, або односторонніх в'язей, які виражаються нерівностями виду

$$f(x,t)\geq 0,$$

і накладають такі умови на можливі переміщення

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot \delta r_\nu \geq 0.$$

Можливі переміщення системи з двосторонніми в'язями є зворотними, серед можливих переміщень систем з односторонніми в'язями є незворотні (див. [Суслов, 1944]).

Рух голономних систем описується рівняннями Лагранжа (1-го і 2-го роду), рівняннями Гамільтона в лагранжевих координатах і імпульсах, рівняннями Аппеля, Пуанкаре рівняннями або рівняннями Четаєва в лагранжевих координатах і квазікоординатах.

Зауважимо, що у формуліровки варіаційних принципів і методів можливі переміщення входять не самі по собі, а як множники в складі виразів можливої роботи. Можливою роботою сили **F**, що відповідає можливому переміщенню $\Delta\mathbf{r}$, називається елементарна робота

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\Delta r\cos(\mathbf{F},\Delta\mathbf{r})\,. \qquad (11.7)$$

До цієї можливої роботи, як і до звичайної, можна застосувати два наступних правила [Аппель, 1960].

1. Для одного і того ж можливого переміщення $\Delta\mathbf{r}$ деякої точки М робота рівнодійної системи декількох сил, прикладених до цієї точки дорівнює сумі робіт сил, що входять до системи.

2. Якщо можливе переміщення $\Delta\mathbf{r}$ є геометричною сумою декількох переміщень, то робота однієї і тієї самої сили на переміщенні $\Delta\mathbf{r}$ дорівнює сумі робіт цієї сили на окремих компонентах переміщення.

Якщо позначити через δt нескінченно малий проміжок часу, продовж якого здійснюється можливе переміщення $\Delta\mathbf{r}$, то вектор **V**, який дорівнює $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\delta t}$ і спрямований вздовж $\Delta\mathbf{r}$, називається можливою швидкістю, наданою точці М. Якщо замінити $\Delta\mathbf{r}$ виразом $\mathbf{V}\delta t$, можна записати можливу роботу у вигляді

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}\delta t = FV\cos(\mathbf{F},\mathbf{V})\delta t\,. \qquad (11.8)$$

оскільки кут між силою **F** і вектором **V** дорівнює куту між цією силою і переміщенням $\Delta\mathbf{r}$.

Аналітично, в прямокутній системі, якщо проекції сили позначити через X, Y, Z, а проекції переміщення через δx, δy, δz, то можливу роботу можна подати у вигляді

$$X\delta x + Y\delta y + Z\,\delta z\,.$$

В наш час можливу роботу, як правило, беруть в формі (11.7), хоча раніше її частіше брали в формі (11.8). При цьому, якщо застосовується форма (11.8) та якщо розглядаються можливі переміщення декількох різних точок, то вважають, що для всіх цих точок проміжок δt має одне і те саме значення.

11.1.1. Історичний огляд. Антична механіка. Аристотель, Архімед, Галілей, Стевін, Й.І Бернуллі, Ампер, Торрічеллі, Лазар Карно, Лагранж

Математика виявляє порядок, симетрію і визначеність, а це - найважливіші види прекрасного.

Аристотель

Я шаную Аристотеля нарівні зі своїм батьком, тому що якщо батьку я зобов'язаний життям, то Аристотелю тим, що дає йому ціну.

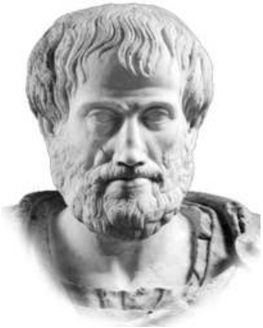
А. Македонський

Архімеда будуть пам'ятати, коли Есхіла забудуть, бо мови вмирають, а математичні ідеї — ніколи.

Г. Харді

Вважається, що принцип можливих переміщень (швидкостей) історично був першим варіаційним принципом. Його ідея в первісній формі містилася ще в «Фізиці» видатного давньогрецького філософа Аристотеля (384-322 до н.е.). Причому Аристотель, як зазначає Л. Ейлер [Эйлер, 1753], мабуть, запозичив цю думку у своїх попередників.

Тут доречно згадати і перші інтегральні варіаційні принципи. Ймовірно, найдавнішою з відомих екстремальних задач є класична ізопериметрична задача. Важко сказати, коли вперше була висловлена думка про найбільшу «місткість» кола і сфери серед всіх замкнених кривих однакової довжини або поверхонь однакової площі. Один з останніх учнів афінської школи платоників Симплікій з Кілікії (VI ст. н.е.), що склав незадовго до остаточного краху античної цивілізації великий коментар до праць Аристотеля, пише: «доведено ще до Аристотеля, бо він користується цим як відомим, а потім більш повно - Архімедом і Зенодором, що серед ізопериметричних фігур найбільш містким є коло, а серед ізопіфанних - куля». У цих словах визначена постановка таких екстремальних задач: серед плоских замкнених кривих, що мають задану довжину, знайти криву, яка охоплює найбільшу площу, і серед просторових замкнених поверхонь, що мають задану площу, знайти поверхню, яка охоплює найбільший об’єм. Для філософа-платоніка така постановка задачі є природною і пов'язана з пошуком ідеальних форм. Недаремно коло і куля були в давнину символами геометричної досконалості.



Аристотель,
дав.-гр. Ἀριστοτέλης
(384-322 до н. е.)

Прозаїчніше мотивування ізопериметричної і близьких до неї задач можна знайти в дещо наївній, але достатньо виразній формі в легенді про Дідону, стислий переказ якої міститься в нарисі 1.

Розв’язання ізопериметричної задачі в цьому випадку дається таким твердженням: якщо спрямлювана крива довжини L обмежує плоску фігуру, що має площу S, то

$$L^2 \geq 4\pi S$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли крива – коло.

Інші постановки задачі можна отримати якщо, як це природно припустити, Дідона хотіла зберегти вихід до моря. На відміну від класичної ізопериметричної задачі, ці задачі часто називають задачами Дідони.

Перші знання в галузі механіки до початку VI ст. до н. е. стосувались (користуючись сучасною термінологією) таких розділів, як гідравліка, будівельна механіка, статика, динаміка і небесна механіка. Найпростіші пристосування або так звані «прості машини»: важелі, похилі площини застосовувалися в процесі будівництва ще з найдавніших часів. Зображення чашкових ваг на єгипетському папірусі - найкраще свідчення знайомства древніх єгиптян з рівноплечевим важелем. Єгипетський колодязний «журавель» (шадуф) - свідок знайомства з нерівноплечевим важелем. Знали ці машини і у стародавніх греків, доказом чому служать весла і кермо грецьких галер.

Всі ці елементи практичної механіки стали базою для закладення механіки як науки. Перший із філософів, про якого є історичні відомості, Фалес жив у Мілеті (Мала Азія) на початку VI ст. до н. е., був, як повідомляє історик Геродот, військовим інженером і гідротехніком, у його філософії є роздуми про сутність руху.

Геракліт Ефеський жив у Малій Азії на початку V ст. до н. е. Йому належить відома теза, що в природі нема нічого сталого і незмінного: все плине!

Давньогрецький математик і філософ Піфагор (прибл. 570-490 до н. е.) заснував піфагорійський союз – філософську та релігійно-політичну громаду. З його ім’ям пов’язане введення доведень у математику і побудова геометрії як дедуктивної науки. Піфагорійці дотримувались думки, що всі закони світу можна виразити за допомогою чисел. Вони встановили чотири математичні дисципліни – арифметику, геометрію, астрономію і музику.

Зенон Елейський (прибл. 490-430 до н. е.) оспорював поняття протяжності і множини речей. Річ у тому, що ряд з нескінченим числом членів, які зменшуються, за думкою давньогрецьких математиків, мав суму членів, яка дорівнює нескінченності.

Значно розвинув учення про рух відомий грецький матеріаліст Демокріт (прибл. 460-370 до н. е.). Він вчив, що матерія складається із атомів, дрібних частинок, які не поділяються, мають різну величину і форму. Атоми рухаються у порожнині у різних напрямках і з різними швидкостями, але не прискорюючись і не сповільнюючись і, таким чином, не зупиняючись. Цей рух вічний, він не має ні початку ні кінця. Таким чином Демокріт випередив закон інерції, різниця була у тому, що він припускав не тільки прямолінійний, а і коловий рух атомів.

Вважається, що першим, хто застосував математичні методи до систематизованого вивчення механіки, був представник піфагорійської школи Архіт Тарентський (прибл. 428-347 до н. е.).

Математика епохи еллінізму розвивалась в основному у прикладному напрямку: будівництво, створення нових машин, більша увага до міцності конструкцій тощо.

Давньогрецький філософ Платон (428 або 427–347 до н. е.) заснував філософську школу в Афінах – Академію. На відміну від свого вчителя Сократа, який не визнавав природничих наук, в тому числі і математики, Платон вважав, що знання математики необхідне кожній освіченій людині. Платон є одним із фундаторів логічного обґрунтування математики.

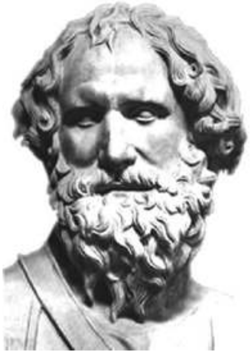
Високого розвитку досягла воєнна техніка у Александрії, де Птоломеї, які правили Єгиптом, витрачали значні кошти на створення військової техніки. У середині III ст. до н. е. в Александрії вчився Філон Візантійський (280 - 220 до н. е.) , який написав «Звід механіки» - один із перших творів з практичної механіки. Звід складався із дев’яти книжок (до нас дійшли тільки четверта і п’ята): 1) Загальні принципи механіки; 2) Вчення про важелі; 3) Про побудову бухт; 4) Про побудову метальних машин; 5) Пневматика; 6) Про побудову автоматів; 7) Воєнне обладнання; 8) Про фортифікацію і блокаду міст; 9) Тактика.

З александрійських механіків найвідоміші Ктесібій (II–I ст. до н. е.) і Герон Александрійський (прибл. 10 - 70). Ктесібій був, мабуть, самоучкою і вчителем Герона, який написав чи не найбільше праць з питань механіки серед усіх античних учених – «Механіка», «Книга про підйомні механізми», «Пневматика», «Книга про військові машини», «Театр автоматів» та інше.

В «Математичному зібранні» Паппа Александрійського (друга половина III ст.) у восьми книгах механіці присвячена восьма книга. Він називає механіку наукою про матерію і природу елементів світу і вказує, що вона вивчає стан і вагу тіл, їх рух у просторі. Він відрізняє теоретичну і практичну механіки.

До механіків епохи еллінізму відносяться і механіки древнього Риму і Карфагену.

Славетним математиком і механіком античності був Архімед (287–212 р. до н. е.). Він зробив видатний внесок у математику, механіку, фізику і астрономію, впритул підійшов до створення інтегрального числення, чим випередив свій час на два тисячоліття, багато зробив у механіці. Також він з’ясував принцип центра ваги, створив строгу систему статики, заклав основи гідростатики. У галузі прикладної механіки зробив багато винаходів, створив багато нових машин. Відомі його роботи з механіки: «Про важелі», «Про рівновагу площин», «Про тіла, які плавають» та інші.


Архімед,
дав.-гр. Ἀρχιμήδης
(прибл. 287-212 до н. е.)

Кіготь Архімеда був спроектований в III ст. до н. е. для захисту міських стін Сіракуз від римських загарбників. Кіготь являв собою гігантський кран з великими гакамикішками. Коли римський корабель підходив близько до стін, гаки хапали його і піднімали з води. А потім корабель відпускали назад у воду так, що він перекидався. Цей винахід було так ретельно приховано, що римляни думали, що вони борються з богами.

Одна з історичних легенд, пов'язана з винаходом гвинта, свідчить, що Архімеду вдалося за його допомогою на очах багатотисячного натовпу зняти з мілини величезну галеру, з усім що знаходився на ній вантажем і екіпажем. Говорячи сучасною мовою, настільки успішна і масштабна презентація відомим ученим свого дітища, переконала грецький істеблішмент того часу, що цей винахід може бути не тільки цікавим, але й винятково корисним. У подальшому стародавні греки стали активно використовувати вже модернізований гвинт для виготовлення пресів, завдяки яким вони вичавлювали з винограду сік, що використовувався для отримання вина. Гвинтовий механізм застосовували для підйому води з глибоких колодязів.

Архімед народився на Сицилії, в місті Сіракузи. Він був сином астронома Фідія і родичем Герона, що став потім тираном Сіракуз. Ймовірно, батько дав йому достатню математичну освіту: Архімед добре знав «Начала» Евкліда, що вийшли незадовго до його народження. Подальшу освіту і науковий розвиток Архімед отримав в Александрії. Тут він займається астрономією, математикою і механікою. Але вже в александрійський період виразно виявилися наукові інтереси Архімеда, а саме - проблеми механіки. Навіть у своїх астрономічних заняттях Архімед прославився винаходом механічних апаратів. Таким був прилад для вимірювання видимого діаметра Сонця і знаменита «сфера», тобто планетарій, що приводився в рух, ймовірно, водяним двигуном. Тут же був винайдений їм водопідйомник, і тут же він, очевидно, прийшов до своїх знаменитих досліджень про центри тяжіння і важелі, в тісному зв'язку з якими знаходилися і його математичні роботи.

Після повернення з Александрії вся наступна діяльність Архімеда протікала в рідному місті, аж до самої загибелі, що збіглася з падінням Сіракуз (при взятті міста в 212 р. до н. е. Архімед був убитий римськими вояками). Самовіддана робота Архімеда при захисті міста була предметом особливого подиву древніх.

Дійсно, математичний геній Архімеда проявився особливо виразно в тому, що він взявся за вирішення найважчих проблем свого часу: обчислення площ криволінійних фігур, обчислення поверхонь і об'ємів циліндра і кулі. Ці проблеми приводять його (у творі «Ефодікон», відкритому в 1906 р.) до встановлення основних понять інтегрування. Історії знадобилося біля 1700 років для того, щоб І. Ньютоном і Ґ. Лейбніцем було фактично започатковано диференціальне і інтегральне числення. Архімед був першим із стародавніх, хто встановив границі для числа π (він знайшов, що значення π міститься між 3 1/7 і 3 10/11). Свій математичний геній Архімед проявив і в розв'язанні механічних задач. Його основні досягнення: закон важеля і закон Архімеда отримані геометричним методом. Можна з повним правом назвати Архімеда родоначальником математичної фізики. Розглянемо результати Архімеда в галузі статики. Статика Архімеда викладена в трактатах: «Про рівновагу площин» та «Про плаваючі тіла». Закон важеля міститься в першому трактаті. Центральною ідеєю трактату є поняття центру тяжіння. Емпіричні відомості про рівновагу важкого тіла були відомі давно. Ще єгиптяни вживали виска. Але тільки у Архімеда ми знаходимо виразне уявлення про таку точку всередині тіла, щодо якої врівноважуються ваги всіх інших точок його, так що тіло, обперте в цій точці, буде в рівновазі. Початкові емпіричні відомості набувають у Архімеда форми аксіом-постулатів.

Звернемося тепер до іншого результату Архімеда, до його знаменитого закону [Кудрявцев, 1948]. Добре відома розповідь Вітрувія про обставини відкриття цього закону. Вигук Архімеда, який відкрив закон у ванні, «*Еврiка!*» - став часто вживаним виразом. Вітрувій розповідає, що Архімед перевірив своє відкриття за допомогою досліду. Звичайно, не підлягає сумніву, що дослід наштовхнув Архімеда на ідею, і дослід дав йому можливість її перевірити. Більше того, Архімед, безсумнівно, вмів на досліді визначати питомі ваги; згадують навіть про поплавок, за допомогою якого порівнюють питомі ваги рідин (ареометр). Але, вірний своєму методу, Архімед прагне довести закон математично, виходячи з деяких постулатів. В основу Архімед кладе таку гіпотезу про природу рідини: «Вважається, що рідина по природі своїй така, що при рівномірному і безперервному розташуванні її частинок менш стиснута частинка виштовхується більш стиснутою, і що окремі частинки цієї рідини відчувають тиск розташованої над ними рідини, оскільки ця рідина не замкнута в чому-небудь або не відчуває тиску з боку будь-якого іншого предмета»[1].

Виходячи з цієї гіпотези, Архімед показує, що поверхня рідини в спокої повинна бути сферою, центр якої збігається з центром Землі. Справді, якби цього не було, то не могло б бути рівноваги: одні частини рідини були б здавлені більше, ніж інші, що згідно з постулатом призвело б до переміщення менш здавлених частинок.

Ця теорема у Архімеда відіграє основну роль. Звідси він доводить насамперед, що тіла однакової питомої ваги з рідиною («мають при рівному об'ємі і рівну з рідиною вагу») занурюються в рідину настільки, що абсолютно не виступають над її поверхнею, але і не опускаються в ній скільки-небудь глибше.

Далі Архімед формулює свій закон в наступних двох твердженнях:

«*Твердження VI. Тверді тіла, які легші за рідину, будучи занурені в рідину, прагнуть догори з силою, рівною перевищенню ваги рідини, взятої в об'ємі цих тіл, над вагою самих тіл.*

Твердження VII. Тіла, які важчі за рідину, будучи опущені в рідину, занурюються все глибше, поки не досягають дна, і, перебуваючи в рідині, втрачають в своїй вазі стільки, скільки важить рідина, взята в об'ємі цих тіл».

В особі Архімеда механіка стародавніх досягла кульмінаційного пункту. До його результатів наступники не додали нового (Виняток становлять дослідження Паппа про центр ваги.), а в середні віки вони були втрачені, і архімедове вчення про плавучість тіл було замінено вченням схоластів про те, що плавання тіл обумовлено їх формою.

---

[1] Цитата взята з книги: Архимед, Стэвин Симон, Галилей Галилео, Паскаль Блез. Начала гидростатики. - М.-Л.: ГТТИ, 1933. - 404 с.

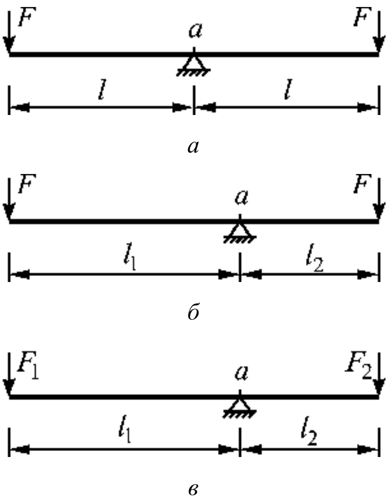


Рис. 11.1. Принцип важеля за Архімедом

Архімед є автором принципу важеля, який описує за допомогою трьох аксіом. У сучасному формулюванні це виглядає так:

1. Тіла рівної ваги на рівних плечах важеля знаходяться в рівновазі (рис. 11.1,*а*):

$$\sum M_a = 0 \to F \cdot l = F \cdot l \text{ (рівновага).}$$

2. Тіла рівної ваги на нерівних плечах важеля не знаходяться в рівновазі (рис. 11.1,*б*):

$$\sum M_a = 0 \to F \cdot l_1 \neq F \cdot l_2 \text{ (нерівновага).}$$

3. Якщо два тіла на даних плечах важеля знаходяться в рівновазі, і F_1 або F_2 змінені, то умова

$$\sum M_a = 0 \to F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2 \text{ (рівновага)} \quad (11.9)$$

має виконуватися (рис. 11.1,*в*).

Точне формулювання принципу важеля Архімеда (11.9), що ґрунтується на сторіччях практичного досвіду створення таких простих машин, стало першим випадком, коли явище рівноваги було виражене математично.

Архімеду приписують висловлювання, в якому сконцентровані всі три аксіоми: «Дайте мені точку опори, і я переверну світ».

Знадобилось ще майже 1500 років, щоб Йордан Неморарій (XII ст.) вніс щось нове до фундаментальних знань про статику. За допомогою принципу віртуальних швидкостей він спробував довести принцип важеля, дослідивши для прикладу колінчастий важіль. При цьому він, ймовірно, скористався аристотелівським підходом до важеля. На початку XVI ст. результати досліджень Неморарія і його учнів в галузі статики стали відомими в наукових колах і дозволили вирішити ряд проблем статики в прийнятному вигляді.

Міркування щодо принципу важеля зустрічаються вже в роботі найбільшого грецького філософа-натураліста Аристотеля і його шкіл. Наприклад, ідеалізація динаміки як статики може бути знайдена в роботі «Quaestiones Mechanicae» («Проблеми механіки»), яка приписується йому або, принаймні, його школі. Наступне доведення узяте з цієї роботи і викладене тут мовою сучасної алгебри. Щоб показати справедливість формули (11.9), міркуватимемо таким чином. Оскільки переміщення відбуваються одночасно, то згідно з рис. 11.2,*б* маємо:

$$F \cdot v_1 = F \cdot v_2 \,. \quad (11.10)$$

Рівняння (11.10) являє собою принцип віртуальних швидкостей, де

$$\delta u_1 = v_1 \cdot t \text{ і } \delta u_2 = v_2 \cdot t \,,$$

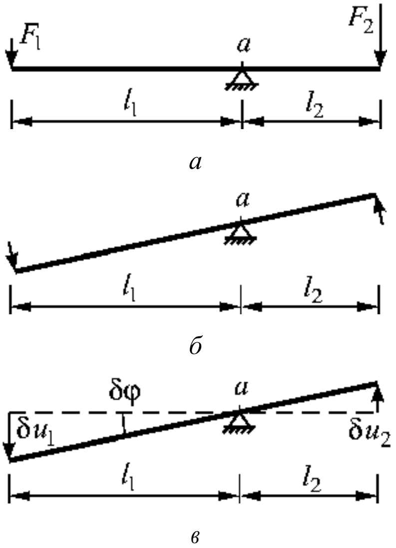
причому

$$\delta\varphi = \delta u_1 / l_1 \text{ і } \delta\varphi = \delta u_2 / l_2 \text{ (рис. 11.2,}\textit{в}\text{),}$$

що приводить до

$$\delta\varphi \cdot (F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2) = 0 \,. \quad (11.11)$$

Рівняння (1.7) являє собою принцип можливих переміщень. Оскільки у формулі (11.11) $\delta\varphi\neq0$, то вираз в дужках повинен дорівнювати нулю, тобто принцип можливих переміщень еквівалентний умові рівноваги або принципу важеля (рівність (11.9)). Таким чином, принцип можливих переміщень показує, що віртуальна робота, виконана урівноваженими силами (рис. 11.2,*а*) на можливих переміщеннях (рис. 11.2,*в*), дорівнює нулю. При цьому, віртуальні переміщення повинні бути теоретично і геометрично можливими і малими в сенсі диференціальної геометрії. Це загальне і остаточне формулювання принципу можливих переміщень для твердих тіл було викладене Й. І Бернуллі в листі до П. Варіньона, датованому 26 січня 1717 р.



а

б

в

Рис. 11.2

У 1586 р. голландський математик Сімон Стевін (1548–1620) зробив великий крок вперед в поясненні поняття рівноваги в своїй книзі «Beghinselen der Weeghconst» («Елементи мистецтва зважування»), вирішуючи проблему двох похилих площин (рис. 11.3).

Спираючись на аксіому про неможливість нескінченного руху замкненого ланцюга *АВС*, він виявив, що умовою рівноваги двох похилих площин є

$$G_1/G_2=S_1/S_2\,.$$

Доведемо справедливість цього твердження. Врівноважені сили мають задовольняти наступне твердження:

$$T_1=T_2=G_1\cdot\sin\beta=G_2\cdot\sin\alpha,$$

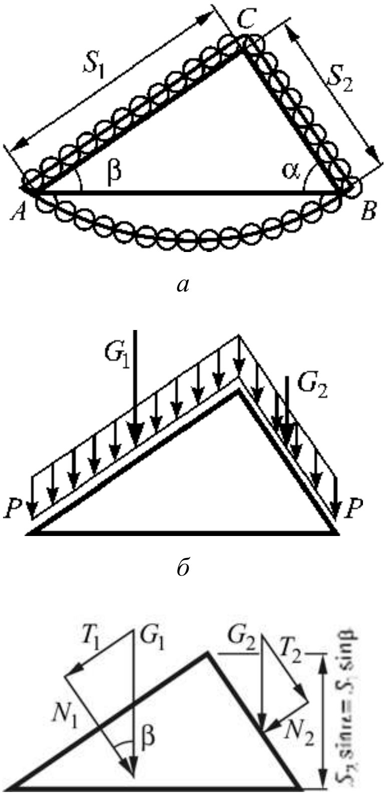
тоді

$$G_1/G_2=\sin\alpha/\sin\beta=S_1/S_2\,.$$

Стевін представив і інші результати з прикладами розкладання сил по компонентах, правда, не приводячи їх систематизації і повної перевірки.

Вважається, що Сімон Стевін довів закон рівноваги тіла на похилій площині, виходячи з неможливості вічного двигуна, сформулював правило векторного складання сил – правда, тільки для частинного випадку перпендикулярних сил. У загальному випадку правило відкрив Ж. Роберваль.

Цікаво зазначити, що геометрією і статикою захоплювався юний Лаґранж будучи членом товариства любителів математики, на основі якого згодом виникла Туринська академія наук. Можливо він надав аналітичної форми мемуарам Франсуа Фонсене (1734-1798), які ввійшли до записок нової академії. Зокрема мова йде про принцип складання і розкладання сил за правилом паралелограма незалежно від аксіоми Евкліда про паралельні прямі або від принципу важеля Архімеда. Існує



а

б

в

Рис. 11.3. Дві похилі площини за Стевіном

думка, що ця робота Фонсене або написана, або інспірована Ж.-Л. Лаґранжем [Григорьян, 1974].

Фахівець з історії фізико-математичних наук Н.І. Ідельсон пише: «Дійсно, ми знаємо тепер, що начало паралелограма має цілком однакову структуру у системах Евкліда, М.І. Лобачевського, Г.Ф.Б. Рімана; у неевклідовій статиці закон важеля не зберігається; величина рівнодіючої залежить від довжини важеля; вона буде більшою за 2P у геометрії Лобачевського, меньшою за 2P у геометрії Рімана. Ніби передбачаючи ці глибокі висновки, Ж.-Л. Лаґранж пише: «Хоча обидва начала, саме важеля і складання сил, приводять завжди до однакових результатів, примітна та обставина, що випадок, найбільш простий для одного з них, є найбільш складним для іншого» [Идельсон, 1937].

Ми маємо завдячувати Ж. Робервалю і П. Varіньону, які підвели підсумок і співвіднесли один з одним три фундаментальні поняття статики: принцип важеля, принцип віртуальних швидкостей і паралелограма сил. У своїй книзі «Nouvelle mecanique» («Нова механіка», видана в 1687 р. і закінчена посмертно в 1725 р.) П. Варіньон – до деякої міри все ще в аристотелівській традиції – використовує ідею еквівалентності принципу важеля, принципу віртуальних швидкостей і паралелограма сил.

Еквівалентність цих трьох принципів є ніщо інше, як визнання єдиної аксіоми - умов рівноваги, які для площині *x-z* приймають форму

$$\sum F_x = 0 \text{ і } \sum F_z = 0. \qquad (11.12)$$

Жіль Персо́нн Роберва́ль, фр. Giles Personne de Roberval (1602 - 1675)

Умови рівноваги (11.12) можна також легко отримати з другого закону Ньютона (величина добутку маси тіла та прискорення дорівнює сумі всіх прикладених сил)

$$m \cdot a_x = \sum F_x = 0 \text{ і } m \cdot a_z = \sum F_z = 0,$$

як особливий випадок спокою (постійний, прямолінійний рух: $a_z = a_x = 0$, тобто статичний випадок).

Третя умова рівноваги плоскої статики не могла бути виведена з принципу Ньютона (1687), оскільки І. Ньютон розглядав механіку точки, для якої поняття моменту не було необхідним. Тільки у 1775 р. Л. Ейлер сформулював теорему обертання [Truesdell, 1964], що дало можливість отримати всі умови рівноваги повністю із другого закону Ньютона і теореми обертання:

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_z = 0 \text{ и } \sum M_y = 0\,.$$

Подальші суттєві етапи пов'язані з іменами Стевіна і Галілея. Ідея принципу віртуальних переміщень була висловлена С. Стевіном при розгляді умов рівноваги блоку. Наступний крок був зроблений Галілеєм при розгляді рівноваги тіла, що лежить на похилій площині. Він висловив відоме «золоте правило» механіки, згідно з яким «що виграється в силі, те втрачається у швидкості». Але як С. Стевін, так і Галілей розв'язували частинні задачі. Загальне формулювання принципу віртуальних переміщень для будь-якої системи прикладених сил дав Йоганн I Бернуллі в 1717 р., хоч доведення цього принципу він не навів. Ж.-Л. Лаґранж у своїй «Аналітичній механіці» сформулював цей принцип, назвав його «принципом віртуальних швидкостей» і дав його доведення (хоч і не строге) за допомогою системи вантажів, які підвішені на нитках, що перекинуті через блоки. Андре-Марі Ампер обґрунтував принцип віртуальних переміщень, ввів постулат ідеальних в'язей. М.В. Остроградський поширив принцип віртуальних переміщень на системи з нестаціонарними та неутримуючими в'язями.


Андре-Марі Ампер,
фр. André-Marie Ampère
(1775 - 1836)

Еванджеліста Торрічеллі (1608–1647) - італійський фізик і математик. У 1641 р. був запрошений другом Галілея аббатом Бенедетто Кастеллі до Арчетрі, де став учнем і секретарем вже старого, сліпого і хворого вченого, допомагаючи йому готувати до друку рукописи. За три місяці Галілей помер, а Торрічеллі став його спадкоємцем на посаді математика великого герцога тосканського і наступником на кафедрі математики і філософії Флорентійського університету. Торрічеллі був значним геометром, але відомий він наступникам своїми відкриттями у механіці, серед яких відкриття атмосферного тиску, винахід барометру і формули для визначення витоку важкої рідини із сосуду через отвір. Ця формула міститься у мемуарі «De Motu Gravium Naturaliter Descen dentium» («Про рух важких тіл, що опускаються природним шляхом»).

Виведемо умови рівноваги довільної невільної системи твердих тіл, які перебувають під дією сили тяжіння. Позначимо через M суму мас всіх тіл і через z_c - вертикальну координату центру тяжіння системи тіл (вважаємо вісь z спрямованою вертикально вниз). Тоді, відповідно до принципу можливих переміщень (11.1), отримаємо

$$Mg\delta z_c = 0\,,$$

і, отже, умови рівноваги системи мають вигляд

$$\delta z_c = 0 .$$

Таким чином, положеннями рівноваги системи важких тіл будуть положення, в яких центр ваги займає найнижче, найвище або будь-яке інше стаціонарне положення по вертикалі («принцип Торрічеллі»).

Один з варіантів доведення принципу можливих переміщень (швидкостей) привів Лазар Карно (1753-1823). Першим науковим твором Карно був трактат «Досвід про машини взагалі», виданий анонімно в 1783 р. У третьому виданні трактат був розширений і перейменований в «Основні принципи рівноваги і руху». Головним змістом цього твору є отримання умов рівноваги машини за допомогою обчислення приросту роботи сили на віртуальних переміщеннях точок прикладання сили (термін «робота» був введений пізніше, в XIX ст.). Карно приходить до системи вантажів або гир; рівновага отриманої таким чином системи трактується на основі принципу Торрічеллі про найнижче положення її центра ваги. Як і Торрічеллі, Карно замість умови мінімальності висоти центру ваги системи вантажів записує рівняння екстремальності вертикальної координати центру ваги:

$$\int F \cdot u \cos z = 0,$$

де $\int$ - символ суми. Ця рівність є, можливо, одним з перших аналітичних формулювань принципу віртуальних швидкостей.

Ідея ввести замінюючу систему в XVIII ст. виявилася плідною, вона використовувалася в аналітичній механіці багатьма сучасниками Л. Карно - Ж.-Л. Лагранжем, Ж. Фур'є, А. Ампером та іншими. Замінюючі системи (блоків, важелів, поліспастів і т.п.) при виведенні начала можливих переміщень, зокрема, свідчать про тісний зв'язок цього начала з реальними машинами і механізмами.

Л. Карно увів поняття «геометричного руху», тобто такого, який допускається в'язями (ідеальними, утримуючими). У сучасній термінології геометричним рухам відповідають віртуальні переміщення точок системи.

Еванджеліста Торрічеллі, італ. Evangelista Torricelli (1608 - 1647)

П'єр Варіньон, фр. Pierre Varignon (1654 - 1722)

Лазар Карно, фр. Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 - 1823)

У 1594 р. Галілео Галілеєм був написаний знаменитий трактат з механіки «Delia scienza meccanica» («Про науку механіку»). Різноманітні задачі статики розв'язувалися в ньому з використанням принципу віртуальних переміщень.

Цікаві висновки Галілея про пропорційність в органічному світі і техніці, а також накреслені ним шляхи до створення нової ньютонівської динаміки.

Ж.-Л. Лаґранж у своїй книзі «Аналітична механіка» писав: «Динаміка - це наука про прискорюючі і сповільнюючі сили і про змінні рухи, які вони повинні викликати. Ця наука цілком зобов’язана своїм розвитком новітнім вченим, і Галілей є тією особою, яка заклала перші її основи. До нього сили, що діють на тіла, розглядали тільки в стані рівноваги, і хоча прискорене падіння твердих тіл і криволінійний рух кинутих тіл не могли приписати якій-небудь іншій причині, крім постійної дії тяжіння, проте нікому до Галілея не вдалося визначити законів цих повсякденних явищ - незважаючи на те, що причина їх настільки проста. Галілей перший зробив цей важливий крок і цим відкрив новий і неозорий шлях для прогресу механіки. Його відкриття було викладено і розвинене в роботі, названій «Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze», що з’явилася вперше в Лейдені в 1638 р. Однак у сучасників ця робота не дала Галілею стільки слави, скільки відкриття, зроблені ним на небі; нині ж вона складає найбільш надійну і істотну частину слави цієї великої людини».

Остаточно своє центральне місце в механіці принцип можливих переміщень (швидкостей) зайняв після появи трактату «Аналітична механіка» Лагранжа, перше видання якого вийшло в світ в 1788 р в Парижі [Lagrange, 1788] і складалося з двох частин: «Статика» і «Динаміка». Загальна формула динаміки Лагранжа (поєднання принципу Д'Аламбера і принципу можливих швидкостей) охоплювала всі можливі випадки, включаючи механіку матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, а також механіку системи матеріальних точок із в'язями, гідромеханіку, задачі про рух і рівновагу пружних тіл тощо. Методи лагранжевої механіки дуже сильно вплинули на подальший розвиток науки.

«Статика - це наука про рівновагу сил», - пише Лагранж на початку трактату і дає історичний аналіз розвитку цієї науки. Розглянувши різні підходи до принципу важеля (Архімеда, Галілея, Стевіна, Гюйгенса), він надає перевагу підходу Архімеда. Принцип складання та розкладання сил вперше був чітко сформований Стевіном. Лагранж виявив тісний зв'язок між принципом складання рухів, чітко даними Галілеєм, з принципом складання сил за правилом паралелограма. Доказ паралелограма сил на основі відомого раніше принципу складання швидкостей або складання рухів вперше дали Ньютон і Варіньон

Гвідобальдо Дель Монте (Убальді), італ. Guidobaldo del Monte (1545–1607)

Сімон Стевін, нід. Simon Stevin (1548–1620)

Галілео Галілей, італ. Galileo di Vincenzo Bonaiuti de 'Galilei (1564–1642) незалежно один від одного в 1687 р.

Велике значення Лагранж надає XVI лемі Варіньона («Nouvelle mecanique»), яка зараз називається теоремою Варіньона і яка є однією з основних теорем ковзаючих векторів. Відповідно до цієї теореми, якщо система ковзаючих векторів $\mathbf{F}_\nu$ приводиться до однієї рівнодійної $\mathbf{F}$, то момент рівнодіючої відносно деякої точки 0 (або осі Z) дорівнює сумі моментів векторів системи відносно тієї ж точки (або осі):

$$\mathrm{mom}_0\mathbf{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_0\mathbf{F}_\nu , \qquad \mathrm{mom}_l\mathbf{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_l\mathbf{F}_\nu .$$

Теорема встановлена П. Варіньомом в 1687 р. для випадку збіжної системи сил.

Християн Гюйгенс,
нід. Christiaan Huygens
(1629 - 1695)

11.1.2. Епоха Відродження. Леонардо да Вінчі, Коммандіно, Убальді, Стевін, Тарталья, Кардано, Бенедетті

> *... механіка — це рай математичних наук, бо з нею вкушаєш плоди математики ... Тому, о, студенти, вивчайте математику і не будуйте без фундаменту.*
>
> Леонардо да Вінчі

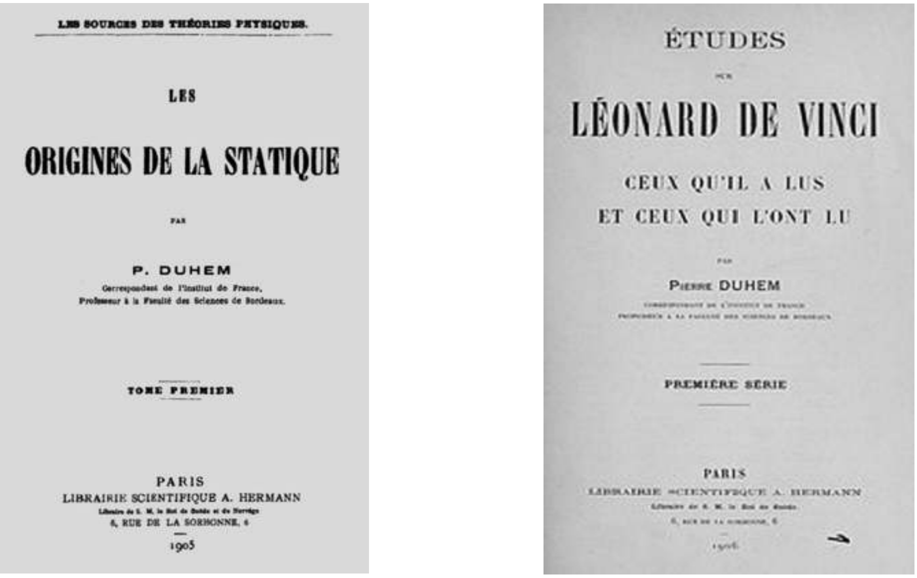
Епоха відродження принесла пожвавлення інтересу до науки. Найбільш виразним представником цієї епохи є Леонардо да Вінчі (1452-1519). Він був не тільки видатним майстром у галузі мистецтва, а й не менш видатним ученим і інженером. Він не писав праць, але у його записниках знайдено багато відомостей про його значні відкриття у різних галузях науки.

Леонардо Да Вінчі,
итал. Leonardo da Vinci
(1452–1519)

Крім випадкових висловлювань, зроблених за його життя, наукова робота Леонардо була вперше описана у пресі Джованні Баттіста Вентурі в захопленому і неточному есе 1797 р. Історики літератури, тим не менш, створили міф про «Відродження». Відповідно до цього міфу людина в Середні віки перебувала у сплячці під похмурої пеленою схоластичних повторів, запозичених у Аристотеля і посилених Церквою; Відродження, відкинувши все це в сторону, відкрило очі і виявило людину і світ крізь особисте сприйняття. Хоча в мистецтві цю теорію можна сприймати як вираження смаку, в науці, за винятком анатомії, це не так: «раннє» Відродження, 1450-1500 рр., стоїть у першому ряду в змаганні за самий безплідний час в західній математиці та фізиці, і єдиною точною наукою «пізнього» або «високого» Відродження є алгебра, що виникла аж ніяк не з широко відкритого погляду на світ, а швидше на підставі книжкового вивчення праць арабських математиків. Де ж та емпірична наука, яка повинна вінчати знання «Відродження»? Галілей, як засновник емпіризму, прийшов через сто років в пізній період маньєризму і бароко. Деякі історики знайшли в есе Вентурі керівництво до відсутньої ланки: записники єдиного у своєму роді Леонардо, який, принаймні, показав, що Відродження могло б зробити, навіть якщо його праці залишилися неповними, неопублікованими і невідомими протягом століть. Згодом факсиміле цих записників видавали з 1881 по 1936 роки.

Як підкреслює К. Трусделл [Трусделл, 2002], серед читачів їх перших томів був і засновник сучасної історії науки французький історик науки П'єр Дюґем (1861-1916). Він залишив неминущі досягнення в галузі фізичної хімії, термодинаміки, гідродинаміки, механіки і теорії пружності. Читання записників Леонардо привернуло інтерес П. Дюґема до дослідження історії науки. На підставі його відкриттів поступово розвивалася інша, майже протилежна точка зору на роботи Леонардо, точка зору, що сьогодні поділяється більшістю серед меншості, що мають знання про ранню науку з першоджерел. Поки критики виливали свої почуття, такі історики науки (вони існували і тоді - жалюгідна суміш полуфілософів і викладачів наук) виявили декілька ідей Г. Галілея в записках Леонардо. Раніше історики вважали, що Галілей додумався до цих речей на порожньому місці, в силу свого «генія». У 1788 р. Ж.-Л. Лаґранж [Лаґранж, 1950] написав про Архімеда та Г. Галілея: «Період часу, що розділяє цих двох великих геніїв, зникає в історії механіки», і ця проста точка зору, яка задовільна не більше ніж пояснення творіння в книзі Буття, цілком задовольнила Е.В. Маха сторіччя потому. «Відкриття» Леонардо перенесло точку прикладання цієї ж теорії на сто років назад. У нього були ті ж самі матеріали для роботи: «геній» і порожнеча, і для цієї групи істориків залишалося тільки простежити, як ідеї Леонардо дійшли до Г. Галілея, зробивши, відповідно, останнього справжнім онуком, якщо не сином, Відродження.

Тим не менш, П. Дюґем досліджував велику спадщину Леонардо. Сьогодні можна побачити, що його висловлювання про загальні принципи механіки зібрані і систематизовані в одному томі; лише ці записи, без урахування того, що він написав про математику, механізми, гнучкі тіла і рідини, займають 550 широкоформатних сторінок. Ще один том в 400 сторінок знадобився для передруку частини його записів про рух рідини. Що б не думав літератор про розумну діяльності «генія», лише деякі вчені повірять, що тисячі сторінок про механіку, правильні вони чи ні, з'явилися коли-небудь в результаті діяльності «генія» з порожнечі. Питання, яке задав собі Дюґем, полягало у наступному: звідки дізнався про все це Леонардо і яку частину всього цього він модифікував або додав на основі своїх власних роздумів чи досвіду? Намагаючись відповісти на ці питання, П. Дюґем став першою людиною, з часу епохи Відродження, який дійсно прочитав те, що середньовічні вчені писали про механіку або фізику. У самому справжньому сенсі він відкрив науку Середньовіччя і додав, у зв'язку з конкретними і визначеними відкриттями і теоремами, довгий список імен, які ніколи раніше не зустрічались історії науки: Йордан Неморарій, Жан Бурідан, Ніколь Орем, Річард Суайнсхед, Вільям Хейтесбері та ін. Одне з відкриттів Дюґема полягало в тому, що він дійшов висновку про те, що «у працях Леонардо да Вінчі з механіки немає жодної важливої ідеї, що не слідувала б з робіт геометрів Середньовіччя».



LES SOURCES DES THÉORIES PHYSIQUES.

LES

ORIGINES DE LA STATIQUE

PAR

P. DUHEM

Correspondant de l'Institut de France,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

TOME PREMIER

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
6, RUE DE LA SORBONNE, 6
1905

ÉTUDES

SUR

LÉONARD DE VINCI

CEUX QU'IL A LUS
ET CEUX QUI L'ONT LU

PAR

PIERRE DUHEM

PREMIÈRE SÉRIE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

Титульні сторінки перших книг Дюґема з історії науки Середньовіччя

Відомому досліднику з механіки і історії науки Р. Марколонго належить саме докладне дослідження механіки Леонардо [Marcolongo, 1932]. Воно включає такі глави:

Частина I. Статика
1. Середньовічна статика і джерела Леонардо.
2. Прямі та вигнуті важелі і ваги.
3. Поняття моменту і складання сил.
4. Рівновага на похилій площині. Стійкість ваг. Опорний багатокутник.
5. Центри ваги.
6. Блок, ворiт і завдання вимушених протидій.
7. Дослідження з опору матеріалів, теорії арок і тертя.
Частина II. Динаміка
1. Грецька і середньовічна динаміка.
2. Сила, зіткнення, імпетус, вага.
3. Закони руху.
4. Вільний рух важкого тіла. Рух по похилій площині. Рух кинутих тіл і удар.

Тепер ми можемо резюмувати метод, яким Леонардо, очевидно, користувався, без сумніву, неусвідомлено, в наукових питаннях:

1. Спостерігати явище і записувати величини, що мають кількісне значення, які, мабуть, впливають на нього.

2. Встановлювати такі лінійні залежності серед пар цих величин, які б явно не суперечили досвіду.

3. Запропонувати ці «правила трьох» для перевірки в ході експерименту.

За винятком одного випадку, згадуваного вище, він не залишив нам ніяких свідчень того, що він коли-небудь додавав те, що видається природним четвертим кроком, а саме, здійснював запропоновані експерименти.

Так історик науки Дж. Ренделл писав [Randall, 1957]:

«... Незважаючи на свій великий дар уважного спостерігача, Леонардо, строго кажучи, не займає ніякого місця в [тому] процесі ..., в якому виникла сучасна наука ...

1. Сам Леонардо був ученим в тому сенсі, в якому він і його сучасники розуміли науку, або в будь-якому іншому сенсі, в якому будь-хто інший розумів науку ...

2. У Кодексах Леонардо неможливо виявити жодної теоретичної наукової ідеї, яка була б абсолютно новою або ж невідомою сформованим науковим школам Італії того часу. Представлення (природно, виникло, коли його Кодекси були вперше опубліковані в 1881 р.) про те, що його записки повні разючих оригінальних пророцтв, виникло з превалюючого в той час цілковитого незнання того, що було відомо про вчених - сучасників Леонардо.

3. Навіть якщо б у Леонардо були оригінальні ідеї в науковій теорії, йому все одно не знайшлося б у ній «місця», і він не надав би «впливу» на неї, на появу сучасної науки. Бо всі ці його ідеї залишалися абсолютно невідомими до тих пір, поки не були опубліковані Паризький Кодекс в 1881-1891 рр. і Атлантичний Кодекс в 1894 р.».

Леонардо як математик писав:

«... механіка - це рай математичних наук, бо з нею вкушаєш плоди математики».

«Ніякої достовірності немає там, де не можна застосувати будь-яку з математичних наук або ж будь-яку з тих наук, що засновані на математичних науках».

«Тому, о, студенти, вивчайте математику і не будуйте без фундаменту».

«Нехай не читає мене той, хто не є математиком моїх принципів».

Записи Леонардо безсистемні, окремі нотатки в них фрагментарні, а подальша мінливість долі перетворила їх майже на безладне зібрання. Леонардо записував не лише свої думки і проекти, а також свої спостереження, зміст бесід, які він хотів запам’ятати або не зрозумів; і навіть відмінювання латинських глаголів, найпростіші теореми Евкліда, вправи на множення і загальні місця в галузі механіки та філософії, які він намагався вивчити і зберегти. Той, хто шукає все що завгодно в цих записах, може знайти шукане. До суперечливого і туманного стилю самого Леонардо слід додати вади перекладу людей, які походять зазвичай з літературних або художніх кіл, і які навряд чи визнають, наскільки мало точності в їх перекладах. Стиль Леонардо досить красномовний, але це красномовство переплетено туманними загальними фразами, що притаманне пророку: він рідко надає своїм словам конкретний, точний зміст, що є характерним для вченого. Його висловлювання часто невизначені, перекладачі зазвичай роблять їх ще більш невизначеними. Те, що Леонардо не зміг висловити словами, його очі і рука зберегли з пристрасною точністю, тому про його розуміння природи і механізмів ми дізнаємося швидше з його малюнків, ніж з його слів. Таким чином, звичайні видання, де наводиться лише текст і кілька художніх замальовок, дають подвійно хибне уявлення про праці Леонардо. Леонардо мріяв про великі речі. Його записи містять кілька начерків книг, не ескізів творця, який колись напише шедевр, а просто перелік питань. На більшість з них він не дає відповіді.

У того, хто спробує об'єктивно оцінити праці Леонардо в галузі механіки, основне здивування викличуть сторінки, присвячені елементам конструкцій: балкам, колонам і аркам.

Якщо повернутися від чисельного закону до малюнків побачених Леонардом предметів, то тут він у своїй стихії. Він був першим, хто описав явище поздовжнього вигину:

«... Якщо прикладена вага буде більшою з одного боку опори, ніж з іншого, то опора зігнеться [з боку], з якого на неї прикладено більший вантаж, і вона зламається в середині протилежної сторони, тобто на ділянці самому далекому від кінців».

Він першим намалював ланцюгову лінію і запропонував вивчати її за допомогою дискретної моделі. Мабуть, він перший використав легкий предмет, що лежить поверх іншого предмета з тим, щоб продемонструвати добре відоме явище резонансних коливань:

«Удар по дзвону змушує інший подібний дзвін відповісти і трохи зрушитись, а струна лютні, що звучить, змушує іншу подібну струну, з подібним же голосом, іншої лютні відповісти і трохи зрушитись, і це можна відчути, поклавши соломку на струну, подібну зі звучною струною».

Саме він першим записав спостереження такого явища, який двома століттями пізніше повинен був використовувати Гюйгенс, висловивши припущення про існування вузлів у вібруючому стержні:

«Якщо вдариш по плоскій дошці, то побачиш, що пил на ній збереться в невеликі горбки».

Більш ніж за 400 років Хладні розвинув це просте спостереження і створив основу експериментальної методики, тоді як Леонардо, як завжди, занотував в цьому простому запису побачене і зупинився.

В усіх його роботах сформульовані подібним чином математичні правила представляються гіпотетичними; теоретичні ідеї - недостатніми; пропоновані їм експерименти, мабуть, ніколи не проводилися; але розкидані серед записів, дражливих помилковими надіями, хороші питання є нормами фіксованого досвіду.

В одному з його рукописів є схематичний рисунок двостержневої системи, на вершину якої діє вертикальне навантаження, і питання ставиться так: які сили слід прикласти в точках опирання стержнів, для того, щоб система була у рівновазі. Вочевидь, Леонардо да Вінчі знав розв'язок цієї задачі.

Леонардо експериментально вивчав міцність будівельних матеріалів, досліджував згин балок, зокрема вплив їх розмірів на міцність, опір колон, де він встановив, що їх несуча здатність зворотно пропорційна довжині і прямо пропорційна площі їх перетину.

Освоєння античної статики особливо просунулося за часів Федеріко Коммандіно (1509-1575). Він перевів трактати Архімеда, Герона, Паппа, Евкліда, Аполлонія Перзького та інших. За цим перекладом вчені середньовіччя знайомилися з наукою древніх і розвивали її далі. Саме так вчинив учень Коммандіно - Гвідобальдо дель Монте (Убальді) (1545-1607), ім’я якого зустрічається в біографії Галілея. Сам Гвідобальдо також займався перекладами. Його трактат з механіки вийшов у 1577 р. У ньому він аналізує статику древніх і, не знаючи про дослідження Леонардо, виводить закон рівноваги косого важеля. Ж.-Л. Лаґранж називає Убальді засновником принципу можливих переміщень. У всякому разі, механіка йому зобов’язана введенням терміну «момент» у тому вигляді, в якому він і донині втримався в статиці. Латинське слово «momentum» означає важливий, значний. Щоб підкреслити, що в рівновазі важеля важлива не тільки величина сил, але і їх перпендикулярні відстані від осі («плече» за сучасною термінологією), він вводить термін «момент» і формулює умову рівноваги важеля у вигляді рівності моментів. Дослідження Убальді послужили поштовхом до статичних робіт Г. Галілея.

Своє завершення статика знайшла в роботах голландського вченого Сімона Стевіна, трактат якого «De Beghinselen der Weeghconst» («Начала статики») [Stevin, 1586] вийшов у 1586 р. Правда, його дослідження не мали прямого і безпосереднього впливу на сучасну йому науку. Г. Галілей займався статикою, не знаючи про роботи С. Стевіна. Це пояснюється тим, що С. Стевін писав свої праці голландською мовою. С. Стевін, уже цілком сформований вчений нового типу, до строгості математичних міркувань він додає дослідну перевірку. Основним принципом в його роботах зі статики є принцип неможливості вічного руху. У цьому він (хоча і незалежно) наслідує Леонардо, який писав: «Шукачі вічного руху, яку кількість найпорожніших задумів пустили ви в світ, йдіть до шукачів золота». На титульному аркуші кожної частини трактату Стевіна присутня похила площина, обвита ланцюгом, з написом нагорі «Чудо і не диво». Розмірковуючи про рівновагу ланцюга, С. Стевін розв’язав задачу про похилу площину. Він дійшов висновку про те, що сила, яка скочує тіло по похилій площині, не дорівнює вазі, а в стільки разів його менше, у скільки висота площини менше її довжини. Цей висновок дає можливість С. Стевіну сформулювати закон геометричного додавання сил, і саме звідси веде своє походження позначення сил стрілками. С. Стевін вказує, що якщо три сили паралельні і пропорційні сторонам трикутника, то вони врівноважуються. Ось в такому вигляді і був відкритий «паралелограм сил».

Вивчаючи рівновагу поліспастів, С. Стевін сформулював для окремого випадку принцип можливих переміщень. Рівновага між вантажем, підвішеним на поліспасті, і силою, що його підтримує, буде досягнута тоді, коли вантаж буде в стільки разів більший за силу, у скільки разів шлях, що проходить сила при піднятті вантажу, більша шляху, що проходить вантаж.

Щоб довершити характеристику С. Стевіна, згадаємо, що їм був сконструйований візок з вітрилами (буєр), рухомий вітром, який, везучи 18 осіб, пробіг за дві години чотири голландських милі (близько семи кілометрів).

Стевін, відкривши закон похилої площини і паралелограм сил, завершив статику. Але, як вже було сказано, його дослідження не були відомі навіть наступникам таким, як, наприклад, Б. Паскаль. Г. Галілей повною мірою ділить зі Стевіном пріоритет у відкритті закону рівноваги тіла на похилій площині. Його доведення ґрунтується на зведенні задачі до закону рівноваги косого важеля. Зупинимося тут лише на галілеєвому доведенні закону важеля і його формулюванні поняття моменту.

Закон важеля Г. Галілей доводить дуже витончено.

Уявімо, що на невагомій палиці підвішена однорідна призма *AB*. Призма буде в рівновазі, якщо вона закріплена в центрі *C*. Розділимо призму на дві довільні частини $m = AD$ і $n = DB$, ваги яких *P* і *Q* рівні відповідно m і n. Рівновага не порушується, якщо кожну з цих частин підвісити відповідно в її середині. Але легко бачити, що *G* і *F* - точки прикладання ваг вантажів *P* і *Q* - відстоять від точки опори *C* на відстанях, обернено пропорційних вантажам.

Вже Убальді розумів еквівалентність вантажу і сили, що його піднімає. Механіка повинна була усунути розходження між вантажем і зусиллям і абстрагувати загальне поняття «сили». Ця абстракція далася не відразу. Чітко поняття сили було сформульовано І. Ньютоном. Г. Галілей, розуміючи, що для обертального руху (як у випадку важеля) важлива не тільки сила, а й її плече, і, бажаючи дати загальне поняття, вводить термін «момент».

«Під назвою моменту, - говорить він, - в механіці розуміється та сила, те зусилля, та дія, з якою двигун рухає і рухоме опирається; ця сила залежить не тільки від простої ваги, але і від швидкості руху і від різного нахилу шляхів, за якими здійснюється рух, тому що вага робить більше дії при опусканні за більш похилим шляхом, ніж за менш похилим».

Для пояснення свого визначення, Г. Галілей наводить принцип рівноваги нерівноплечового важеля, сформульований ним у термінах начала можливих переміщень: «Нерівні за абсолютною величиною вантажі можуть взаємно врівноважуватися і набувати рівних моментів кожного разу, коли їх вага буде обернено пропорційною швидкості їх руху, тобто, коли один вантаж буде в стільки разів легший іншого, у скільки разів швидкість його руху буде більшою швидкості іншого».

Ми бачимо, таким чином, що до кінця XVI ст. не тільки була опанована антична статика, але, і більш того, вона почала перетворюватися на систематичну галузь природознавства, стали формулюватися загальні визначення і принципи, придатні для вирішення будь-якої задачі статики.

Але механіка цього періоду не обмежувалася тільки статикою. Практика вже вимагала динаміки, і навпомацки, невпевнено природознавство робило перші кроки у встановленні динамічних принципів. Переворот в динаміці був здійснений Г. Галілеєм, але вже його попередники почали штурм аристотелевської динаміки.

Приводом до перших механічних досліджень, безсумнівно, стала балістика. Вивчення траєкторії польоту снаряда склало предмет дослідження Н. Тартальї і Дж. Кардано.

Нікколо Тарталья (1499-1557) - один з найбільших математиків перехідної епохи. Йому належить формула розв'язання кубічних рівнянь (так зв. «формула Кардано», який вперше її опублікував, за відомостями, отриманими від Тартальї). Тарталья першим почав розплутувати аристотелевське вчення про природні і вимушені рухи. Він зміг виявити необґрунтованість поглядів перипатетиків у питанні про траєкторію снаряда. Перипатетики вчили, що траєкторія снаряда складається з вимушеного прямолінійного горизонтального шляху, змішаного з круговим та природним вертикальним. Тарталья визначив, що вся траєкторія снаряда криволінійна. Правда, він ще не наважується заперечувати повністю вчення про природний і вимушений рухи і говорить про безперервне змішування цих обох рухів в процесі польоту снаряда. Цікаво, що ця ідея про змішування природного і вимушеного рухів приводить його до правильного висновку про те, що найбільша дальність польоту буде при куті вильоту, рівному 45° (рівновага між природним і вимушеним рухами).

Сучасник Тартальї Джироламо Кардано (1501-1576) цікавий насамперед своєю біографією. Він став колоритною фігурою своєї епохи. Сам себе він характеризує таким висловлюванням: «Я володію від природи філософським і здатним до наук розумом. Я дотепний, витончений, пристойний, пристрасний, веселун, побожний, вірний, друг мудрості, мислячий, заповзятливий, допитливий, послужливий, здатний до змагань, винахідливий, навчений своїми власними зусиллями, прагну до чудес, хитрий, запеклий, обізнаний у таємницях науки, тверезий, працьовитий, меланхолійний, підступний, зрадник, чаклун, маг, нещасний, що не любить своїх, схильний до самотності, противний, строгий, провісник, ревнивець, жартівник, наклепник, податливий, мінливий, - ось які в мене протиріччя характеру і поведінки».

За своє бурхливе життя ця людина знала злидні і розкіш, подорожі і професорську кафедру, в'язницю і палац. Він переніс чуму і бачив страту свого сина. Сам відрізав в покарання вуха іншому своєму синові. Сам передбачив собі смерть на сімдесят п'ятому році і, як кажуть, щоб виконати пророцтво заморив себе голодом. З ім'ям Дж. Кардано в науці пов'язується, як вже зазначалося, формула Кардано і карданів підвіс, що має призначенням зберегти рівновагу тіла при будь-яких коливаннях точки опори.

Кардано ставить досліди і критикує фізику середньовіччя: він правильно формулює задачу про рівновагу тіла на похилій площині, проте не знаходить вірного рішення. Коротше кажучи, в історії науки Кардано характерний, як колоритна фігура епохи, але суттєвих результатів у науку він не вніс, хоча і зберіг своє ім'я в її історії.

Найбільших успіхів у справі створення динаміки домігся Джамбатіста Бенедетті (1530-1590). Він був першим, хто вчив, що камінь, кинутий горизонтально, рухається не вимушено, а в силу наданого йому імпульсу або, як він казав, «*враження*». Він стверджував далі, що «тіло, що обертається пращею, по викиданні прагне продовжувати рух по прямій лінії». Нарешті, він говорить про однакову швидкість падіння тіл в порожнечі. Таким чином, Дж. Бенедетті найбільш близько підійшов до відкриттів, що склали славу імені Г. Галілея.

Нові задачі, що поставило життя, породили нове природознавство. Протягом півтораста років (друга половина п’ятнадцятого століття і шістнадцяте століття) відбувається процес формування нових ідей. У напруженій боротьбі з силами старої ідеології виковується нове природознавство. Рішучий наступ буржуазії, розпочатий в сімнадцятому столітті, забезпечив перемогу нової науки.

11.2. Принцип Лагранжа-Діріхле. Основи статики

> *Викладені мною методи не вимагають ні побудов, ні геометричних або механічних міркувань. Вони вимагають тільки алгебраїчних операцій, підпорядкованих планомірному и одноманітному ходу.*
>
> Ж. Лагранж

> *Статика – це наука про рівновагу сил.*
>
> Ж. Лагранж

> *Статика – нерухомість у механіці.*
>
> Інтернет

Ідея доведення принципу віртуальних переміщень була висловлена С. Стевіном при розгляді умов рівноваги блоку. Наступний крок був зроблений Галілеєм при розгляді рівноваги тіла, що лежить на похилій площині. Він висловив відоме «золоте правило» механіки, згідно з яким «що виграється в силі, те втрачається в швидкості (переміщенні)». Треба зазначити, що Галілей приписував обгрунтування «золотого правила механіки» Аристотелю.

У найпростіших окремих випадках обґрунтування принципу не складає труднощів. Нехай на кінцях невагомого важеля або блоку (без тертя) знаходяться в рівновазі два вантажі $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{F}_2$. Тоді позначаючи через F_1' та F_2' дотичні (до можливих траєкторій) складові цих сил, а через δl_1 і δl_2 - величини відповідних елементарних можливих переміщень, у силу рівності (11.1) з точністю до знака матимемо

$$F_1'\delta l_1 = F_2'\delta l_2,$$

тобто

$$\frac{\delta l_1}{\delta l_2} = \frac{F_2'}{F_1'}$$

(виграш в силі компенсується програшем в переміщенні і навпаки).

Йоганн Бернуллі,
нім. Johann Bernoulli
(1667 - 1748)

Але як С. Стевін, так і Галілей розв'язували окремі задачі незагального характеру. Загальне формулювання принципу віртуальних переміщень для будь-якої системи прикладених сил дав Йоганн I Бернуллі в 1717 р., хоча доведення цього принципу він не навів. Ж.-Л. Лагранж в своїй «Аналітичній механіці» сформулював цей принцип, назвав його «принципом віртуальних швидкостей» і дав його доведення (хоча і не строге) за допомогою системи вантажів, підвішених на нитках, що перекинуті через блоки.

Трактат «Аналітична механіка» Жозефа-Луї Лаґранжа (1736-1813), перше видання якого вийшло в світ у 1788 р. в Парижі [Lagrange, 1788], складається з двох частин: «Статика» і «Динаміка». Загальна формула динаміки Лаґранжа (поєднання принципу Д'аламбера з принципом віртуальних швидкостей) охоплювала всі можливі випадки, включаючи механіку матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, а також механіку системи матеріальних точок із в'язями, гідромеханіку, задачі про рух і рівновагу пружних тіл тощо. Методи лаґранжевої механіки надзвичайно сильно вплинули на подальший розвиток науки.

«Статика – це наука про рівновагу сил», - пише Лаґранж на початку трактату і дає історичний аналіз розвитку цієї науки. Розглянувши різні підходи до принципу важеля (Архімеда, Галілея, Стевіна, Гюйгенса) він віддає перевагу підходу Архімеда. Принцип складання і розкладання сил вперше був чітко сформований С. Стевіном. Ж.-Л. Лаґранж виявив тісний зв'язок між принципом складання рухів, чітко даним Галілеєм, з принципом складання сил за правилом паралелограма. Доведення паралелограму сил на основі відомого раніше принципу складання швидкостей або складання рухів вперше дали Ньютон і Варіньон незалежно один від одного у 1687 р. Велике значення Ж.-Л. Лаґранж надає XVI лемі Варіньона («Nouvelle mecanique» («Нова механіка»)), яка зараз має назву теореми Варіньона.

Принцип віртуальних швидкостей Ж.-Л. Лаґранж формулює так: «Якщо яка-небудь система будь-якої кількості тіл, або точок, на кожну з яких діють будь-які сили, знаходиться у рівновазі і, якщо цій системі надати будь-який малий рух, в результаті якого кожна точка пройде нескінченно малий шлях, який представляє її віртуальну швидкість, то сума сил, помножених кожна відповідно на шлях, який проходить за напрямком сили точка, до якої вона прикладена, буде завжди дорівнювати нулю, якщо малі шляхи, які проходяться у напрямку сил, вважати позитивними, а які проходяться у протилежному напрямку вважати від'ємними».

Найважливішим у цьому принципі Ж.-Л. Лаґранж вважав те, що він «є не тільки вельми простим і вельми загальним, він має ще і ті багатоцінні і тільки йому притаманні переваги перед іншими принципами, що він може бути виражений у загальній формулі, що охоплює усі проблеми, які можуть бути поставлені з питання про рівновагу тіл».

Ж.-Л. Лаґранж наводить наступне доведення цього принципу, вводячи для цього замінюючу систему поліспастів (рис. 11.4).

Якщо у точках $A, B, C, \ldots$ деякої матеріальної системи прикладені довільні сили $P, Q, R \ldots$ відповідно, то їх дію на точки можна замінити дією нерозтяжних ниток, які беруть початок у точках $A, B, C, \ldots$ і прикріплені до нерухомих блоків поліспаста, охопленого єдиною ниткою. Один кінець цієї нитки закріплений нерухомо. Нитка, починаючи від нерухомого кінця, проходить через усі пари блоків (рухомий-нерухомий), роблячи на кожній парі стільки обертів, скільки одиниць сили необхідно створити у точці її прикладення. Напрямки сил $P, Q, R \ldots$ добре моделюються за допомогою поліспасту, тому що гнучкість нитки дозволяє надавати їй будь-який напрямок. Зробивши відповідну кількість обертів на кожній парі блоків, вільний кінець нитки виходить через нерухомий блок, де розміщується єдиний вантаж **П** – загальна міра усіх сил $P, Q, R \ldots$, який приймається за одиницю навантаження; саме він створює необхідні зусилля в усіх точках системи.

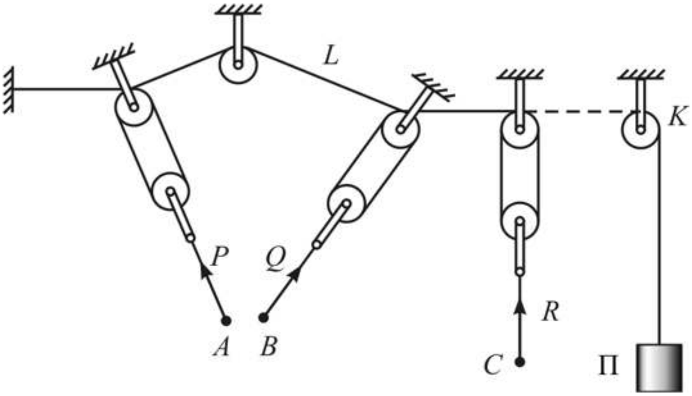


Рис. 11.4. Замінююча схема Лаґранжа

Згідно з принципом Торрічеллі Ж.-Л. Лаґранж зазначає, що вантаж **П** при рівновазі системи знаходиться у найнижчому стані і, відповідно, не буде спускатись. Математично ця умова має вигляд:

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \ldots = 0,$$

де α, β, γ - проекції можливих переміщень точок $A, B, C, \ldots$ на напрямки сил $P, Q, R \ldots$ відповідно, а сумарний вираз лівої частини рівності відповідає переміщенню вантажу **П**. Прирівнюючи нулю це переміщення, Ж.-Л. Лаґранж отримав умову рівноваги вихідної системи сил. Так він ввів загальну формулу статики – принцип можливих швидкостей (переміщень). Ж.-Л. Лаґранж також доводить і достатність цієї рівності задля рівноваги системи.

Сам Ж.-Л. Лаґранж у відділі другому «Аналітичної механіки» відзначає, що взагалі для рівноваги будь-якого числа сил P, Q, R, ... спрямованих по лініях p, q, r,

... та прикладених до будь-якої системи тіл або точок, розташованих будь-яким чином, ми маємо рівняння наступного виду:

$$P\mathrm{d}p + Q\mathrm{d}q + R\mathrm{d}r + ... = 0.$$

Це - загальна формула статики для рівноваги будь-якої системи сил.

Назвемо кожен член цієї формули, наприклад $P\mathrm{d}p$, моментом сили P і приймемо слово «момент» в тому сенсі, який йому надав Г. Галілей, тобто як добуток сили на її віртуальну швидкість; тоді наведена вище загальна формула статики говорить: сума моментів всіх сил дорівнює нулю.

При застосуванні цієї формули вся складність зводиться до того, щоб визначити значення диференціалів $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ... у відповідності з природою заданої системи.

Розглянемо тепер систему в двох різних, але нескінченно близьких, положеннях і станемо шукати найбільш загальні вирази для диференціалів, що цікавлять нас, ввівши в них стільки невизначених величин, скільки є довільних елементів при зміні положення системи. Отримані таким чином вирази підставимо в задане рівняння; це рівняння має виконуватись незалежно від всіх невизначених величин, для того щоб рівновага системи взагалі існувала і, крім того, у всіх напрямках. Прирівняємо тоді нулю окремо суму членів, до яких входять одні й ті самі невизначені величини, і таким шляхом отримаємо стільки окремих рівнянь, скільки є цих невизначених величин; однак неважко переконатися, що їх число завжди буде дорівнювати числу невідомих в стані рівноваги системи. Таким чином, за допомогою цього методу отримаємо стільки рівнянь, скільки їх потрібно для визначення стану рівноваги системи.

Саме цим методом і користувалися всі автори, котрі застосовували досі принцип віртуальних швидкостей для вирішення проблем статики; однак цей метод застосування зазначеного принципу часто вимагає геометричних побудов і міркувань, завдяки яким рішення стають настільки ж довгими, як якби їх шукали за допомогою звичайних принципів статики; в цьому, можливо, і полягає причина, що перешкоджала застосуванню цього принципу у всіх тих випадках, коли його слід було б, здавалося, застосувати завдяки його простоті і узагальненості.

Задачею є зведення механіки до чисто аналітичних операцій, і формула, наведена вище, надзвичайно пристосована для виконання цієї задачі. Вся справа зводиться тільки до того, щоб виразити аналітично і в найбільш загальному вигляді значення відрізків $p, q, r, ...$, узятих у напрямку сил $P, Q, R, ...$, і тоді шляхом простого диференціювання отримаємо значення віртуальних швидкостей $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ...

Тільки при цьому слід відзначити, що в диференціальному численні у всіх тих випадках, коли кілька величин змінюються одночасно, припускають, що всі вони протягом одного і того ж часу збільшуються на величину свого диференціала, і якщо відповідно до природи питання деякі з них повинні спадати в той час, як інші зростають, то диференціалам спадаючих величин приписують знак мінус.

Диференціали $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$, ..., що представляють віртуальні швидкості сил P, Q, R, ..., слід, таким чином, вважати додатними або від’ємними, залежно від того, чи намагаються сили збільшити або зменшити відрізки p, q, r, ..., що визначають їх напрямки. Але так як загальна формула рівноваги не змінюється при зміні знаків всіх її членів, можна з однаковою підставою прийняти у якості додатних диференціали тих відрізків, які збільшуються або ж зменшуються одночасно, і в якості від'ємних диференціали тих відрізків, які змінюються в протилежному сенсі. Таким чином, якщо вважати сили додатними величинами, то їх моменти $P\mathrm{d}p$, $Q\mathrm{d}q$, ... будуть додатними або від'ємними залежно від того, чи будуть віртуальні швидкості $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, ... додатними або від'ємними; а якщо ми забажаємо змусити сили діяти в протилежному напрямку, то нам доведеться тільки приписати знак мінус тим величинам, які представляють ці сили, або ж змінити знак їх «моментів».

Звідси випливає основна властивість рівноваги, що полягає в тому, що будь-яка система сил, що знаходиться в рівновазі, продовжує залишатися в цьому стані, коли кожна з цих сил змінює напрямок своєї дії на протилежний, якщо тільки структура цієї системи не зазнає якоїсь зміни внаслідок зміни напрямків усіх сил.

Слід окремо зупинитися на теоремі Ж.-Л. Лагранжа, яку він називав «властивість рівноваги, яка відноситься до максимуму і мінімуму» (Розділ III «Аналітичної механіки»). Лагранж розглядає рівновагу консервативної механічної системи із скінченним числом ступенів вільності, причому всі сили, що діють на систему, є потенціальними, тобто існує функція потенціальної енергії системи , така що

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11.13}$$

де Q_i - узагальнені сили, q_i - узагальнені координати, n – число ступенів вільності системи.

Оскільки в стані рівноваги всі узагальнені сили Q_i повинні дорівнювати нулю, то в силу справедливості (11.13) в цьому стані дорівнює нулю і диференціал потенціальної енергії $d\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i$, а це, в свою чергу, означає, що за рівноваги системи її потенціальна енергія має стаціонарне значення.

Лагранж в §5 першого тому «Аналітичної механіки» (1788) детально розглянув випадок, коли потенціальна енергія має не просто стаціонарне, а строго мінімальне значення. Для цього він розклав функцію П біля положення рівноваги в ряд за ступенями малих величин x_i, які є приростами координат системи:

$$\Pi = A + B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + C_{11} x_1 x_1 + C_{12} x_1 x_2 + C_{22} x_2 x_2 + \ldots \tag{11.14}$$

і запропонував обмежитися лише другими ступенями змінних x_i.

З рівності нулю величини $\mathrm{d}\Pi$ при нульових значеннях x_i витікає, що $B_i = 0$. Тепер виразу (11.14) за допомогою лінійного перетворення нескладно надати вигляду

$$\Pi = A + D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + \ldots \tag{11.15}$$

Далі використовується той факт, що якщо $x_i = 0$, то і $y_i = 0$, а значить в положенні рівноваги функція П матиме локальний мінімум $\Pi_{\min} = A$ тільки в тому випадку, якщо коефіцієнти D_i є додатними.

Нехай тепер система виводиться зі стану рівноваги шляхом надання її масам $m_1, m_2, \ldots$ початкових малих швидкостей $V_1, V_2, \ldots$, тобто системі надається деяка кінетична енергія $T_0 = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots)$. Записавши на підставі закону збереження повної механічної енергії консервативної системи, який Лагранж називає принципом збереження живих сил,

$$\frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots) + A = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots) + A + D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + \ldots, \quad (11.16)$$

де $v_1, v_2, \ldots$ - це швидкості мас системи у відхиленому стані, легко бачити, що при такому початковому збуренні швидкості і переміщення точок системи будуть обмежені умовами

$$(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots) \le (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots); \; D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + \ldots \le \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 + \ldots). \quad (11.17)$$

Як пише Лагранж «Звідси випливає, що в даному випадку система буде в змозі лише дуже мало відхилятися від свого положення рівноваги і зможе виконувати лише дуже малі коливання з обмеженим розмахом». Іншими словами (Теорема Лагранжа), якщо в деякому положенні системи потенціальна енергія має строгий мінімум, то це положення є положенням стійкої рівноваги.

У 1846 р. німецький математик Петер Густав Лежен Діріхле опублікував роботу «Über die Stabilität des Gleichgewichtes» (Про стійкість рівноваги), в якій вказав на те, що доведення стійкості рівноваги, запропоноване Лагранжем і засноване на поданні функції потенціальної енергії початковим відрізком степеневого ряду є недостатньо строгим. Детально аналізуючи це питання, він відмічав, що якщо система матеріальних точок знаходиться під збурюючою дією сил тяжіння або відштовхування, які залежать тільки від відстані і які спрямовані до нерухомих центрів або які спричинені взаємодією між двома масами, то дія і протидія між собою рівні; з іншого боку, якщо умовні рівняння, що зв'язують координати різних тіл, не містять час, то має місце рівняння живих сил, а саме:

$$\sum m_i v_i^2 = f(x, y, z, x', \ldots) + C\,.$$

Знак Σ поширюється на всі маси системи, причому кожна маса позначається через m_i, а її швидкість через v_i; C - деяка довільна постійна. Функція координат залежить тільки від природи сил і може бути виражена за допомогою певного числа незалежних змінних λ, μ, ν, … , так що рівняння живих сил запишеться наступним чином:

$$\sum m_i v_i^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) + C.$$

Як зауважує Діріхле, функція φ тісно пов'язана з положеннями рівноваги системи, оскільки умова знаходження системи в положенні рівноваги при відомих певних значеннях $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ збігається з умовою рівності нулю диференціалу φ при тих же самих значеннях. Таким чином взагалі для кожного положення рівноваги ця функція є максимумом або мінімумом. Якщо в дійсності має місце максимум, то рівновага - стійка; це означає, що якщо точки системи нескінченно мало змістити з їх положень рівноваги і кожній з них надати необхідну початкову швидкість, то протягом всього руху переміщення різних точок системи по відношенню до положення рівноваги завжди будуть знаходитися в межах деяких визначених і дуже малих значень. З цих пояснень стає зрозумілим, що під функцією φ Діріхле розуміє силову функцію, тобто потенціальну енергію системи, взяту із зворотнім знаком. Наведені вище в цьому абзаці властивості функції φ по відношенню до стану рівноваги він називає однією з найважливіших в механіці теорем і відмічає, що вона служить основою теорії малих коливань, яка призводить до багатьох цікавих застосувань в області фізики. Те, що ця теорема не була обґрунтована досить строго і задовільно, викликало у нього подив.

Припускаючи без шкоди для спільності, що стан рівноваги системи, або максимум функції φ, відповідає значенням $\lambda = 0, \mu = 0, \ldots$ Діріхле розбирає доведення, надане Лагранжем («Аналітична механіка», Статика, від. III), яке полягає в наступному: розкладання функції за ступенями $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, що починається з членів другого порядку, зводиться до цих членів; потім, на підставі відомої умови максимуму, згідно з якою члени другого порядку можуть бути розглянуті як сума від’ємних квадратів, для $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ встановлюються відомі границі, які ці величини не можуть переступити. Цей вид доведення, що застосовується ще і в інших питаннях стосовно стійкості і особливо в фізичній астрономії, є недостатньо строгим. Справді, можна з повною підставою сумніватися в тому, що величини, для яких ми маємо малі границі, виходячи з припущення, що ці величини завжди будуть дуже малі (бо ми це робимо тільки в тому випадку, коли можемо знехтувати членами вищого порядку), дійсно завжди протягом будь-якого проміжку часу будуть залишатися в цих межах і притому взагалі - в малих границях.

Як зазначає Діріхле, наведене доведення повторювалося без істотних змін усіма авторами, які займалися цим питанням; а все те, що було додано Пуассоном (Poisson, Traite de Mecanique, т. 2, стор. 492) для того, щоб ввести в розгляд члени вищого порядку, ґрунтується на неприйнятному допущенні, що кожен член другого порядку перевершує суму всіх членів вищого порядку.

Якщо навіть доповнити міркування Лагранжа для випадку, до якого вони застосовуються і де наявність максимуму встановлюється за допомогою членів другого порядку, розглянута теорема не може бути доведена в повному своєму обсязі. Відомо, що існування максимуму сумісно зі зникненням членів другого порядку; взагалі досить, щоб перші члени, відмінні від нуля, були парного порядку і щоб сума цих членів була завжди негативною. Формули, що відносяться до цієї останньої умови, до цих пір ще не були наведені навіть в тому випадку, коли мова йде про члени четвертого порядку. Тому спочатку слід було б знайти ці формули. Але це неминуче призвело б до значного ускладнення в доведенні теореми механіки, про яку йдеться. На щастя, зазаначає Діріхле, положення про стійкість рівноваги можна довести незалежно від цих формул, користуючись дуже простим міркуванням, яке безпосередньо пов'язане з ідеєю максимуму.

Крім зробленого вище припущення, що положення рівноваги відповідає значенням $\lambda = 0, \mu = 0, \ldots$, він припустив ще, що $\varphi(0,0,0,\ldots) = 0$; таке припущення допустимо з огляду на наявність довільної сталої. Далі він визначив цю сталу, беручи до уваги заданий початковий стан, для якого значення $v, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ позначено через $v_0, \lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots$ Таким чином він отримав

$$\sum m_i v_i^2 = \varphi(\lambda,\mu,\nu,\ldots) - \varphi(\lambda_0,\mu_0,\nu_0,\ldots) + \sum m_i v_0^2 .$$

Оскільки згідно допущенню при $\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \ldots$ $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ є нулем і максимумом, то можна взяти позитивні величини *l, m, n, ...* достатньо малими, щоб $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ була завжди від'ємною для будь-якої системи значень $v, \lambda, \mu, \nu, \ldots$, якщо відповідно висунута вимога, щоб абсолютні значення змінних не виходили за межі *l, m, n, ...*, за винятком одного єдиного випадку, коли $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ всі одночасно дорівнюють нулю. Цей випадок можна виключити, якщо розглядати лише такі системи, в яких принаймні одна зі змінних $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ буде за своїм абсолютним значенням дорівнювати своїй границі *l, m, n, ...* Припустимо, що з усіх від'ємних значень функції для подібних систем найменшим за абсолютною величиною значенням буде $-p$; тоді можна легко довести, що, коли $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots$ є чисельно меншими, ніж *l, m, n, ...*, і в той же час задовольняється нерівність

$$-\varphi(\lambda_0,\mu_0,\nu_0,\ldots) + \sum m_i v_0^2 < p$$

то кожна із змінних $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ залишиться протягом всього часу руху всередині границь *l, m, n, ...* Справді, якби мало місце протилежне, то, оскільки початкові значення $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots$ задовольняють поставлені умови, а також в силу неперервності змінних $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, перш за все було б необхідно, щоб в певну мить існувала рівність між одним або декількома чисельними значеннями $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ і відповідними їх границями *l, m, n, ...*, причому інші значення не повинні виходити за свої границі. В цю мить абсолютне значення $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ буде більше або принаймні дорівнювати *p*. Отже, другий член рівняння живих сил буде від'ємним зважаючи на написану вище рівність, яка відноситься до початкового стану; але це неможливо, оскільки величина $\sum m v_0^2$ завжди є додатною.

Очевидно, звідси також випливає, що значення швидкостей v завжди обмежені, так як завжди справедливо

$$\sum m_i v_i^2 \leq \sum m_i v_0^2 - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) .$$

Остаточний висновок, який робить Діріхле, полягає в тому, що границі для кожної швидкості, так само як і границі для кожної змінної $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ теж можуть бути як завгодно малими, оскільки і величини $l, m, n, \ldots$ можуть стати як завгодно малими, а це і означає стійкість даного стану рівноваги.

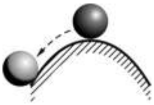
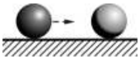
Рене Декарт,
фр. René Descartes
(1596 - 1650)

Жозеф Луї Лагранж,
фр. Joseph Louis
Lagrange
(1736 - 1813)

Йоганн Петер Густав
Лежен Діріхле,
нім. Johann Peter
Gustav Lejeune
Dirichlet (1805 - 1859)

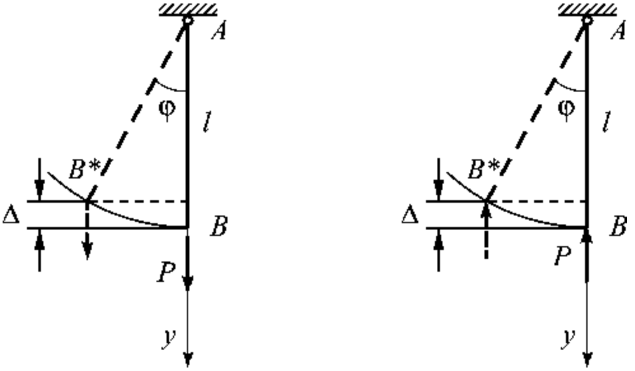
Відзначимо, підбиваючи підсумок, що і в даний час міркування Діріхле з невеликими варіаціями наводяться в підручниках з аналітичної механіки для доведення теореми Лагранжа.

Таким чином, був сформульований відомий принцип Лагранжа-Діріхле: для консервативної системи стійка, нестійка, байдужа рівновага має місце, відповідно в наступних ситуаціях.

Стійка рівновага	Нестійка рівновага	Байдужа рівновага
$\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi > 0$ min	$\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi < 0$ max	$\delta\Pi = 0$ $\delta^2\Pi = 0$ const
		

Застосування принципу мінімуму потенціальної енергії

Розглянемо абсолютно твердий стержень, підвішений в точці A , навантажений силою P, яка прикладена вниз вздовж осі стержня (рис. 11.5, *а*)



а *б*

Рис. 11.5

Положення на площині такого стержня характеризується одним параметром, наприклад, кутом φ (система з одним ступнем вільності). З'ясуємо, які значення кута φ відповідають положенням рівноваги, і які з останніх є стійкими. Для цього запишемо і проаналізуємо вираз потенціальної енергії системи П(φ). Будемо вважати, що при φ=0 потенціальна енергія також дорівнює нулю. Тоді при повороті стержня потенціальна енергія набуває значення $P\Delta$, причому $\Delta = l(1-\cos\varphi)$. Знак «+» перед добутком $P\Delta$ обирається, тому що при повороті стержня точка прикладення сили підіймається і потенціальна енергія збільшується. Отже,

$$\Pi = Pl(1-\cos\varphi)\,. \tag{11.18}$$

В положенні рівноваги потенціальна енергія досягає свого екстремуму:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = Pl\sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0,\ \pi\,. \tag{11.19}$$

Положення, в якому $\varphi = 0$, відповідає стійкій рівновазі, оскільки друга похідна потенціальної енергії в цьому разі є додатною величиною, і отже, потенціальна енергія досягає свого мінімуму:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = Pl\cos\varphi;\ \left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = Pl > 0 \Rightarrow \Pi = \min\,. \tag{11.20}$$

В свою чергу при $\varphi = \pi$ система знаходиться в нестійкій рівновазі, оскільки друга похідна потенціальної енергії в цьому разі є від'ємною величиною, і отже, потенціальна енергія досягає свого максимуму:

$$\left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = Pl\cos\varphi\Big|_{\varphi=\pi} = -Pl < 0 \Rightarrow \Pi = \max\,. \tag{11.21}$$

Якщо б сила P була спрямована вгору (рис. 11.5,*б*), то при відхиленні стержня від вертикального положення потенціальна енергія набула значення $-P\Delta$, оскільки точка прикладення сили переміщується вгору, а робота, яку могла б виконати сила P зменшується. Отже, в цьому випадку

$$\Pi=-Pl(1-\cos\varphi)$$

і всі висновки, що були зроблені вище змінюються на протилежні: при $\varphi=0$ маємо нестійку рівновагу, а при $\varphi=\pi$ - стійку.

Розглянемо тепер рівновагу так званих «терез Аристотеля» (рис. 11.6). Це також система з одним ступенем вільності, положення якої на площині характеризується кутом φ.

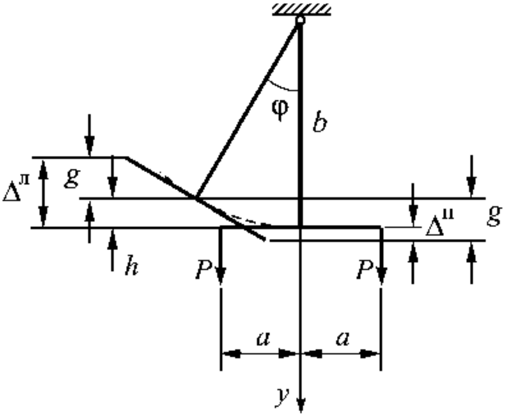
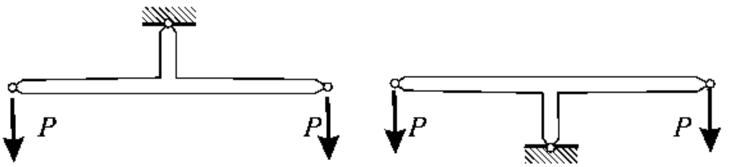


Рис. 11.6

Взагалі, поняття «стійкість», починаючи з глибокої давнини і до XVII-го ст., було пов'язане з проблемою відбору дійсних (спостережуваних) станів рівноваги. Мабуть, вперше така задача була поставлена в приписуваних Аристотелю «Механічних проблемах». При цьому розглядалося питання про те, чи повернеться виведене зі стану рівноваги тіло до первісної конфігурації після усунення збурення. Це питання було поставлено щодо Т-подібних терез, і Аристотель вказує, що в разі верхнього підвісу (рис. 11.7,*а*) таке повернення відбудеться (стійке положення), а в разі нижнього підвісу (рис. 11.7,*б*) – не відбудеться.



а *б*

Рис. 11.7. Терези Аристотеля

Як і в попередньому прикладі вважатимемо, що коли $\varphi=0$, потенціальна енергія системи дорівнює нулю. При повороті терез потенціальна енергія набуває значення $P\Delta^{\text{Л}}-P\Delta^{\text{П}}$, оскільки точка прикладення лівої сили підіймається при повороті, збільшуючи потенціальну енергію на величину $P\Delta^{\text{Л}}$, а права сила зміщується вниз, зменшуючи потенціальну енергію на величину $P\Delta^{\text{П}}$. З рис. 11.6 неважко побачити, що $\Delta^{Л}=f+g$, тоді як $\Delta^{П}=f-g$, причому $g=l(1-\cos\varphi)$. Таким чином, можемо записати наступне

$$П=P\Delta^{Л}-P\Delta^{П}=P[(f+g)-(f-g)]=2Pg=2Pl(1-\cos\varphi). \qquad (11.22)$$

Бачимо, що вирази для потенціальної енергії в двох розглянутих прикладах відрізняються тільки множником, тому всі висновки, які були зроблені при розгляді першого прикладу, залишаються дійсними і для другого.

Принцип мінімуму потенціальної енергії також може бути застосований до задач оптимального проектування. Перша така задача була чітко сформульована Лагранжем в 1770 - 1773 рр. стосовно стержневих конструкцій. Це була задача про колону найменшої ваги, жорстко затиснену на одному кінці і завантажену стискаючою силою на іншому [Lagrange, 1770-1773]. Потрібно було визначити форму колони, що відповідає мінімуму ваги при заданій поздовжній силі.

11.3. Ланцюгова лінія

> *Натяг або стиснення нитки або тіла в будь-якій його точці або в будь-якому елементі кривої є та сила нитки або тіла, з якою воно опирається силі або навантаженню, що виникає від всіх прикладених навантажень і розтягує нитку в протилежному напрямку, прагнучи розірвати її. Цей натяг строго дорівнює розриваючій силі, яка обумовлена усіма навантаженнями, прикладеними до тіла.*
>
> Я. Германн

Варто зазначити, що хоча, першою механічною задачею варіаційного числення вважається задача про брахістохрону (1696), але ще раніше в 1690 р. Якоб Бернуллі в Acta Eruditorum закликав до розв'язання «problematio funicularis» - задачі про форму ланцюгової або мотузкової кривої. Ця задача стала важливою ланкою в процесі становлення основних понять будівельної механіки.

Ще в 1673 р. при вивченні ланцюгової лінії і підвісного моста Г. Пардіс припустив, що форма гнучкої лінії не зміниться, якщо будь-яка частина її затвердіє, або, більш того, якщо ми замінимо частини нитки, розташовані над двома точками *A* і *a*, відповідними силами, що діють уздовж дотичних в точках *A* і *a* (рис. 11.8). Цей принцип використаний у всіх наступних дослідженнях ланцюгової лінії; зокрема Йоганном Бернуллі і Лейбніцем у 1690 році.

У ряді своїх досліджень гнучких ниток довільної товщини під дією довільно розподіленого навантаження (1691-1704) Якоб Бернуллі застосовував принцип Пардіса без змін. Він в явній формі вводить firmitas (напруження); позначивши його через *T*,

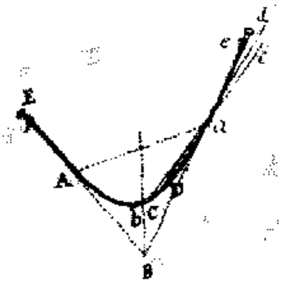


Рис. 11.8. Принцип Пардіса

можна записати одну з форм, в яких Бернуллі дав загальні рівняння рівноваги плоскої гнучкої нитки, наступним чином:

$$T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = T_0 - \int_0^s F_x \mathrm{d}s,$$

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -\int_0^s F_y \mathrm{d}s,$$

де F_x і F_y - компоненти прикладених сил на одиницю довжини. Ці результати не були опублікувані до 1744 р.

Лейбніц знайшов симетричну експоненціальну функцію як функцію провисання

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a\,\mathrm{ch}(x/a);\;\; y(x=0) = a \qquad (11.23)$$

з нормаллю, рівною радіусу кривизни

$$n(y) = R(y) = y^2/a. \qquad (11.24)$$

Він також отримав подання показникової функції у вигляді суми ланцюгової лінії і її похідної.

Крім того, Лейбніц знайшов ланцюгову лінію за допомогою прокатки параболи по горизонтальній осі проти годинникової стрілки, рис. 11.9,*а*, з положеннями $Y, Y', Y'', Y''', \ldots$, де нормалі є точками кривої провисання. І, нарешті, Лейбніц побудував логарифмічну функцію, використовуючи функцію провисання, рис. 11.9,*б*.

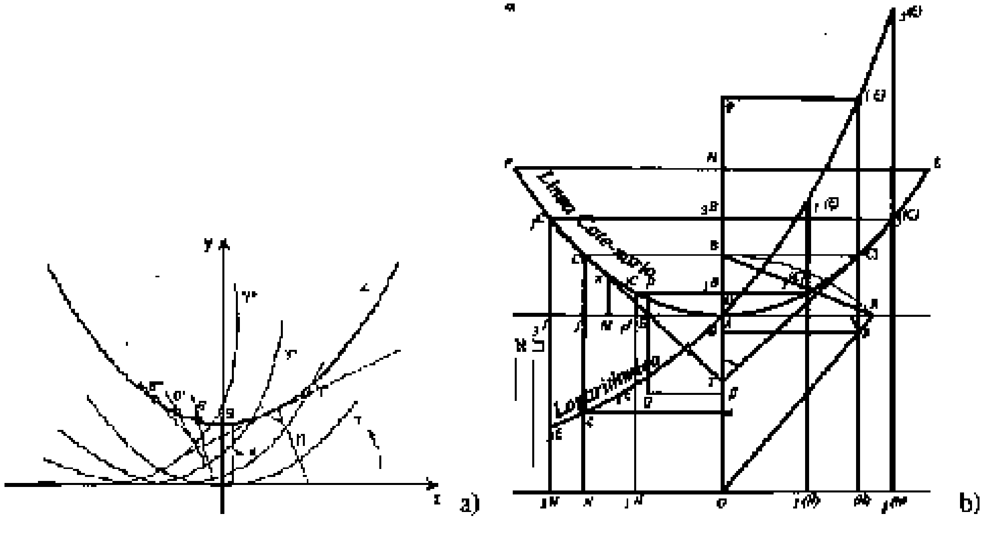


Рис. 11.9. *а*) Побудова функції провисання шляхом прокатки параболи; *б*) побудова функції натурального логарифму з використанням функції провисання

Перший член степеневого розкладання функції провисання за параметром *f/l*, рис. 11.9,*а*, дає квадратну параболу $y=fx(l-x)/4l^2$. Це перше наближення функції $\mathrm{ch}(x/a)$ для малих *f/l*. В цьому випадку вертикальне навантаження постійне уздовж осі x, в той час як навантаження функції провисання, викликане мертвим вантажем, очевидно, зростає при просуванні від середньої точки до країв.

Інша важлива властивість ланцюгової лінії пов'язана з принципом мінімуму потенціальної енергії системи довільно зв'язаних мас. Можна отримати функцію, що описує ланцюгову лінію, припустивши найнижче можливе положення центра ваги, і можна показати, що вона має мінімальну довжину. До того же, поверхня обертання цієї ланцюгової лінії, катеноїда, має мінімальну поверхню і є розв'язком задачі Плато.

Сучасне формулювання варіаційної задачі полягає у знаходженні мінімуму статичного моменту $\int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ відносно горизонтальної осі *x* за умови $\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=l$. Неважко визначити що розв'язком задачі буде функція *y*(*x*), яка задовольняє диференціальне рівняння

$$a\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}=1, \tag{11.25}$$

де вісь *y* спрямована вертикально вгору, протилежно і паралельно напряму сили тяжіння, $a=\frac{H}{q}$, *H*=const – проекція зусилля в нитці на горизонтальну вісь *x*, *q* – сила тяжіння, віднесена до одиниці довжини нитки.

Розв'язок рівняння (11.25) (рівняння ланцюгової лінії) має вигляд

$$y=a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x-C_1}{a}\right)+C_2 .$$

Якщо вісь *y* проходить через вершину ланцюгової лінії, де дотична є паралельною осі *x* (рис. 11.10), то $y'=0$ при $x=0$.

Оскільки $y'(x)=\mathrm{sh}\left(\frac{x-C_1}{a}\right)$ та $y'(0)=\mathrm{sh}\left(\frac{-C_1}{a}\right)=$ $=-\mathrm{sh}\left(\frac{C_1}{a}\right)=0$, то $C_1=0$, і $y(x)=a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)+C_2$.

Крім того, якщо вершина лінії має координати (0; *a*), тобто $y(0)=a\,\mathrm{ch}(0)+C_2=a$, то $C_2=0$, і в обраній системі координат рівняння ланцюгової лінії набуває вигляду

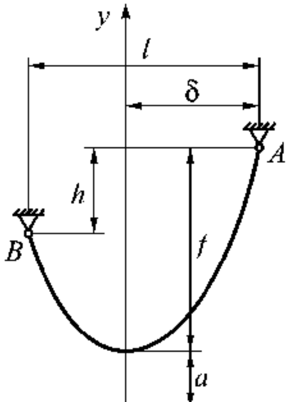


Рис. 11.10

$$y(x)=a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Зазвичай заданими є координати точок підвісу (x_A, y_A) та (x_B, y_B), а також довжина лінії L. Тоді параметри a і δ, які визначають геометрію лінії, можна знайти з трансцендентних рівнянь

$$\mathrm{sh}\left(\frac{l}{2a}\right)=\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{2a},$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{2\delta-l}{2a}\right)=\frac{h}{L},$$

де

$$l=x_A-x_B,\; h=y_A-y_B.$$

Зазначимо, що коли $h=0$ (точки закріплення розташовані на одному рівні), то $\delta=0{,}5l$.

Розглянемо задачу про положення рівноваги системи n однорідних твердих стержнів постійного перерізу, які шарнірно з'єднані один з одним і зазнають дії сили тяжіння (задача про з'єднані стержні за термінологією К.Ланцоша [Ланцош, 1965]). Крайні вузли ланцюга, 0-й та n-й, закріплені в заданих точках.

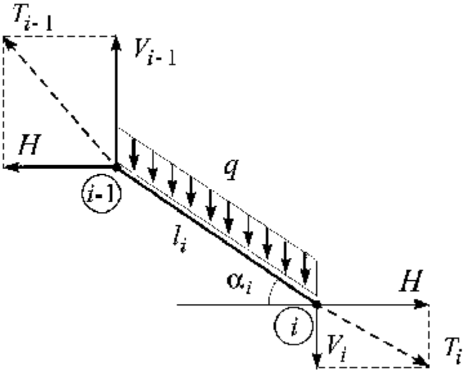


Рис. 11.11

Розглянемо рівновагу довільної i-ї ланки ланцюга, яка має довжину l_i і нахилена до горизонту під кутом α_i (рис. 11.11).

Кінці ланки мають координати (x_{i-1}, y_{i-1}) та (x_i, y_i). Зусилля, з якими i-а та i+1-а ланки діють одна на одну в i-му вузлі позначимо через T_i, а проекції T_i на горизонтальну та вертикальну осі – відповідно через H_i та V_i.

З умов рівноваги ланки отримуємо, що проекція зусилля в будь-якому шарнірі на горизонтальну вісь є постійною величиною: $H=\mathrm{const}$. Рівності нулю сумарних моментів відносно шарнірів i та i+1 дають відповідно

$$\sum M_i=0:\; V_{i-1}l_i\cos\alpha_i-Hl_i\sin\alpha_i-0{,}5ql_i^2\cos\alpha_i=0, \tag{11.26}$$

$$\sum M_{i-1}=0:\; V_il_i\cos\alpha_i-Hl_i\sin\alpha_i+0{,}5ql_i^2\cos\alpha_i=0. \tag{11.27}$$

Рівність, аналогічну виразу (11.27), можна записати для i-1-ї ланки ланцюга:

$$\sum M_{i-2}=0:\; V_{i-1}l_{i-1}\cos\alpha_{i-1}-Hl_{i-1}\sin\alpha_{i-1}+0{,}5ql_{i-1}^2\cos\alpha_{i-1}=0. \tag{11.28}$$

Виразимо з рівняння (11.28) реакцію V_{i-1} через H і q і підставимо отриманий вираз в (11.26). Після приведення подібних будемо мати

$$H\left(\sin\alpha_{i-1}\frac{\cos\alpha_i}{\cos\alpha_{i-1}}-\sin\alpha_i\right)-0,5q\left(l_i+l_{i-1}\right)\cos\alpha_i=0\,. \tag{11.29}$$

З урахуванням того, що

$$\sin\alpha_i=\frac{y_{i-1}-y_i}{l_i}=\frac{-\Delta y_i}{l_i};\quad \cos\alpha_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{l_i}=\frac{\Delta x_i}{l_i}\,,$$

вираз (11.29) перетворюється на різницеве рівняння

$$a\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}-\frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(l_k+l_{k-1}\right), \tag{11.30}$$

яке при збільшенні кількості стержнів і одночасному зменшенні їх довжини переходить в диференціальне рівняння (11.25).

Можна скласти n-1 рівняння типу (11.30) відносно $2n$ невідомих Δx_k, Δy_k, а також параметру a. Їх доповнюють n умовами $\Delta x_k^2+\Delta y_k^2=l_k^2$ та умовами $\sum\Delta x_k=l$ і $\sum\Delta y_k=h$, в результаті чого утворюється система, яка містить $2n+1$ нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $2n+1$ невідомих.

Подібні задачі зручно розв'язувати за допомогою принципу Лагранжа-Діріхле. Розглянемо тепер дещо іншу задачу про конфігурацію системи n однорідних твердих стержнів, до проміжних шарнірних вузлів якої вертикально вниз прикладені зосереджені сили P_i, $i=1,\dots,n-1$ (рис. 11.12).

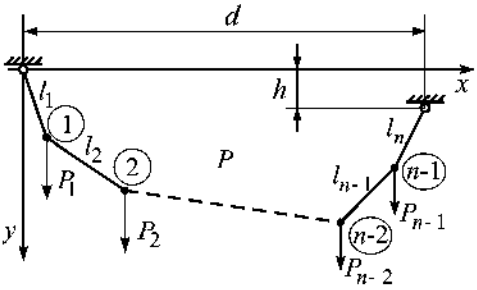


Рис. 11.12

Потенціальна енергія системи П виражається наступним чином

$$\Pi=-\sum_{k=1}^{n-1}P_k y_k\,.$$

Будемо шукати такі y_k, які забезпечать стаціонарне значення П за умови незмінності довжин ланок ланцюга. Для цього розглянемо допоміжний видозмінений вираз потенціальної енергії

$$\Pi^*=-\sum_{k=1}^{n-1}P_k y_k+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}\,, \tag{11.31}$$

в якому варіюються величини x_k, y_k.

Умова $\dfrac{\partial\Pi^*}{\partial x_k}=0$ дає

$$\lambda_k \frac{\Delta x_k}{\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}} - \lambda_{k+1}\frac{\Delta x_{k+1}}{\sqrt{(\Delta x_{k+1})^2+(\Delta y_{k+1})^2}} = 0, \qquad (11.32)$$

де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Рівність (11.32) може бути переписана у вигляді

$$\lambda_k \cos\alpha_k - \lambda_{k+1}\cos\alpha_{k+1} = 0, \qquad (11.33)$$

де α_k - кут нахилу k-го стержня до горизонту.

Візьмемо до уваги, що кожен доданок у виразі (11.31) за фізичним змістом є механічною роботою, а величини, на які множаться λ_k, є довжинами стержнів, що варіюються при варіюванні x_k, y_k. Отже, можна ототожнити λ_k із поздовжнім зусиллям N_k у відповідному стержні, яке здійснює роботу на видовженні стержня внаслідок зміни x_k, y_k. Зауважимо також, що оскільки зовнішні сили прикладені до шарнірних вузлів, то поперечні сили у стержнях системи не виникають.

Тепер вираз (11.33) можна тлумачити як умову рівності нулю суми проекцій на горизонтальну вісь всіх сил, що діють на k-й вузол, звідки випливає, що

$$N_k \cos\alpha_k = N_{k+1}\cos\alpha_{k+1} = H = \text{const}. \qquad (11.34)$$

Тут через H позначена горизонтальна проекція зусилля N_k в k-му стержні. Оскільки всі зовнішні сили, якими завантажена шарнірно-стержнева система є вертикальними, то умова $H = \text{const}$ є цілком зрозумілою.

Звернемось тепер до рівності $\dfrac{\partial \Pi^*}{\partial y_k} = 0$, з якої маємо

$$-P_k + \lambda_k \frac{\Delta y_k}{\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}} - \lambda_{k+1}\frac{\Delta y_{k+1}}{\sqrt{(\Delta x_{k+1})^2+(\Delta y_{k+1})^2}} = 0. \qquad (11.35)$$

З рівностей (11.32)-(11.34) отримаємо

$$\frac{\lambda_k}{\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}} = \frac{H}{\Delta x_k}, \qquad (11.36)$$

і після підстановки в (11.35) будемо мати різницеві рівняння

$$H\left(\frac{\Delta y_{k+1}}{\Delta x_{k+1}} - \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right) = -P_k, \quad k = 1,\ldots,n-1 \qquad (11.37)$$

відносно $2n$ невідомих Δx_k, Δy_k, а також параметру H. Їх слід доповнити n умовами

$$\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 = l_k^2 \qquad (11.38)$$

та умовами

$$\sum \Delta x_k = d \ \text{ і } \sum \Delta y_k = h. \qquad (11.39)$$

Зазначимо, що рівняння (11.37), (11.38) є нелінійними, тому вихідна система має декілька розв'язків, з яких лише один відповідає стійкій рівновазі. Так, наприклад, триланковий ланцюг, має два стани рівноваги, причому в стійкому стані обидва y_k

співпадають за напрямом із силами P_k, а в іншому стані, нестійкому, вертикальні компоненти переміщень вузлів y_k протилежні силам.

Для того, щоб відрізнити стан стійкої рівноваги, потрібно згідно із теоремою Лагранжа-Діріхле визначити, в якому стані потенціальна енергія є мінімальною.

Розглянемо триланковий ланцюг, всі стержні якого мають однакову довжину l, точки підвису розташовані на одному рівні по вертикалі, а відстань між ними дорівнює подвоєній довжині ланки (рис. 11.13).

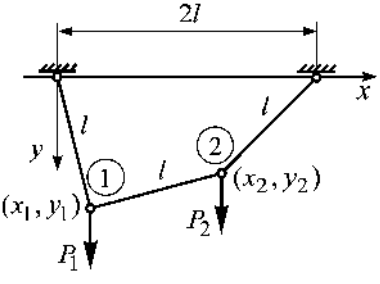


Рис. 11.13

Система рівнянь (11.37-11.39) буде мати вигляд

$$H\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}-\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)=-P_1,\ H\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}-\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)=-P_2, \quad (11.40)$$

$$\Delta x_1^2+\Delta y_1^2=l^2, \quad (11.41)$$

$$\Delta x_2^2+\Delta y_2^2=l^2, \quad (11.42)$$

$$\Delta x_3^2+\Delta y_3^2=l^2 \quad (11.43)$$

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=2l, \quad (11.44)$$

$$\Delta y_1+\Delta y_2+\Delta y_3=0. \quad (11.45)$$

Якщо сили, прикладені до проміжних точок ланцюга, дорівнюють одна одній ($P_1=P_2=P$), то один розв'язок системи (11.40-11.45) має вигляд

$$\Delta x_1=\frac{l}{2},\ \Delta x_2=l,\ \Delta x_3=\frac{l}{2},$$

$$\Delta y_1=\frac{l\sqrt{3}}{2},\ \Delta y_2=0,\ \Delta y_3=-\frac{l\sqrt{3}}{2},\ \ H=\frac{P}{\sqrt{3}}.$$

(положення системи показано на рис. 11.14 суцільною лінією), а другий розв'язок задається наступними значеннями

$$\Delta x_1=\frac{l}{2},\ \Delta x_2=l,\ \Delta x_3=\frac{l}{2},\ \ \Delta y_1=\frac{l\sqrt{3}}{2},$$

$$\Delta y_2=0,\ \Delta y_3=-\frac{l\sqrt{3}}{2},\ \ H=-\frac{P}{\sqrt{3}}$$

(пунктирна лінія на рис. 11.14).

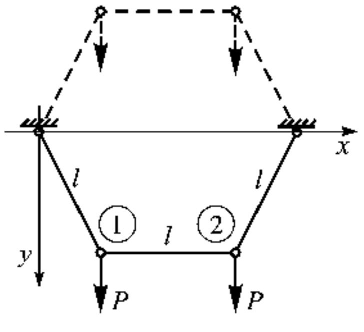


Рис. 11.14

Лишається з'ясувати, яка конфігурація системи при заданому навантаженні є стійкою. Для цього згідно із теоремою Лагранжа-Діріхле необхідно дослідити потенціальну енергію системи

$$\Pi=-(P\,y_1+P\,y_2)\,. \quad (11.46)$$

Оскільки триланкова система має одну ступінь вільності, то між параметрами y_1 та y_2 існує зв'язок, який можна встановити, аналізуючи співвідношення (11.41-11.45) та рис. 11.13. Неважко помітити, що

$$x_1^2 = l^2 - y_1^2 \text{, і } (2l - x_2)^2 = l^2 - y_2^2 \text{,}$$

звідки

$$x_1 = \sqrt{l^2 - y_1^2} \text{, і } x_2 = 2l - \sqrt{l^2 - y_2^2} \text{.}$$

Підставимо отримані вирази для x_1 і x_2 у (11.42) і будемо мати

$$\left(2l - \sqrt{l^2 - y_2^2} - \sqrt{l^2 - y_1^2}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0\text{.} \tag{11.47}$$

Вираз (11.47) задає y_2 як неявну функцію від y_1; графік цієї залежності наведений на рис. 11.15. Як бачимо, кожному значенню y_1 відповідає два значення y_2. Так, наприклад, якщо $y_1 = 0$, тобто коли перша ланка займає горизонтальне положення, то $y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} l$. На рис. 11.16 наведений графік залежності нормованої потенціальної енергії від y_1, який також побудовано з урахуванням неявної залежності y_2 від y_1. Зрозуміло, що і тут кожному значенню y_1 відповідає два значення потенціальної енергії , наприклад, коли $y_1 = 0$, то $\Pi = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} Pl$.

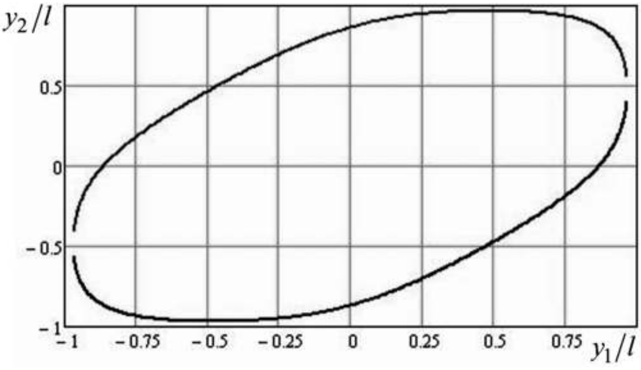


Рис. 11.15

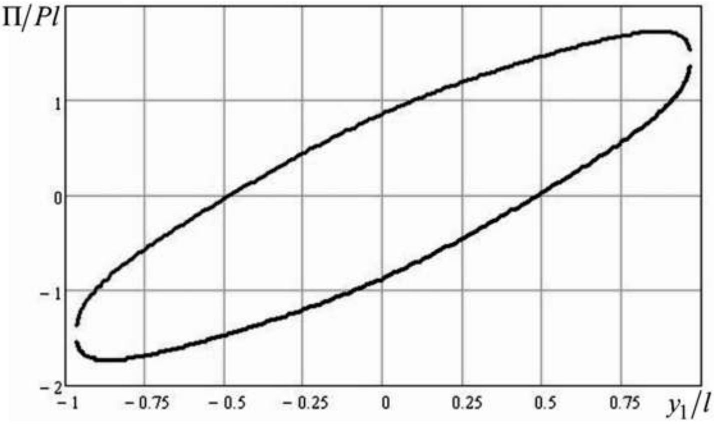


Рис. 11.16

Числові значення безрозмірних величин y_1/l, y_2/l та Π/Pl в деяких положеннях системи містяться в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

y_1/l	y_2/l (нижня гілка на рис. 11.15)	y_2/l (верхня гілка на рис. 11.15)	Π/Pl (нижня гілка на рис. 11.16)	Π/Pl (верхня гілка на рис. 11.16)
$-\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{8}$	$-\frac{\sqrt{15}}{8}$	$-\frac{3\sqrt{15}}{8}$	$-\frac{3\sqrt{15}}{8}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
-0,75	-0,935	0,186	-1,684	-0,563
-0,5	-0,968	0,468	-1,468	-0,032
-0,25	-0,949	0,699	-1,199	0,448
0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0,25	-0,699	0,949	-0,448	1,199
0,5	-0,468	0,968	-0,032	1,468
0,75	-0,185	0,935	0,563	1,684
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{3\sqrt{15}}{8}$	$\frac{3\sqrt{15}}{8}$

Найменше значення потенціальної енергії $\Pi=\Pi_{\min}=-\sqrt{3}Pl$ і відповідно стійкий стан рівноваги мають місце при $y_1=y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}l$ (на рис. 11.14 це показане суцільною лінією), а нестійка рівновага спостерігається при $y_1=y_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}l$, де $\Pi=\Pi_{\max}=\sqrt{3}Pl$ (положення, показане пунктирною лінією на рис. 11.14).

Перше наукове застосування ланцюгових кривих в цивільному будівництві було реалізовано при відновленні купола собору Святого Петра в Римі, який мав меридіональні тріщини. Папа Бенедикт XIV доручив Венеціанським монахам Ле Серу, Бошковичу і Жакі надати пропозиції щодо реставрації, які були представлені в 1742 р., як «Parere di tre mathematici», [Le Seur et al., 1742], див. також [Szabo, 1987]. У них виникла геніальна ідея моделювати купол експериментально, за допомогою ланцюгів і підвішених мас (візуалізації зображення реальних мертвих навантажень) відносно горизонтальної площини.

Меридіан катеноїдної поверхні являє собою чистий мембранний стан внутрішніх сил і відстані цього меридіана по відношенню до меридіональної кривої куполу є плечем важеля меридіональних сил, даючи згинальні моменти в куполі, які викликали тріщини. Таким чином, відновлення було здійснено за допомогою двох залізних жорстких кілець в положеннях з найбільшими плечами.

11.4. Силова функція

Якщо система знаходиться в потенціальному полі, і отже, сили $\mathbf{F}_i$, діючі на точки системи, мають силову функцію $W=W(x_i, y_i, z_i)$, то сума елементарних робіт сил $\mathbf{F}_i$ на будь-якому переміщенні системи буде повним диференціалом функції W, яка залежить від $3n$ координат точок системи. В цьому випадку

$$\mathrm{d}W=\sum_{i=1}^{n}(X_i\mathrm{d}x_i + Y_i\mathrm{d}y_i + Z_i\mathrm{d}z_i)\,, \qquad (11.48)$$

де X_i, Y_i, Z_i — проекції сил $\mathbf{F}_i$ на координатні осі.

Звідси витікає, що

$$X_i=\frac{\partial W}{\partial x_i},\quad Y_i=\frac{\partial W}{\partial y_i},\quad Z_i=\frac{\partial W}{\partial z_i} \qquad (11.49)$$

і отже, вираз для узагальненої сили Q_j буде мати вигляд:

$$Q_j=\frac{\partial W}{\partial q_j}.$$

Потенціальна енергія $U(x_i, y_i, z_i)$ системи визначається як робота, яку повинні виконати сили поля, щоб перевести систему з розглянутого положення (x_i, y_i, z_i) в нульове положення (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}), яке, взагалі кажучи, може бути вибрано довільно. Отже,

$$U(x_i\,, y_i\,, z_i\,)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{(x_i\,, y_i\,, z_i\,)}^{(x_{i0}\,, y_{i0}\,, z_{i0}\,)}(X_i\mathrm{d}x_i + Y_i\mathrm{d}y_i + Z_i\mathrm{d}z_i).$$

Змінюючи порядок додавання і інтегрування і використовуючи силову функцію $W(x_i, y_i, z_i)$, отримуємо

$$U(x_i\,, y_i\,, z_i\,)=\int\limits_{(x_i\,, y_i\,, z_i\,)}^{(x_{i0}\,, y_{i0}\,, z_{i0}\,)}\mathrm{d}W\,.$$

Після інтегрування будемо мати

$$U(x_i, y_i, z_i)=W(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) - W(x_i, y_i, z_i), \qquad (11.50)$$

тобто потенціальна енергія U з точністю до аддитивної сталої дорівнює силовій функції W, взятій із зворотним знаком:

$$U(x_i, y_i, z_i)= - W(x_i, y_i, z_i) \qquad (11.51)$$

Запишемо тепер принцип віртуальних переміщень за допомогою потенціальної енергії U. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial W}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial W}{\partial z_i}\delta z_i\right)=\delta W=0\,,$$

або на основі (11.51)

$$\delta U=0\,, \qquad (11.52)$$

тобто перша варіація потенціальної енергії U повинна дорівнювати нулю, а це є умова її стаціонарності. Таким чином, необхідна і достатня умова рівноваги системи збігається з умовою стаціонарності функції U.

Принцип віртуальних переміщень є варіаційним принципом, оскільки тут розглядається не одна конфігурація системи, а сукупність можливих конфігурацій, одержуваних в результаті віртуальних переміщень, що допускаються накладеними на точки системи в'язями.

Великою перевагою даного принципу є те, що сукупність всіх умов рівноваги можна виразити за допомогою одного рівняння, не входячи в деталі тих в'язей, які накладені на точки системи. У формулювання принципу віртуальних переміщень не входять реакції в'язей, що позбавляє від необхідності визначати їх величини.

З іншого боку, реакції в'язей за допомогою принципу віртуальних переміщень можна знаходити досить просто. Для цього слід скористатися принципом звільнюваності. Відкидаючи в'язь, ми замінюємо її дію реакцією, при цьому, як уже зазначалося, збільшується число ступенів вільності системи. Розглядаючи потім систему, звільнену від в'язі, надаємо їй віртуальне переміщення. Користуючись далі принципом віртуальних переміщень і прирівнюючи нулю суму всіх віртуальних робіт, включаючи роботу реакцій в'язей, отримуємо одне рівняння, з якого може бути знайдена шукана реакція в'язі.

Принцип віртуальних переміщень дозволяє отримати всі умови рівноваги. При цьому слід підкреслити, що рівнянь рівноваги для системи може бути отримано стільки, скільки незалежних віртуальних переміщень можна реалізувати в системі. Іншими словами, число умов рівноваги, які можна скласти для системи, збігається з числом її ступенів вільності.

11.5. Нерівність Фур'є

Мої слова математично правильні.

Ж. Фур'є

Строге доведення принципу можливих переміщень, а також поширення його на односторонні (неутримуючі) в'язі було дано Ж. Фур'є [Fourier, 1798], М.В. Остроградським [Остроградский, 1946].

Як показав Ж.Б.Ж. Фур'є, звичайне для принципу можливих переміщень вираження через потенціальну енергію (роботу сил)

$$\delta U = 0 \quad (\delta W = 0) \qquad (11.53)$$

дійсне для так званих зворотних переміщень, тобто переміщень, в'язі за напрямками яких можуть змінювати знак. У випадку незворотних переміщень рівність (11.53) слід замінити нерівністю

$$\delta U \geq 0 \quad (\delta W \leq 0), \qquad (11.54)$$

а в звичайному формулюванні принципу віртуальних переміщень – «сума усіх віртуальних робіт дорівнює нулю» замінити «дорівнює нулю» на «менше або дорівнює нулю».

Жан Батист Жозеф Фур'є, фр. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Варто зазначити, що найвагомішим внеском Жана Батиста Жозефа Фур'є у фізику вважається складення диференціального рівняння теплопровідності і розробка ефективного методу інтегрування цього рівняння – так званого методу розділення змінних, що носить його ім'я. Згодом цей метод стався у нагоді при дослідженні більш широкого класу диференціальних рівнянь. Під час досліджень з розповсюдження тепла в твердому тілі Фур'є розробив підхід, що базується на представленні функцій тригонометричними рядами, які також зараз називають його ім'ям і широко застосовуються, мабуть, в усіх галузях математичної фізики.

Єдиною роботою Фур'є з механіки був «Мемуар про статику, що містить доведення принципу віртуальних швидкостей і теорію моментів» (Fourier J.B. Mémoire sur la statique contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles et la théorie des moments Journal de l'École polytechnique, Ve Cahier 5, p. 20, 1798, reprinted in J.B. Fourier Œuvres complètes, tome 2, 477-521, 1890). Одним із положень цієї роботи був розгляд випадків рівноваги сил, які прикладені до точок механічної системи з так званими неутримуючими в'язями (такого терміну у самого Ж.Б.Ж. Фур'є немає). Як приклад Ж.Б.Ж. Фур'є розглядав рівновагу двох твердих тіл, поверхні яких притискаються у точці їх дотику двома рівними і протилежно направленими силами, нормальними до обох поверхонь в точці їх дотику, рівновагу гнучкої нерозтяжної нитки під дією двох сил, прикладених до її кінців. Ж.Б.Ж. Фур'є стверджував (без доведення), що необхідною умовою рівноваги нитки під дією таких сил – є невід'ємність «повного моменту сил» на віртуальних переміщеннях точок їх прикладення. За термінологією того часу «повним моментом сил» називалася сума елементарних робіт усіх активних сил на віртуальних переміщеннях точок їх прикладання, взята зі знаком мінус. Таким чином, умова рівноваги системи сил при неутримуючих в'язях записувалася у вигляді вимоги недодатності суми елементарних робіт усіх сил на віртуальних переміщеннях. М.В. Остроградський при розробці загальної теорії принципу можливих переміщень (1834 р.) виходив із запису цього принципу у мемуарі Ж.Б.Ж. Фур'є.

Зазначимо, що нерівність Фур'є $\delta U \geq 0$ відповідає нерівності Юнга

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \qquad (11.55)$$

У випадку потенціалів будівельної механіки $U(\Delta)$ - потенціальна енергія пружної деформації, $U^{\text{доп}}(P)$ - доповнювальна потенціальна енергія, нерівність Юнга має вигляд

$$U(\Delta) + U^{\text{доп}}(P) \geq \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i.$$

Перша варіація від обох частин наведеного виразу дає

$$\delta \Pi^{\text{Л}}(\Delta) \geq 0, \qquad \Bigg| \qquad \delta \Pi^{\text{К}}(P) \leq 0,$$

$$\Pi^{\text{Л}}(\Delta) = U(\Delta) - \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i; \; \Pi^{\text{К}}(P) = -U^{\text{доп}}(P) + \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i.$$

Нехай за можливе переміщення прийняте таке, при якому система зберігає контакт з усіма своїми двосторонніми опорами і відокремлюється від однієї або декількох односторонніх опор. Оскільки реалізації цих останніх завжди направлені у бік можливого переміщення, то їх віртуальна робота на цих переміщеннях є завжди позитивна. Позначимо її A_R, тоді $A_R \geq 0$. Віртуальну роботу усіх інших зовнішніх сил позначимо A_P. Тоді умова рівноваги системи (принцип можливих переміщень) дає

$$A_R + A_P = 0 .$$

Звідси

$$A_P = -A_R \leq 0 .$$

Таким чином у випадках рівноваги системи, на тих можливих переміщеннях, при яких навантажена система відокремлюється від однієї, або декількох її односторонніх опор (за яких односторонні в'язі виключаються із роботи) сумарна віртуальна робота зовнішніх сил є від'ємною, або дорівнює нулеві.

$$A_P \leq 0 .$$

З урахування роботи внутрішніх сил, яка ототожнюється із потенціальною енергією системи, маємо такий вираз принципу можливих переміщень

$$U + A_P = 0 ,$$

але у випадку наявності односторонніх в'язей, як було доведено вище $A_P \leq 0$. Тоді $U \geq 0$. Якщо перейти до варіацій робіт, тобто робіт на нескінченно малих переміщеннях δw, отримаємо

$$\delta U \geq 0$$

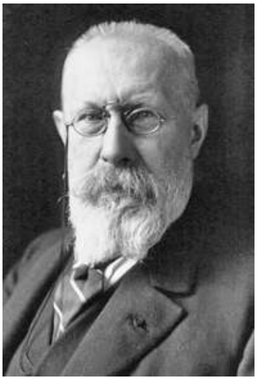
і відповідно

$$\delta A_P \leq 0 .$$

Строго кажучи, всі наведені результати є непересічними і в змістовному відношенні і у часі. Але хронологія аналогій може бути представлена так: Г. Лейбніц, у якого є згадка про теорему Ейлера і перетворення Лежандра; Ж.-Л. Лаґранж «Аналітична механіка» (1778); теорема Ейлера про однорядні функції (1779); опубліковане перетворення Лежандра (1787); теореми Лаґранжа і Кастільяно, нерівність Фур'є, М.В. Остроградський; теорема Клапейрона (опублікована Ламе у 1852 р.) і, нарешті, узагальнене поняття двоїстості за Юнгом, нерівність Юнга; нерівність Юнга-Фенхеля (Вернер Фенхель (1905-1988)). Питання теорії систем з односторонніми в'язями викладені у книзі І.М. Рабіновича [Рабинович, 1975].

Слід зазначити, що Ж.-Л. Лаґранж у своїй книзі «Аналітична механіка» (1788) вказав, що «Основна властивість рівноваги, яка полягає в тому, що будь-яка система сил, що знаходиться в рівновазі, продовжує залишатися в цьому стані, коли кожна з цих сил змінює напрям своєї дії на протилежний, - якщо тільки структура цієї системи не зазнає якої-небудь зміни унаслідок зміни напрямку дії всіх сил». Остання примітка доводить, що Ж.-Л. Лаґранж припускав наявність таких в'язей і необхідність їх урахування.

П. Аппелем дане таке визначення цьому поняттю: «якщо можливі переміщення, сумісні із в'язями, задані нерівностями, тоді в'язі називаються неутримуючими» (односторонніми, unilaterabes). Розглядається загальний випадок, коли в'язі між точками виражаються за допомогою h залежностей, з яких g рівностей і $h-g$ нерівностей. Ті з можливих переміщень системи, при яких ліві частини не тільки усіх рівнянь, а і нерівностей дорівнюють нулю, П. Аппель називає переміщеннями рівностей, інші – переміщеннями нерівностей. Доведена наступна теорема. Для рівноваги системи, яка знаходиться у стані, коли усі в'язі включені, необхідно і достатньо, щоб за усіх переміщень, сумісних із в'язями, сума робіт діючих сил дорівнювала нулю, або була від'ємною; нулем для переміщень рівностей, від'ємною для переміщень нерівностей. При цьому система навіть при включені усіх в'язей є геометрично змінюваною. Надалі будемо вважати, що ті в'язі, яким відповідають нерівності називаються односторонніми.


Поль Еміль Аппель,
фр. Paul Émile Appell
(1855 - 1930)

Поль Еміль Аппель (1855–1930) – французький математик і механік. Вивів звичайні диференціальні рівняння, що описують рух голономних і неголономних систем (найбільш загальні рівняння руху механічних систем), які мають назву рівнянь Аппеля. У 1833–1896 рр. виданий його «Трактат раціональної механіки».

11.6. Ступені вільності. А.Ф. Мебіус, П.Л. Чебишов, П.Й. Сомов, О.П. Малишев, Л.В. Ассур

Якщо розглядається механічна система твердих тіл, то принцип можливих переміщень, так само, як і рівняння рівноваги статики, дозволяє знаходити зовнішні силові впливи, що діють на механічну систему. Кількість рівнянь, складених виходячи з принципу можливих переміщень, дорівнює кількості ступенів вільності даної механічної системи.

У механіці, ступені вільності - це сукупність незалежних координат переміщення і/або обертання, які повністю визначають положення системи або тіла (а разом з їх похідними за часом - відповідними швидкостями - повністю визначають стан механічної системи або тіла - тобто їх положення і рух). Це фундаментальне поняття застосовується в теоретичній механіці, будівельній механіці, теорії механізмів і машин, машинобудуванні, авіації і теорії літальних апаратів, робототехніці та інших областях.

Треба зазначити, що декілька теорем, які мають фундаментальне значення у статиці шарнірно-стержневих систем (ферм), було сформульовано А.Ф. Мебіусом, професором астрономії Лейпцігського університету. У своєму підручнику статики [Möbius, 1837, т.2, гл.4,5] він розглядає задачу рівноваги системи стержнів, з'єднаних між собою шарнірами, і показує, що якщо загальне число шарнірів в такій системі дорівнює n, то для отримання із з'єднуючих ці шарніри стержнів жорсткої незмінної системи потрібно мати не менше $2n–3$ стержнів для плоскої системи і не менше $3n–6$ стержнів у разі просторової системи. При цьому А.Ф. Мебіус вказує і на можливість виняткових випадків, коли система з $2n–3$ стержнями може виявитися не абсолютно жорсткою, допускаючи можливість малих відносних переміщень шарнірів. Досліджуючи подібні виняткові випадки, він знаходить, що детермінант системи рівнянь рівноваги для вузлів таких ферм перетворюється на нуль.

Але, на жаль, важлива робота А.Ф. Мебіуса залишалася невідомою протягом багатьох років, і тільки коли практика освоїла використання сталевих ферм і коли в зв'язку з цим виникла потреба у вдосконаленні їхньої загальної теорії, інженери знову відкрили теореми А.Ф. Мебіуса. У цьому повторному відкритті видатна роль належить Отто Мору [Mohr, 1874, стор. 509; 1885, стор. 289; 1905, гл. XII]. Він встановив вимогу, щодо кількості стержнів, необхідних для того, щоб утворити жорстку статично визначувану систему, дослідивши при цьому також і винятковий випадок нескінченно малої рухливості. Він довів, що існують статично визначувані ферми, які не піддаються розрахунку раніше розробленими методами, і запропонував для вирішення таких систем користуватися методом можливих переміщень.


А́вгуст Ферді́нанд Мебіус,
нім. August Ferdinand Möbius
(1790 — 1868)

Дещо інший варіант застосування методу можливих переміщень був запропонований Мюллером-Бреслау [Mu1ler-Вгes1au, 1887, т. 9, стор. 121].

Слід зазначити, що начала загальної теорії просторових систем також були закладені А.Ф. Мебіусом. Зокрема, він показав, що для з'єднання в жорстку геометрично незмінну систему n шарнірів необхідно $3n$-6 стержнів, зазначивши, що і тут можуть мати місце виняткові випадки нескінченно малої рухливості і вони характеризуються оберненням на нуль детермінанта системи рівнянь рівноваги для всіх вузлів. Він вказав корисний практичний прийом вирішення питання про те, чи є дана система жорсткою чи ні - якщо для будь-якого завантаження ми можемо знайти зусилля в усіх елементах системи, не приходячи до невизначеностей, то згаданий детермінант є відмінним від нуля і система незмінювана. В якості найпростішого припущення А.Ф. Мебіус допускає завантаженість нульовими силами, і якщо при цьому в жодному із стержнів зусилля не відмінне від нуля, то система жорстка.

Цікаво, що поряд із просторовими системами до кола наукових інтересів Мебіуса входила топологія. В 1840 р. він сформульовав теорему «про чотири фарби», в якій стверджується, що на сфері досить чотирьох фарб для правильної розмальовки будь-якої можливої географічної карти (тобто такої розмальовки, при якій будь-які дві країни із загальним кордоном не зафарбовані в один колір). Мебіус висловив цю теорему без доведення, доказ було опубліковано Кемпе в 1879 р. Воно було визнано достатнім видатними математиками того часу, і теорема Мебіуса вважалася строго доведеною більше десяти років, поки в 1890 р. Хівудом не була виявлена помилковість доказів Кемпе. Відтак, незважаючи на численні і наполегливі спроби багатьох математиків, доведення не вдавалося побудувати аж до 70-х років XX ст., коли до його пошуку були задіяні швидкісні цифрові обчислювальні машини. Знайдене за їх допомогою доведення (на цей раз, начебто, остаточне) було опубліковано в 1976 р.

На цей раз «уявний експеримент» - математичне доведення - було настільки складним, що необхідною виявилася допомога обчислювальних машин. Теорема про «чотири фарби» стала першою, але, безумовно, не останньою важливою теоремою, доведеною вже не тільки людиною, але і машиною, а точніше - людиною, яка вдалася до допомоги обчислювальної техніки.

Більш ніж десятирічна історія існування опублікованого і добре відомого, але, тим не менш, помилкового доведення Кемпе підкреслює труднощі розрізнення правильного і помилкового доведень.

А.Ф. Мебіус досліджував дуже важливу задачу про самоурівноважену просторову стержневу систему [Möbius, 1837, т.2, стор. 122] у вигляді замкнутого багатогранника і показав, що якщо плоскі грані такого багатогогранника є трикутниками або складені з трикутників, то число стержнів в ній в точності дорівнює числу рівнянь статики і така система є статично визначуваною. На рис. 11.17 наведено приклади таких систем.

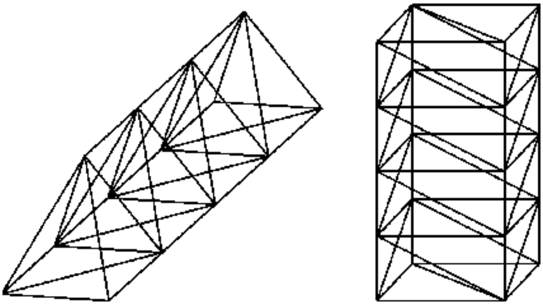


Рис. 11.17

Роботи А.Ф. Мебіуса з просторових систем залишилися невідомими інженерам, і вони згодом розробили теорію такого виду ферм незалежно від Мебіуса. Це було виконано головним чином А. Феплем, який об'єднав свої дослідження з цього питання у виданій ним книзі [Föppl, 1892]. В цій книзі ми вперше зустрічаємося з розробкою деяких важливих питань щодо просторових систем. Книга Феппля стала серйозним внеском і основою для багатьох наступних праць у цій галузі.

Початок теорії структури плоских механізмів поклав П.Л. Чебишов. У роботі «Про параллелограмми» [Чебишев, 1870] він для важільних механізмів з обертовими кінематичними парами і одним ступенем свободи вивів структурну формулу (нині відому як «формула Чебишова» [Чебишев, 1948]) - тотожність, яку повинен задовольняти кожен такий механізм:

$$3m - 2(n + v) = 1,$$

де m – число рухомих ланок, n і v – числа відповідно рухомих і нерухомих шарнірів. Через 14 років ця формула була перевідкрита німецьким механіком М. Грюблером

[Тюлина, 1979]. У 1887 році учень Чебишова П.Й. Сомов отримав аналогічну структурну формулу для просторових механізмів [История механики в России, 1987].

Під числом ступенів вільності кінематичного ланцюга в даному випадку мається на увазі число ступенів вільності рухомих ланок відносно стійки (ланки, прийнятої за нерухому). Разом с тим і сама стійка в реальному просторі може переміщатися.

Однак, незалежно від того рухається машина чи ні, характер руху ланок поршневого двигуна щодо стійки залишається незмінним.

Введемо наступні позначення:

k – число ланок кінематичного ланцюга,

p_1 – число кінематичних пар першого класу в даному колі,

p_2 – число пар другого класу,

p_3 – число пар третього класу,

p_4 – число пар четвертого клас,у

p_5 – число пар п'ятого класу.

Загальна кількість ступенів вільності k вільних ланок, розміщених в просторі, дорівнює $6k$. У кінематичному ланцюзі вони з'єднуються в кінематичні пари (тобто на їх відносний рух накладаються в'язі).

Крім того, в якості механізму використовується кінематичний ланцюг, що має стійку (ланку, прийняту в якості нерухомої). Тому число ступенів вільності кінематичного ланцюга буде дорівнювати загальній кількості ступенів вільності всіх ланок за винятком в'язей, що накладаються на їх відносний рух:

$$W = 6k - \Sigma S_i.$$

Число в'язей, що накладаються усіма парами I класу, дорівнює їх числу, тому що кожна пара першого класу накладає одну в'язь на відносний рух ланок, з'єднаних в таку пару; число в'язей, що накладаються усіма парами II класу, дорівнює їх подвоєній кількості (кожна пара другого класу накладає дві в'язі) тощо.

У ланки, прийнятій за нерухому, віднімаються всі шість ступенів вільності (на стійку накладається шість в'язей). Таким чином:

$$S_1=p_1,\ S_2=2p_2,\ \mathrm{S}_3=3p_3,\ S_4=4p_4,\ S_5=5p_5,\ S_{стійки}=6,$$

а сума всіх в'язей

$$\sum S_i=p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5+6.$$

В результаті отримуємо наступну формулу для визначення числа ступенів вільності просторового кінематичного ланцюга:

$$W = 6k - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 - 6.$$

Згрупувавши перший і останній члени рівняння, отримаємо:

$$W = (6k - 1) - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5,$$

або остаточно:

$$W = 6n - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5,$$

де n - число рухомих ланок кінематичного ланцюга.

Дане рівняння називається структурною формулою кінематичного ланцюга загального вигляду.

Формула була отримана вперше (в дещо іншому вигляді) П.Й. Сомовим в 1887 р. і розвинена О.П. Малишевим в 1923 р. Тому її часто називають формулою

Сомова-Малишева. У деяких підручниках її називають формулою Малишева – за авторством остаточного варіанту.

Значний внесок в теорію машин і механізмів зробив А.Г. Гагарін, автор відомого «преса Гагаріна», що застосовується в механічних лабораторіях для випробування міцності матеріалів.

Коротка його біографія поміщена в «Біографічному словнику діячів природознавства і техніки». У ньому зазначено, що Гагарін закінчив в 1878 р. Петербурзький університет, потім Михайлівську артилерійську академію, після чого працював в Петербурзькому арсеналі, потім на гарматному заводі. Був засновником Російського товариства випробування матеріалів, виступав з доповідями на міжнародних конгресах, нагороджений на Нижегородській виставці 1896 року золотою медаллю за свій прес. Брав діяльну участь у створенні Петербурзького політехнічного інституту і був його першим директором (1902-1907 рр.). Про причини його відходу з цієї посади не сказано нічого. Тим часом ця подія становить суспільний інтерес.

Гагарін мав княжий титул, належав до тодішньої вищої аристократії. У 1907 р. охоронне відділення царської поліції справило раптовий обшук в приміщеннях гуртожитку Петербурзького політехнічного інституту і виявило там склад бомб. З пояснень поліції випливало, що склад був влаштований партією соціалістів-революціонерів. Директор політехнічного інституту необережно висловив думку про те, що склад організований самим охоронним відділенням. Це висловлювання обійшло тодішні газети і викликало переполох в оточенні Миколи II. Гагарін був негайно звільнений царем з його поста (в архівах збереглася особиста гнівна резолюція Миколи II).

Як згадував у своїх спогадах І.М. Рабінович: «А.Г. Гагарін користувався великою повагою як інженер і як людина. У 1919 р. він був запрошений на роботу в Науково-експериментальний інститут НТК НКПС. Ініціатива його запрошення належала П.А. Веліхову. Гагаріну було тоді 64 роки. Коли я як співробітник цього інституту побачив його там вперше, він справив на мене враження хворобливого старого, сивого, втомленого, але з доброю, хорошою вдачею. Він ходив у поношеній військовій шинелі. Я не бачив його без шинелі і не знаю, в якому костюмі він був, але, ймовірно, костюм гармоніював з шинеллю. Від колишньої елегантності не залишилося, мабуть, нічого. Я не знав, як він влаштувався після переїзду з Петербурга, чи був він самотнім або жив з сім'єю. Ці питання мимоволі виникали при зустрічі з ним.

У тих розмовах, які ми з ним вели під час наших двох-трьох зустрічей, політичні питання жодного разу не порушувалися. Можу тільки сказати, що ніяких недружніх зауважень на адресу революції я від нього не чув, він не справляв враження озлобленої людини. Гагарін був талановитим винахідником і вченим, глибоко зацікавленим і захопленим своєю творчою роботою, і це захоплення стало чудовими ліками, дивовижним антибіотиком проти перебільшення оцінки життєвих негараздів і втрат.

Зайнявшись в Науково-дослідному інституті розробкою нової, запропонованої ним системи прогонових конструкцій мостів, він натрапив на непереборні теоретичні проблеми, пов'язані з кінематикою цієї системи. Колеги по інституту вказали йому, що серед співробітників є інженер, який добре знає кінематику механізмів, і направили його до мене. Так почалося наше знайомство.

Хоча я завершив навчання з курсу Московського вищого технічного училища порівняно недавно, кінематикою механізмів я займався давно. Я перечитав і непогано засвоїв велику кількість російської, німецької і французької літератури. На час зустрічі з Гагаріним я, правда, вже відійшов від цієї тематики і переключився на будівельну механіку, але не втратив ще інтересу і до кінематики. Згодом я знову повернувся до кінематики, але вже в зв'язку з розрахунком будівельних конструкцій і в 1928 р. опублікував книгу «Кінематичний метод в будівельній механіці».

Розмова з Гагаріним торкалась двох тем, які цікавили нас обох. Хоча ці питання представляють прямий інтерес тільки для фахівців, історія їх розробки містить в собі також елементи загальнолюдського характеру.

Перша тема була викликана до життя ще в минулому столітті потребами раціонального проектування паророзподільного (кулісного) механізму парових машин. Потрібно було створити такий плоский шарнірний механізм, в якому одна з точок описувала б строго прямолінійну траєкторію. Це був, мабуть, перший приклад задачі на синтез кінематичного ланцюга з наперед заданими умовами. Проста на вигляд задача про точний спрямовуючий механізм виявилася надзвичайно важкою. Протягом десятиліть жоден інженер або математик не міг її здолати. Видатний математик, професор Петербурзького університету, академік П.Л. Чебишов (1821-1894) теж не знайшов розв’язку цієї задачі. З психологічної точки зору цей факт дивний, так як згодом виявилося, що точний розв’язок є надзвичайно простим, набагато простішим за будь-який наближений. Разом з тим Чебишов переконливо довів і на цьому прикладі, що він - видатний математик: на шляху до чисто аналітичного наближеного розв’язку він зробив чудове математичне відкриття, що залишило слід в історії математики, - створив так звану теорію функцій, які найменш ухиляються від нуля (1854). За допомогою цих функцій йому вдалося підібрати такі розміри ланок найпростішого механізму, при яких деяка точка описує траєкторію «з довгим перегином», тобто таку, що складається з трьох ділянок: опуклої, увігнутої і довгої перехідної між ними, майже прямолінійної ділянки. Якщо амплітуда переміщень обмежена умовою, щоб рух точки не виходив за межі середньої ділянки *AB*, і якщо крива *AB* майже прямолінійна, то таке наближене рішення може вважатися з практичної точки зору задовільним.

Точне рішення прийшло несподівано. Воно було дано одночасно французьким військовим інженером Посельє і російським студентом Петербурзького технологічного інституту Лібкіним. Обидва рішення повністю збігалися. Чебишов високо оцінив це рішення і навіть спеціально виклопотав для Лібкіна стипендію.

Поселье і Лібкін запропонували направляючий механізм у формі 7-ланкового шарнірного кінематичного ланцюга, показаного на рисунку. Вони довели, що при деякому цілком певному співвідношенні довжин стержнів траєкторія точки А являє собою точно пряму лінію. Цей механізм отримав назву інверсора Лібкіна-Поселье. Він викликав свого часу великий інтерес математиків і механіків. В одній французькій статті я прочитав про наступний цікавий факт. Незабаром після того, як названі автори винайшли інверсор, і він ще не отримав широкої популярності, на одному міжнародному математичному конгресі хтось поставив Чебишову питання, чи не знає він доведення неможливості вирішення задачі про створення точного направляючого шарнірного механізму. На що Чебишов відповів, що не тільки не знає, але, навпаки, має доказ можливості. При цьому він вийняв з портфеля привезену ним модель інверсора. Присутній на конгресі знаменитий англійський вчений лорд Кельвін взяв в руки цю модель і довго не випускав її; коли ж Чебишов захотів забрати її, Кельвін благав, щоб Чебишов дав йому ще трохи продовжити задоволення, яке він отримав від цієї «чудової штучки».

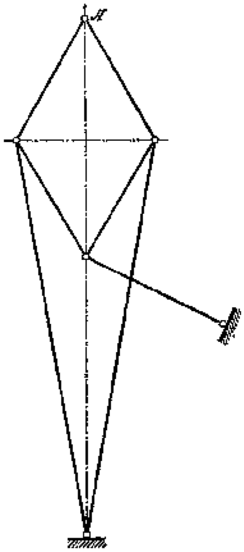


Схема інверсора Лібкіна-Поселье

Все це я добре знав до зустрічі з Гагаріним; не знав тільки, що Гагарін теж є автором одного з рішень цієї кінематичної задачі. З розмови з ним я дізнався, що він дав значно повніше, по суті - точне, рішення: йому вдалося створити такий шарнірний механізм, в якому не одна тільки точка рухається прямолінійно, а ціла ланка усіма своїми точками переміщується в площині уздовж своєї прямолінійної осі.

Отримавши цей чудовий результат, Гагарін звернувся до академіка Чебишова, який одночасно був членом Паризької академії наук, з проханням рекомендувати повідомлення Гагаріна до опублікування в «Працях» цієї академії. Чебишов, однак, відмовився, і Гагарін змушений був звернутися до одного з французьких академіків. За рекомендацією останнього повідомлення Гагаріна було опубліковано в «Працях» цієї академії («Comptes rendus de l'academy des sciences», 1881, LCIII, p. 111). Я познайомився з цим випуском значно пізніше, коли отримав можливість користуватися багатим фондом бібліотеки Військово-інженерної академії ім. В.В. Куйбишева. У 1953 р. я опублікував в «Известиях АН СССР» статтю «О шарнирных механизмах Гагарина». Надалі питання про інверсори і про інші шарнірні механізми для побудови заданих кривих було предметом досліджень ряду авторів, наприклад І.І. Артоболевського («Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых». М., 1959)».

Як наука теорія механізмів і машин (ТММ) почала формуватися в кінці XVIII - початку XIX ст. під назвою «Прикладна механіка».

Однак машини існували задовго до цієї дати. Тому в історії розвитку ТММ можна умовно виділити чотири періоди:

1-й період до початку XIX ст. - період емпіричного машинобудування протягом якого винайдена велика кількість простих машин і механізмів: підйомники, млини, каменедробарки, ткацькі і токарні верстати, парові машини (Леонардо да Вінчі, Вейст, Ползунов, Уатт). Одночасно закладаються і основи теорії: теорема про зміну кінетичної енергії і механічної роботи, «золоте правило механіки», закони тертя, поняття про передатне відношення, основи геометричної теорії циклоїдального і евольвентного зачеплення (Карно, Кулон, Амонтон, Кардано, Ремер, Ейлер).

2-й період від початку до середини XIX ст. - період початку розвитку (ТММ). У цей час розробляються такі розділи як кінематична геометрія механізмів (Саварі, Шаль, Олів'є), кінетостатіка (Коріоліс), розрахунок маховика (Понселе), класифікація механізмів за функцією перетворення руху (Монж, Лану) та інші розділи. Написано перші наукові монографії з механіки машин (Вілліс, Бориньї), прочитано перші курси лекцій по ТММ і видано перші підручники (Бетанкур, Чижов, Вейсбах).

3-й період від другої половини XIX століття до початку XX ст. - період фундаментального розвитку ТММ. За цей період розроблені: основи структурної теорії (Чебишов, Грюблер, Сомов, Малишев), основи теорії регулювання машин (Вишнеградський), основи теорії гідродинамічного мастила (Грюблер), основи аналітичної теорії зачеплення (Олів'є, Гохман), основи графоаналітичної динаміки (Віттенбауер, Мерцалов), структурна класифікація та структурний аналіз (Ассур), метод планів швидкостей і прискорень (Мор, Манке), правило прокручування механізму (Грасгоф) і багато інших розділів ТММ.

Пафнутій Львович
Чебишов,
рос. Пафнутий
Львович Чебышёв
(1821 – 1894)

Павло Йосипович
Сомов,
рос. Павел Осипович
Сомов
(1852 – 1919)

Олександр Петрович
Малишев,
рос. Александр
Петрович Малышев
(1879 – 1962)

Леонід
Володи́мирович Ассу́р,
рос. Леони́д
Влади́мирович Ассу́р
(1878 — 1920)

Знаменитий російський вчений, математик і механік, академік П.Л. Чебишов (1821-1894) опублікував ряд робіт по структурі і синтезу важільних механізмів. Використовуючи розроблені ним методи, він винайшов і спроектував понад 40 нових механізмів, які здійснюють задані траєкторії руху, зупинку ланок при русі інших і т.д. Його по праву вважають засновником російської школи теорії механізмів і машин, а структурна формула плоских важільних механізмів називається формулою Чебишова.

Структурна група Ассура (також просто група Ассура) - це такий найкоротший кінематичний ланцюг, утворений нижчими парами п'ятого класу, при приєднанні якого до будь-якого плоского механізму ступінь його рухливості не змінюється.

Група названа ім'ям Л.В. Ассура, який і розробив методику їх утворення на початку XX ст. [Ассур, 1913-1914].

Групи Ассура діляться на класи, види і порядки.

- Клас групи Ассура визначається класом найвищого контуру, що входить в неї.
- Вид групи Ассура визначається поєднанням обертальних (шарнірів) і поступальних (повзунів) кінематичних пар в даній групі.
- Порядок групи Ассура визначається за кількістю кінематичних пар, якими вона кріпиться до механізму.

Структурна група з $n = 2$ і $p = 3$ називається двохповодковою групою.

4-й період від початку XX ст. до теперішнього часу - період інтенсивного розвитку всіх напрямків ТММ.

11.7. Перші варіаційні принципи. Ферма, «Начала» Ньютона, Лейбніц

> *Природа діє найбільш легкими і доступними шляхами, і аж ніяк не більш короткими.*
>
> П. Ферма

> *Не треба сприймати у природі інших причин зверх тих, які істинні і достатні для пояснення явищ. З цього приводу філософи стверджують, що природа нічого не робить зайво, і було б зайвим здійснювати більшим те, що може бути зроблено меншим. Природа проста і не шикує зайвими причинами речей.*
>
> І. Ньютон

> *Згідно Лейбніцу наш світ є найкращим з усіх можливих світів, і тому його закони можна описати екстремальними принципами.*
>
> К. Зігель

Мабуть, перше чітке формулювання варіаційного принципу стосовно фізичної проблеми надане у 1662 р. французьким математиком П’єром Ферма. Це був принцип найкоротшого часу або «принцип Ферма».

П'єр Ферма,
фр. Pierre de Fermat
(1601 — 1665)

Відомо, що закон переломлення світла був встановлений Віллебрордом Снеллом (друкувався під латинизованим ім'ям Снелліуса) і Р. Декартом. При цьому Р. Декарт зробив ряд припущень, з яких найменш обґрунтованим було твердження, що швидкість світла у більш щільному середовищі більша, ніж у менш щільному. Проти цього виступив англійський філософ Гоббс, а у 1662 р. – П. Ферма.

П. Ферма поклав в основу дослідження закону переломлення світла принцип найкоротшого часу. У роботі «Synthesis ad Refractiones» («Синтез переломлення») [Fermat, 1891, стор. 173-179][1] він вивів закон переломлення світла геометричним шляхом, виходячи із зазначеного принципу. За думкою П. Ферма - «Природа діє найбільш легкими і доступними шляхами, і аж ніяк не більш короткими», як думає багато хто. Конкретизуючи цю ідею він говорить: «Подібно до Галілея, який, розглядаючи рух важких тіл у природі, вимірював відношення цього руху не стільки відстанню, скільки часом, ми також розглядаємо не стільки найкоротші відстані або лінії, а ті, які можуть бути пройдені легше, зручніше і за менший проміжок часу».

Як відомо, принцип Ферма є найбільш загальною математичною формою законів геометричної оптики.

По суті Ферма показав, що закон переломлення Снелліуса задовольняє гіпотезу про те, що час, взятий для траєкторії сусідньої з дійсною, відрізняється від часу проходження цієї останньої на величину другого порядку малості. У доведенні Ферма по суті фігурує твердження про те, що варіація (ми говоримо тут про варіацію, хоча загальне поняття варіації функціоналу було введено майже на сто років пізніше Ж.-Л. Лаґранжем) деякого визначеного інтегралу, взятого уздовж деякої траєкторії променя, дорівнює нулю. Ця умова необхідна, але недостатня для того, щоб час був мінімальним. У простому випадку, розглянутому Ферма, умова мінімальності і варіаційна умова співпадають, але в більш складних випадках це не має місця.

Принцип Ферма привів не тільки до експериментально вивченого факту, але також і до нового результату, що коефіцієнт переломлення дорівнює відношенню швидкостей світла у двох середовищах. Ферма хотів довести, що його точка зору про те, що світло розповсюджується повільніше у більш щільному середовищі відповідає дійсності, в той же час як Р. Декарт захищав протилежну точку зору. У

---

[1] Переклад цієї роботи російською, виконаний Ю.Х. Копелевич, під назвою «Синтез для рефракции» міститься в книзі «Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки» під редакцією *Л.С. Полака*. – М.: Физматгиз, 1959.

всякому випадку принцип найменшого часу виведений a priori, а не індуктивним шляхом.

Слід сказати, що вже давньогрецький математик і механік Герон Олександрійський в творі під назвою «Катоптрика» (наука про дзеркала) обґрунтував закон прямолінійності поширення світла та навів доведення закону про відбивання світла (падаючий і відбитий промені лежать в одній площині з перпендикуляром, проведеним до відбиваючої поверхні в точці падіння, причому кут падіння дорівнює куту відбивання). Ці твердження були узагальненням наочного досвіду, який показує, що коли світло розповсюджується в однорідному середовищі від одної точки до іншої, його шлях є прямолінійним, тобто світло долає найменшу відстань. Наприклад, прямолінійний відрізок ADB_1 є коротшим, за будь-яку ламану $AD'B_1$ (рис. 11.18). Тому при відбитті променю довжина ламаної ADB (точка B є симетричною до точки B1 відносно лінії відбивання l) дорівнює довжині прямолінійного відрізку ADB_1 і менша за довжину будь-якої ламаної $AD'B$, оскільки $DB = DB_1$, $D'B = D'B_1$. При цьому кути α і β дорівнюють один одному. Принцип найкоротшого шляху, відкритий Героном, справедливий тільки для однорідних середовищ і може розглядатись як окремий частинний варіант принципу Ферма.

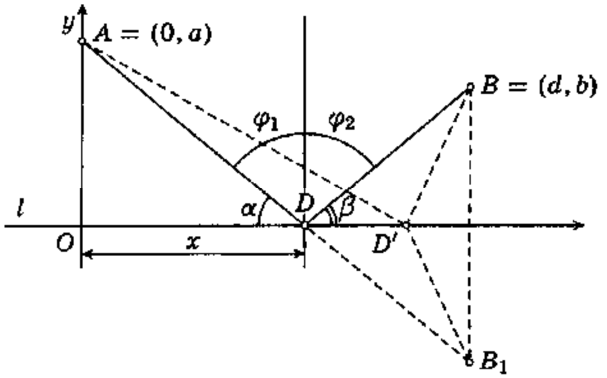


Рис. 11.18

Мовою варіаційного числення задача про розповсюдження променя світла в неоднорідному середовищі формулюється наступним чином: знайти функцію $y(x)$ таку, що

$$\int_0^a \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x \to \min;\ y(0)=0, y(a)=b, \tag{11.56}$$

де $v(x,y)$ - швидкість світла в точці (x,y).

Звісно, експерименти, які ставив Снелліус, не дозволяли безпосередньо сформулювати принцип найкоротшого часу. Йому «лише» вдалося встановити, що відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величиною сталою для двох даних середовищ, тобто (рис. 11.19)

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}. \tag{11.57}$$

Для пояснення закону заломлення світла Ферма висунув екстремальний принцип для оптичних явищ. Згодом він був названий його ім'ям. Принцип Ферма говорить: в неоднорідному середовищі світло обирає таку траєкторію, уздовж якої час, що витрачається їм на подолання шляху від однієї точки до іншої, є мінімальним.

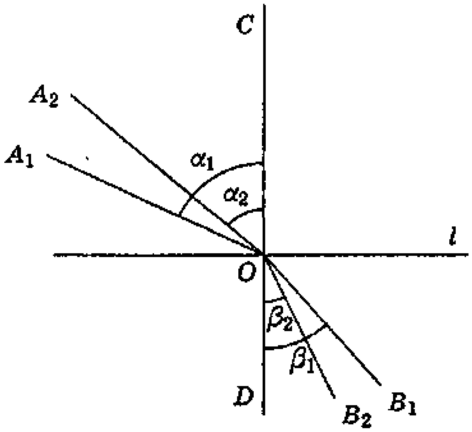


Рис. 11.19

Принцип Ферма дозволяє точно поставити і розв’язати задачу про пошук мінімуму, що приводить до закону Снелліуса. А саме, цей принцип призводить до необхідності знайти мінімум функції однієї змінної (рис. 11.20):

$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}, \qquad (11.58)$$

де т. A (0, a) – джерело, яке знаходиться в середовищі із швидкістю світла v_1, а т. B (d, –b) – точка спостереження, що знаходиться в іншому середовищі, в якому швидкість поширення світла дорівнює v_2.

Для знаходження значення $\hat{x}$ змінної x, за якого $f(x)$ має найменше значення, треба лише обчислити похідну $f'(x)$ і прирівняти її нулю:

$$f'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{(d-x)}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}=0,$$

або

$$\frac{\hat{x}}{v_1\sqrt{a^2+\hat{x}^2}}=\frac{(d-\hat{x})}{v_2\sqrt{b^2+(d-\hat{x})^2}}. \qquad (11.59)$$

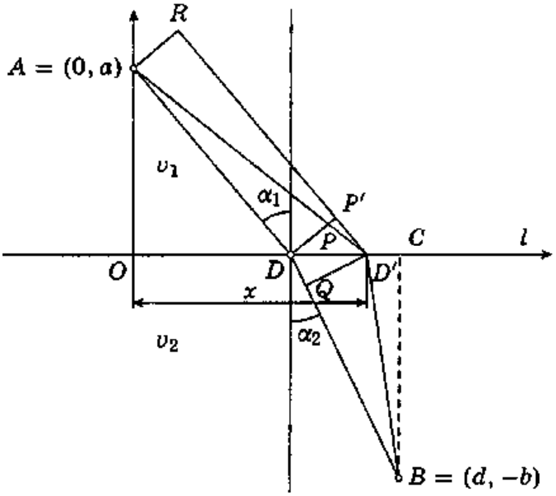


Рис. 11.20

Оскільки згідно рис. 11.20

$$\frac{\hat{x}}{\sqrt{a^2+\hat{x}^2}}=\sin\alpha_1, \quad \frac{(d-\hat{x})}{\sqrt{b^2+(d-\hat{x})^2}}=\sin\alpha_2,$$

то

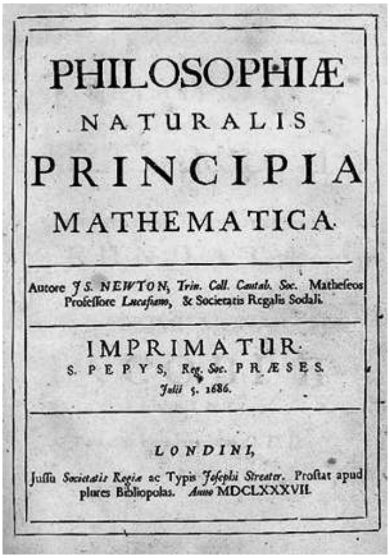
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}=\text{const}. \qquad (11.60)$$

Треба сказати, що коли Ферма висунув свій екстремальний принцип (а це сталося близько 1660 р.), він уже володів алгоритмом знаходження максимумів і мінімумів функцій, який базується на прирівнюванні нулю похідної, але потрібний результат він отримав набагато складнішим шляхом. Річ у тім, що Ферма міг застосовувати свій прийом тільки для поліномів, а диференціювати радикали він не вмів.

Перше справжнє обґрунтування принципу П. Ферма дав Х. Гюйгенс [Гюйгенс, 1935], який на основі своєї «хвильової теорії» довів, що коефіцієнт переломлення на границі двох середовищ дорівнює відношенню швидкостей світла у цих середовищах. Доведення Х. Гюйгенса показує, що час, який необхідний світлу, щоб пройти відстань між двома точками, дійсно є мінімальним.

До речі, цікаво, що Х. Гюйгенс у 1657 р. запатентував перший маятниковий годинник.

Таким чином принцип найкоротшого часу був сформульований у геометричній оптиці. Відразу і закономірно виникла проблема пошуку аналогічних задач про мінімальне значення часу у механіці. Задачею такого роду була задача, наведена Ісааком Ньютоном (1643-1727) у його «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математичні начала натуральної філософії», скорочено «Начала») [Ньютон, 1936, стор. 426-427], розв’язання якої він навів без зазначення методу, за яким він був знайдений: яку форму слід надати твердому тілу обертання, що рухається вздовж осі, для того, щоб опір, який воно сприймає, був мінімальним. «Начала» вийшли в світ у 1687 р.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Титульний аркуш «Начал» Ньютона

Незважаючи на те, що підхід І. Ньютона неминуче привів до тієї механіки, яку ми знаємо сьогодні, Л. Ейлеру, який був провідним фізиком-теоретиком XVIII ст., знадобилась більша частина життя на те, щоб усвідомити і розвинути поняття І. Ньютона, доповнити їх не менш важливими новими ідеями і продемонструвати, як можна розв’язувати реальні задачі.

У 1788 р., якраз через сто років після «Начал», з’явилася «Аналітична механіка» Ж.-Л. Лаґранжа, дещо менш знаменита. У загальних рисах вона полум’яно описана в будь-якому популярному дослідженні про історію науки, де наводяться слова В.Р. Гамільтона про те, що вона є «свого роду наукової поемою».

Слід зазначити, що для задачі геометричної оптики величина, яка повинна досягати мінімуму у конкретних явищах, надзвичайно доступна і не потребує подальших досліджень. Це – час. У механіці ж зовсім не очевидно, яка величина у процесі руху повинна мати мінімум або максимум. Для поглядів учених-механіків

XVII ст. характерним є уявлення про те, що природа завжди діє найпростішим способом. Перше правило міркувань у фізиці Ньютона: «Не треба приймати в природі інших причин понад ті, які істинні і достатні для пояснення явищ. З цього приводу філософи стверджують, що природа нічого не робить даремно, і було б зайвим здійснювати більшим те, що може бути зроблено меншим. Природа проста і не розкошує зайвими причинами речей» [Ньютон, 1936]. З цього приводу спадає на думку вираз Антуана де Сент-Екзюпері: «Мабуть, досконалість досягається не тоді, коли уже нічого не можна додати, а коли вже нічого не можна відняти».

Сер Ісаак Ньютон, англ. Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

Готфрід Вільгельм Лейбніц, нім. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Г. Лейбніцем була сформульована цікава гіпотеза: «все можливе прагне до існування». Із зіткнення всіх можливостей здійснюється «той ряд речей, який містить найбільший ряд можливостей». Цей ряд такий же єдиний і певний, як серед ліній пряма, серед кутів прямий, серед фігур найбільш містка, а саме коло або куля. Г. Лейбніц постулював принцип найбільшої кількості існування, що пояснює, чому якщо потрібно пройти від однієї точки до іншої, коли напрям лінії не визначений, то вибирається найлегший і найкоротший шлях: якщо від можливості слід перейти до дійсності, то кількість існування має бути «якнайможливіше великою при даному можливому порядку існування» [Лейбниц, 1982].

11.8. Принцип найменшої дії

Пошуки існування екстремальних принципів в природі і техніці сягають глибокої давнини. Вчені керувались не тільки науковими спостереженнями, але часто їх висновки були засновані на метафізичних аргументах. На рис. 11.21 показані найголовніші вчені, які брали участь в розробці екстремальних принципів в механіці. Нижче буде розглянута протирічива діяльність в 1744-46 рр. П'єра Луї Моро де Мопертюї, пов'язана з принципом найменшої дії.

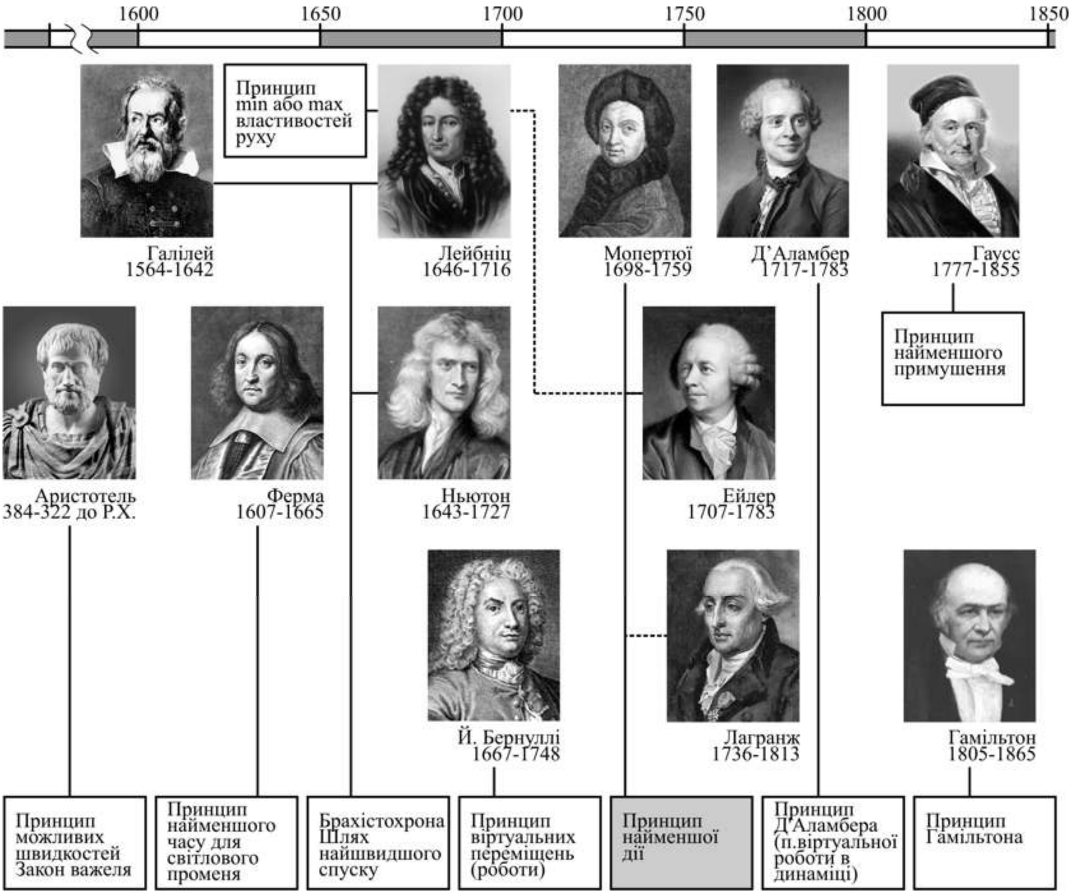


Рис. 11.21. Еволюція екстремальних принципів

11.8.1. Принцип Мопертюї

> *Після такої кількості значних людей, які працювали над цією темою, я ледь наважуюсь проголосити, що виявив універсальний принцип, на якому всі ці закони засновані. ... Це принцип найменшої кількості дії, принцип такий мудрий, такий гідний Вищої Істоти. Цьому принципу Природа, здається, постійно і невідступно слідує; вона дотримується його не тільки у всіх своїх змінах, але і в кожному постійному явищі.*
>
> П. Мопертюї

Полеміка, пов'язана із принципом найменшої дії, являє собою одну з самих запеклих наукових суперечок. Головними дійовими особами (рис. 11.22) були

Мопертюї і Ейлер з одного боку і Кеніг та Вольтер з іншого. Лейбніц також відіграв певну роль в цій суперечці, як, доречі, і Фрідріх Великий, король Пруссії.

Рис. 11.22. Головні герої дискусії

Французький математик П'єр-Луї Моро де Мопертюї знаходився під сильним впливом роботи Ньютона. Вже в листах до французької Академії наук в 1741 і 1744 роках він згадував принцип мінімуму величини, яку він назвав дією. Після того, як він став на запрошення короля Фрідріха Великого в 1746 р. президентом прусської Академії Наук в Берліні, Мопертюї представив книгу «Les Loix du Mouvement et du Repos déduites d'un Principe Metaphysique» (Закони руху і спокою, виведені з метафізичного принципу) [Maupertuis, 1746,1748], див рис. 11.24, ліворуч. У вступі він посилається на свої попередні роботи, про які він доповів в 1744 році на Зборах Паризької академії наук і зауважує: «В кінці того ж року, професор Ейлер опублікував свою чудову книгу «Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes»» (Метод знаходження кривих ліній, які мають властивості максимуму або мінімуму), [Euler, 1744], рис. 11.23. Зі слів Мопертюї стає зрозумілим, що він згоден із Ейлером, щодо того, що властивості руху можуть мати як мінімальний, так і максимальний характер, проте він обмежив свої подальші міркування тільки принципом мінімуму.

У своїх «Les Loix ...» Мопертюї спершу піддав критиці звичайні докази існування Бога і послався на фундаментальні закони природи. При цьому він робив такі доволі гучні заяви: «Після такої кількості значних людей, які працювали над цією темою, я ледь наважуюсь проголосити, що виявив універсальний принцип, на якому всі ці закони засновані. … Це принцип найменшої кількості дії, принцип такий мудрий, такий гідний Вищої Істоти. Цьому принципу Природа, здається, постійно і невідступно слідує; вона дотримується його не тільки у всіх своїх змінах, але і в кожному постійному явищі».

П'єр-Луї Моро де Мопертюї,
фр. Pierre-Louis Moreau de Maupertuis
(1698-1759)

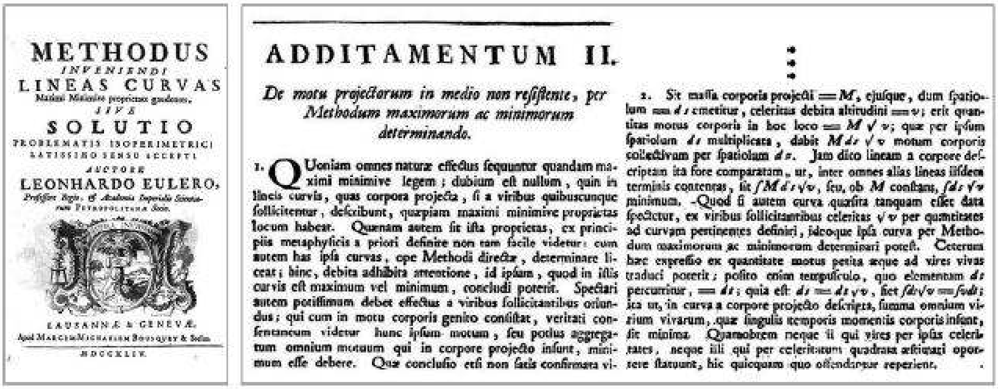
Нарешті, він виголошує загальний принцип наступним чином (рис. 11.24, праворуч): «Коли в Природі відбувається деяка зміна, Кількість Дії, необхідної для цієї зміни, є якомога меншою», і дає визначення «Кількість Дії є добутком маси Тіла, його швидкості і відстані, яку воно проходить. Коли Тіло переноситься з одного місця на інше, Дія є тим більшою, чим більшою є Маса тіла, його швидкості і відстань, яку воно проходить». Математичний вираз дії A має вигляд

$$A \sim M \cdot v \cdot \mathrm{d}s\,,$$

де M - маса частинки, v - швидкість і $\mathrm{d}s$ - відстань. Співвідношення між дією і кінетичною енергією стає очевидним, якщо відстань $\mathrm{d}s$ замінити на швидкість помножену на приріст часу $\mathrm{d}t$.

Далі до цього визначення Мопертюї додає три приклади як доказ загальності свого принципу. В першому прикладі виводиться закон руху непружного тіла, в другому – пружного, а третій приклад стосується закону механічної рівноваги.

Зауважимо, що у Додатку II (рис. 11.23, праворуч) до згаданої вище книги Леонарда Ейлера «Methodus inveniendi …», який має назву «De motu projectorum in medio non resistente…» (Про визначення руху кинутих тіл в середовищі без опору методом максимумів і мінімумів), проголошено наступне: «1. Оскільки всі явища природи слідують якомусь закону максимуму або мінімуму, то немає ніякого сумніву, що і для кривих ліній, які описують кинуті тіла, якщо на них діють якісь сили, має місце якась властивість максимуму або мінімуму. Визначити з принципів метафізики a priori, яка саме ця властивість, мабуть не так легко; але оскількі самі ці криві можна визначити за допомогою прямого методу, то звідси, приділивши належну увагу, можна буде зробити висновок про те, **що** саме в цих кривих є максимумом або мінімумом. Підлягає розгляду головним чином ефект, що походить від діючих сил; і оскільки він полягає в породженому ними русі тіла, то представляється узгодженим з істиною, що цей самий рух, або, точніше, сукупність всіх рухів, властивих кинутому тілу, повинна бути мінімумом».



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Profeſſore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

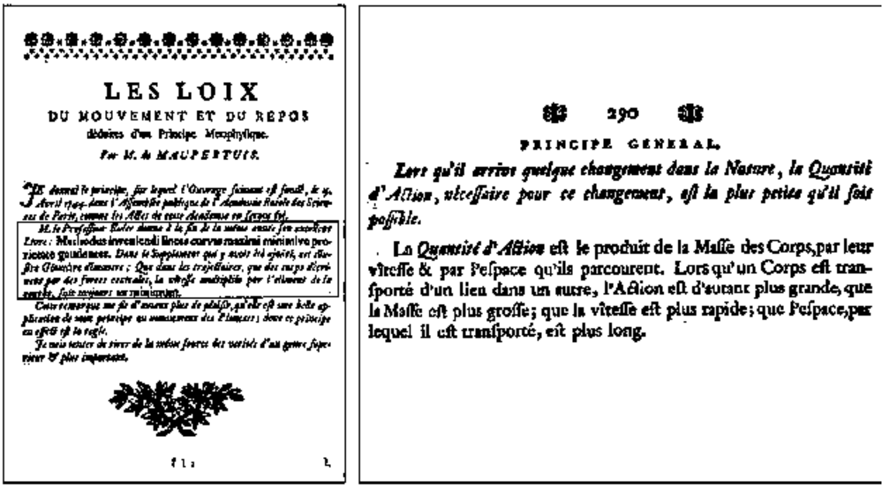
ADDITAMENTUM II.

De motu projectorum in medio non reſiſtente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando.

1. Quoniam omnes naturæ effectus ſequuntur quandam maximi minimive legem; dubium eſt nullum, quin in lineis curvis, quas corpora projecta, ſi a viribus quibuscunque ſollicitentur, deſcribunt, quæpiam maximi minimive proprietas locum habeat. Quænam autem ſit iſta proprietas, ex principiis metaphyſicis a priori definire non tam facile videtur: cum autem has ipſas curvas, ope Methodi directæ, determinare liceat; hinc, debita adhibita attentione, id ipſum, quod in iſtis curvis eſt maximum vel minimum, concludi poterit. Spectari autem potiſſimum debet effectus a viribus ſollicitantibus oriundus; qui cum in motu corporis genito conſiſtat, veritati conſentaneum videtur hunc ipſum motum, ſeu potius aggregatum omnium motuum qui in corpore projecto inſunt, minimum eſſe debere. Quæ concluſio etſi non ſatis confirmata vi-

2. Sit maſſa corporis projecti $= M$, ejuſque, dum ſpatiolum $= ds$ emetitur, celeritas debita altitudini $= v$; erit quantitas motus corporis in hoc loco $= M \sqrt{v}$; quæ per ipſum ſpatiolum ds multiplicata, dabit $M ds \sqrt{v}$ motum corporis collectivum per ſpatiolum ds. Jam dico lineam a corpore deſcriptam ita fore comparatam, ut, inter omnes alias lineas iiſdem terminis contentas, ſit $\int M ds \sqrt{v}$, ſeu, ob M conſtans, $\int ds \sqrt{v}$ minimum. Quod ſi autem curva quæſita tanquam eſſet data ſpectetur, ex viribus ſollicitantibus celeritas $\sqrt{v}$ per quantitates ad curvam pertinentes definiri, ideoque ipſa curva per Methodum maximorum ac minimorum determinari poteſt. Ceterum hæc expreſſio ex quantitate motus petita æque ad vires vivas traduci poterit; poſito enim tempuſculo, quo elementum ds percurritur, $= dt$; quia eſt $ds = dt \sqrt{v}$, fiet $\int ds \sqrt{v} = \int dt v$; ita ut, in curva a corpore projecto deſcripta, ſumma omnium virium vivarum, quæ ſingulis temporis momentis corpori inſunt, ſit minima. Quamobrem neque ii qui vires per ipſas celeritates, neque illi qui per celeritatum quadrata æſtimari oportere ſtatuunt, hic quicquam quo offendantur reperient.

Рис. 11.23. Книга Ейлера «Метод знаходження кривих ліній, які мають властивості максимуму або мінімуму» і Додаток II



LES LOIX
DU MOUVEMENT ET DU REPOS
déduites d'un Principe Metaphyſique.
Par M. de MAUPERTUIS.

290

PRINCIPE GENERAL.

Lors qu'il arrive quelque changement dans la Nature, la Quantité d'Action, néceſſaire pour ce changement, eſt la plus petite qu'il ſoit poſſible.

La *Quantité d'Action* eſt le produit de la Maſſe des Corps, par leur viteſſe & par l'eſpace qu'ils parcourent. Lors qu'un Corps eſt tranſporté d'un lieu dans un autre, l'Action eſt d'autant plus grande, que la Maſſe eſt plus groſſe; que la viteſſe eſt plus rapide; que l'eſpace, par lequel il eſt tranſporté, eſt plus long.

Рис. 11.24. Книга Мопертюї «Закони руху і спокою, отримані з метафізичного принципу» і сторінка, на якій викладено Принцип найменшої дії

У розділі 2 цього Додатку Ейлер позначає масу через *M*, швидкість – через $\sqrt{v}$ (він використовував $\sqrt{v}$ замість *v*), нескінченно малу відстань – через d*s*, а сукупний імпульс вздовж відстані d*s* – через $M \cdot \mathrm{d}s \cdot \sqrt{v}$ і пише: «Тепер я стверджую, що лінія, яку описує тіло, буде такою, що серед всіх інших ліній, що містяться між тими ж границями, вона надасть мінімум величині $\int M \cdot \mathrm{d}s \cdot \sqrt{v}$, або, оскільки M постійне, величині $\int \mathrm{d}s \cdot \sqrt{v}$. Якщо ж розглядати шукану криву, як ніби-то вона була задана, то можна з діючих сил визначити швидкість $\sqrt{v}$ через величини, що відносяться до кривої, і отже, визначити саму криву методом максимумів і мінімумів. Втім, можна буде цей вираз, отриманй з кількості руху, привести також і до живих сил; дійсно, поклавши час, протягом якого пробігається елемент ds, рівним dt, внаслідок $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t\cdot\sqrt{v}$, матимемо: $\int \mathrm{d}s\cdot\sqrt{v}=\int v\,\mathrm{d}t$, так що для кривої, що описується кинутим тілом, сума всіх живих сил, що знаходяться в тілі в окремі моменти часу, буде найменшою. Таким чином, ні ті, хто вважає, що сили слід оцінювати по самим швидкостям, ні ті, хто – по квадратах швидкостей, не знайдуть тут нічого неприйнятного».

Леонард Ейлер,
нім. Leonhard Euler
(1707-1783)

Ейлер розумів, що для всього шляху дії повинна бути сума по всіх сегментах d*s* і по суті визначає величину (швидкість визначається як *v*, як зазвичай)

$$A=\int M\,v\,\mathrm{d}s=\int M\,v^2\,\mathrm{d}t\,,$$

яка з точністю до множника $1/2$ є еквівалентною кінетичній енергії.

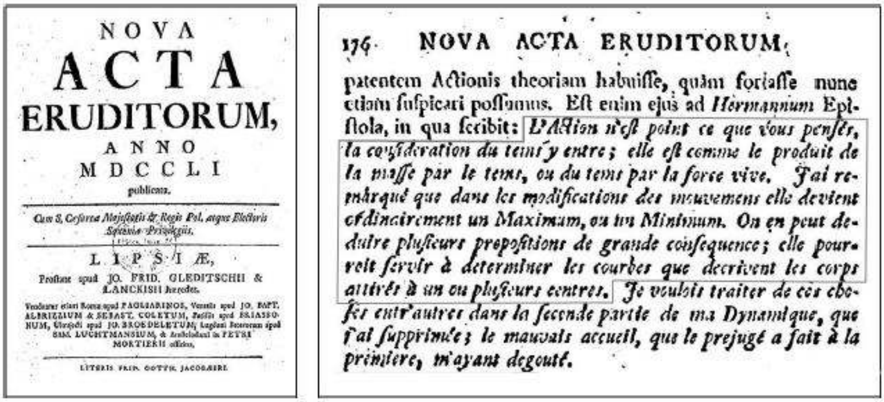
Таким чином, виявилося, що претензії Мопертюї на універсальність його принципу були необгрунтованими, див. [Knobloch, 2008], [Szabo, 1979]; приклади були підібрані невдало і не завжди правильно. Його твердження про те, що мінімізація – це принцип економії не є справедливим, бо деякі проблеми призводять до максимуму. Наприклад, переломлення увігнутого дзеркала засновано на властивості максимуму. Отже, інтерпретація Мопертюї висловлювань Ейлера мала недоліки.

11.8.2. Критики

Найсуворішим критиком Мопертюї був його однокурсник і друг Йоганн Самюель Кеніг. Через два роки після свого призначення, за рішучої підтримки президента, членом Берлінської Академії швейцарський юрист, а пізніше математик Кеніг передав своє есе Мопертюї, який схвалив його до публікації без читання. У своїй статті Кеніг захищав принцип екстремальної енергії, з якого може бути отриманий екстремум для дії. Есе з'явилося в Nova Acta Eruditorum в 1751 р. [Koenigio, 1751]. Мопертюї, прочитавши цю статтю, дуже засмутився, тому що в ній не тільки була припущена обмеженість його принципу, але також стверджувалось, що Лейбніц ще в 1707 році в листі до швейцарського математика і богослова Якоба Германна надав більш точне формулювання.

Йоганн Самюель Кеніг,
нім. Johann Samuel König
(1712-1757)

В кінці своєї статті Кеніг наводить цитату з листа Лейбніца до Германна [Leibniz, 1707] (рис. 11.25): «Але дія жодним чином не є тим, що ви собі уявляєте, тут вже треба розглядати час; це добуток маси і часу[1]; або часу та живої сили. Я вже вказував, що при зміні рухів вона, як правило, становиться Максимумом або Мінімумом. З цього можна зробити кілька важливих висновків; це може бути використано для визначення кривих, що описують тіла, які притягуються до одного або декількох центрів».



NOVA
ACTA
ERUDITORUM,
ANNO
MDCCLI
publicata.

Cum S. Caeſareae Majeſtatis & Regis Pol. atque Electoris Saxoniae Privilegiis.

LIPSIÆ,
Proſtant apud JO. FRID. GLEDITSCHII & LANCKISII heredes.

Venduntur etiam Romae apud PAGLIARINOS, Venetiis apud JO. BAPT. ALBRIZZIUM & SEBAST. COLETUM, Patavii apud FRIASSONUM, Ultrajecti apud JO. BROEDELETUM, Lugduni Batavorum apud SAM. LUCHTMANSIUM, & Amſtelodami in PETRI MORTIERII officina,

LITERIS FRID. GOTTH. JACOBAEERI

176 NOVA ACTA ERUDITORUM.

patentem Actionis theoriam habuiſſe, quam fortaſſe nunc etiam ſuſpicari poſſumus. Eſt enim ejus ad *Hermannum* Epiſtola, in qua ſcribit: *L'Action n'eſt point ce que vous penſez, la conſideration du tems y entre; elle eſt comme le produit de la maſſe par le tems, ou du tems par la force vive. J'ai remarqué que dans les modifications des mouvemens elle devient ordinairement un Maximum, ou un Minimum. On en peut deduire pluſieurs propoſitions de grande conſequence; elle pourroit ſervir à determiner les courbes que decrivent les corps attirés à un ou pluſieurs centres. Je voulois traiter de ces choſes entr'autres dans la ſeconde partie de ma Dynamique, que j'ai ſupprimée; le mauvais accueil, que le prejugé a fait à la premiere, m'ayant degouté.*

Рис. 11.25. Лист Лейбніца до Германна, на який посилається Кеніг.
Опубліковано в Nova Acta Eruditorum [Koenigio, 1751]

Згідно Кенігу поняття «живої сили» (vis viva) було введене Лейбніцем у вигляді $M \cdot v^2$, тобто це величина в два рази більша за кінетичну енергію. В його наміри не входило звинуватити Мопертюї в плагіаті чи принижувати його гідність; він просто хотів вказати на більш загальне формулювання Лейбніца (мінімум або максимум). Проте, це дало початок інтенсивному взаємному обміну образами, в результаті чого наукова суперечка набула неприйнятної форми [Harnack, 1900].

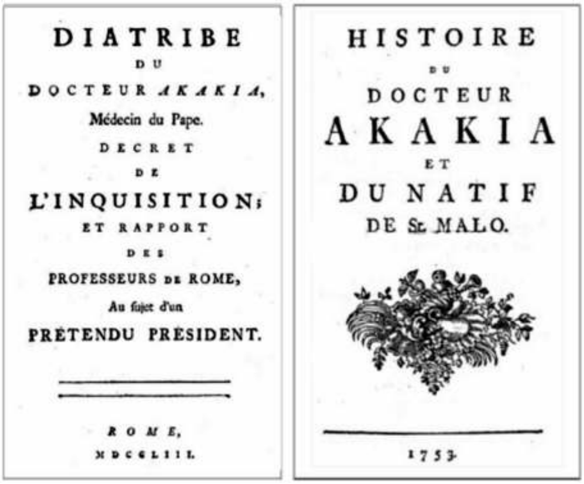
Лист, представлений Кенігом, був копією, і цей факт зіграв ключову роль в подальшій лютій сварці. Всі спроби знайти оригінал листа приводили тільки до інших копій; Кеніг стверджував, що він отримав свою копію в Берні від швейцарського поета і політика Самуеля Генці, який серед інших речей збирав листи Лейбніца. Генці був страчений в 1749 р. через участь у заколоті, і всі оригінали документів, що належали йому, мали бути знищені. Збори Берлінської академії, які відбулися навесні 1752 р., звинуватили Кеніга у підробці. Слід зазначити, що засідання очолив Ейлер, який з самого початку був рішучим прихильником Мопертюї, незважаючи на те, що його власна робота 1744 р. містила більш строге обґрунтування того ж принципу; причина такої реакції Ейлера все ще є предметом здогадок; дивись, наприклад, [Knobloch, 2008], [Szabo, 1979], [Ariga, 2008]. Позов Кеніга було відхилено; його членство в Академії було припинено влітку 1752 р.

---

[1] Цитата містить помилку; замість часу в добуток входять відстань і швидкість.

Король Фрідріх використовував весь свій авторитет для підтримки Мопертюї, Президента «Його» Академії. Але на іншому боці виступив знаменитий французький письменник Вольтер, який у публічному спілкуванні віддавав перевагу сатирі і полеміці і був відомий своїми різкими, уїдливими, а часом і дотепними зауваженнями. Хоча у Берліні Вольтер перебував на запрошення Фрідріха, у суперечці він взяв сторону Кеніга; восени 1752 р. він опублікував на захист Кеніга анонімний лист «Відповідь берлінського академіка паризькому академіку», в якому, посилаючись на месьє Моро де Мопертюї, писав: «Він стверджує, що у всіх можливих випадках Дія завжди Мінімальна, що, як було продемонстровано, є хибним твердженням; і він каже, що це він відкрив цей закон Мінімуму, що є не менше помилковим твердженням. Пан Кеніг, як і інші математики, письмово виступив проти цього дивного твердження, і серед іншого навів фрагмент листа Лейбніца, в якому ця велика людина зауважила, що в модифікаціях руху, дія, як правило, є або максимальною, або мінімальною». Фрідріх був змушений стати на захист Мопертюї.

Вольтер і далі публікував полемічні роботи, найвідомішою з яких є «Діатриба доктора Акакія, папського лікаря» (рис. 11.26, ліворуч), в якій знущався з Президента Академії [Voltaire, 1753]. Тираж Діатриби, надрукований в Потсдамі, був спалений за наказом короля Фрідріха. Проте, оскільки вона була також опублікована в Голландії, деякі додаткові копії з'явилися в Берліні і знову були спалені перед квартирою Вольтера. Це означало остаточний розрив з королем; Вольтер поїхав до Лейпцига навесні 1753 р. і продовжив атаки на Мопертюї. Кілька листів Вольтера були зібрані в брошурі «Історія Доктора Акакія та уродженця Сен-Мало», опублікованій в квітні 1753 р. Зауважимо, що Сен-Мало - це батьківщина Мопертюї. Як і Діатриба, цей памфлет був фіктивно представлений в якості захисту, але в дійсності являв собою сумнівний комплімент. В Історію було включено фіктивний Мирний Договір між президентом (Мопертюї) і професором (Кенігом), в якому серед іншого було сказано: «У майбутньому ми обіцяємо, не принижувати німців і визнаємо, що роботи Коперника, Кеплера, Лейбніца ... є чимось значним, і що ми навчались по Бернуллі,



DIATRIBE
DU
DOCTEUR *AKAKIA*,
Médecin du Pape.
DECRET
DE
L'INQUISITION;
ET RAPPORT
DES
PROFESSEURS DE ROME,
Au ſujet d'un
PRÉTENDU PRÉSIDENT.

ROME,
MDCCLIII.

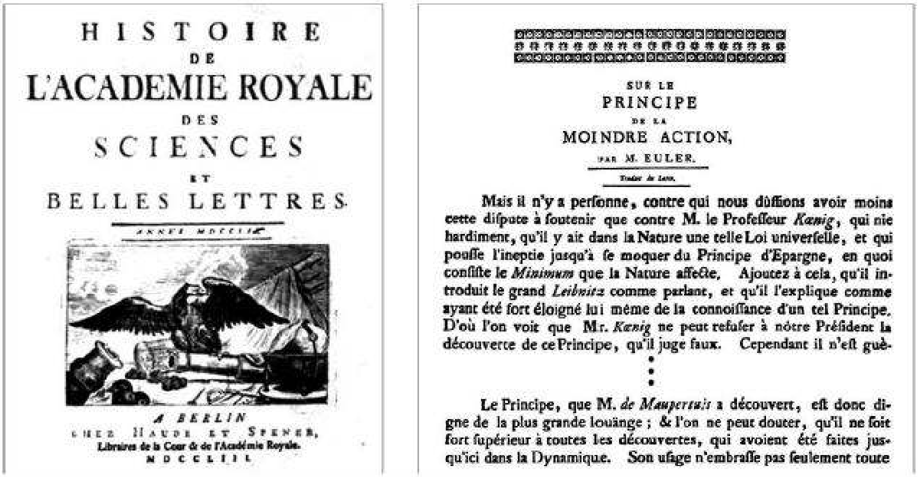
HISTOIRE
DU
DOCTEUR
AKAKIA
ET
DU NATIF
DE St. MALO.

1753.

Рис. 11.26. Вольтерівські Діатріби [Voltaire, 1753b] та Історія Доктора Акакії [Voltaire, 1753a] і будемо продовжувати навчання; і що, нарешті, професор Ейлер, якому дуже хотілося служити нам в якості лейтенанта, дуже великий геометр, який надав на підтримку нашого принципу формули, що їх ми були абсолютно не в змозі зрозуміти, але ті, хто розуміються на цьому, запевнили нас, що вони сповнені генія, як і опубліковані праці згаданого професора, нашого лейтенанта» [Dugas, 1988].

Таким чином, Вольтер включив у цю суперечку Ейлера і виставив його у смішному вигляді. Ейлер дійсно був затятим прихильником Президента Академії, незважаючи на своє власне більш строге викладення предмета. Дюга посилається в [Dugas, 1988] на есе Ейлера і наводить його слова про Мопертюї: «Цей великий геометр не тільки встановив принцип сильніше, ніж це зробив я, але його метод, більш загальний і проникливий, ніж мій, дозволив виявити наслідки, які я отримати не зміг. Хоча багато хто виявляв інтерес до цього принципу, він показав, з такою самою очевидністю, що я був єдиним, кому це відкриття могло б належати». Зауважимо, що в ті часи геометрами називали математиків.

Ейлер обговорював своє бачення розвитку принципу в роботі [Euler, 1753], представленій ще в 1751 р., але надрукованій в Історіях Прусської Академії тільки у лютому 1753 р. (рис. 11.27). Стосовно ролі Кеніга він зробив таку доволі сильну заяву: «Але немає жодної людини, з якою би було настільки безглуздо дискутувати, як із професором Кенігом, який зухвало заперечує існування в природі такого універсального закону і найбезглуздішим чином глузує з цього принципу збереження, який утворює той Мінімум, що призначила природа. Крім того, він залучає великого Лейбніца, наводячи його слова і стверджуючи, нібито сам Лейбніц був далекий від знання такого принципу. З цього ми бачимо, що пан Кеніг не може заперечувати відкриття нашим Президентом принципу, який сам він вважає помилковими». Врешті-решт Ейлер сказав: «Таким чином, принцип, відкритий знаменитим Президентом, вартий найбільшої похвали; і, без сумніву, він набагато перевершує всі відкриття, які були зроблені в динаміці до теперішнього часу» (рис. 11.27, праворуч). Ця стаття була включена в «Dissertatio de Principio Minimae Actionis…» двомовне видання латинською та французькою мовами разом з розглядом заперечень професора Кеніга, зроблених стосовно цього принципу [Eulero, 1753] (рис. 11.28), дивись також [Maupertuisiana, 1753].



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNEE MDCCLII.

A BERLIN
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLIII.

SUR LE
PRINCIPE
DE LA
MOINDRE ACTION,
PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

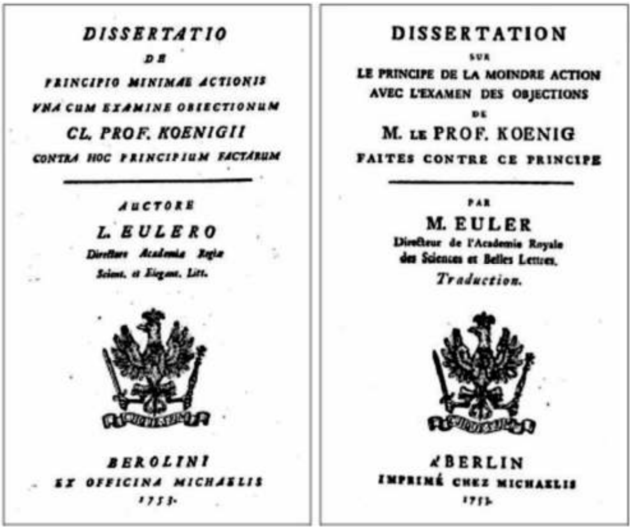
Mais il n'y a perſonne, contre qui nous dûſſions avoir moins cette diſpute à ſoutenir que contre M. le Profeſſeur *Kœnig*, qui nie hardiment, qu'il y ait dans la Nature une telle Loi univerſelle, et qui pouſſe l'ineptie jusqu'à ſe moquer du Principe d'Epargne, en quoi conſiſte le *Minimum* que la Nature affecte. Ajoutez à cela, qu'il introduit le grand *Leibnitz* comme parlant, et qu'il l'explique comme ayant été fort éloigné lui même de la connoiſſance d'un tel Principe. D'où l'on voit que Mr. *Kœnig* ne peut refuſer à nôtre Préſident la découverte de ce Principe, qu'il juge faux. Cependant il n'eſt guè-

⁝

Le Principe, que M. *de Maupertuis* a découvert, eſt donc digne de la plus grande louänge ; & l'on ne peut douter, qu'il ne ſoit fort ſupérieur à toutes les découvertes, qui avoient été faites jusqu'ici dans la Dynamique. Son uſage n'embraſſe pas ſeulement toute

Рис. 11.27. Стаття Ейлера Принцип найменшої дії [Euler, 1753]

Незабаром після цього в квітні 1753 р. шістнадцять полемік і листів, що мали відношення до суперечки, були зібрані разом в публікації під назвою, «Мопертюїзіана» (рис. 11.29), ініційованій Вольтером [Maupertuisiana, 1753], і начебто надрукованій у Гамбурзі. До її складу входили вищезгадані «Відповідь» та «Лист». Фігура на титульному аркуші зображає Дон Кіхота (Мопертюї), який зламаним списом погрожує вітрякам та кричить: «Tremblez» (тремтіть); позаду нього Санчо Панса (Ейлер) їде на віслюку. Праворуч зображений сатир, який проголошує: «sic itur ad astra» (так досягають зірок), що, мабуть, натякає на те, що ці люди в реальний світ вже не повернуться. Над зображенням розміщено рядок з «Енеїди» Вергілія: «Discite Justitiam, moniti» - «Вчіться на прикладах правди» (переклад М. Білика).



DISSERTATIO
DE
PRINCIPIO MINIMAE ACTIONIS
VNA CUM EXAMINE OBIECTIONUM
CL. PROF. KOENIGII
CONTRA HOC PRINCIPIUM FACTARUM

AUCTORE
L. EULERO
Directore Academiae Regiae
Scient. et Elegant. Litt.

BEROLINI
EX OFFICINA MICHAELIS
1753.

DISSERTATION
SUR
LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION
AVEC L'EXAMEN DES OBJECTIONS
DE
M. LE PROF. KOENIG
FAITES CONTRE CE PRINCIPE

PAR
M. EULER
Directeur de l'Academie Royale
des Sciences et Belles Lettres.
Traduction.

A BERLIN
IMPRIMÉ CHEZ MICHAELIS
1753.

Рис. 11.28. Двомовне видання дисертації Ейлера [Eulero, 1753]

Також до Мопертюїзіани було включено «Мирний Договір»; на титульній сторінці цього тому містилась перша частина цитати з Сатир Горація: «ridiculum acri fortius et melius (magnas plerumque secat res)» або «Саме жарт, (а не мова злостива) нам помагає не раз розв'язати заплутану справу» (переклад А. Содомори).

MAUPERTUISIANA.

Discite Justitiam, moniti — — —
Virg.

A HAMBOURG,

MDCCLIII.

PIECES
contenuës dans ce Recueil:

Le Jugement de l'Academie.
L'Appel au Public.
Defense de l'Appel,
Lettres concernant le Jugement.
Lettre d'un Marquis.
Lettre d'un Academicien de Berlin.
Reponse a la Lettre d'un Acacademicien de Berlin.
Eloge des trois Philosophes.
Diatribe du Doct. Akakia.
Extrait d'une Lettre de Berlin.
Extrait d'une Lettre d'un Academicien.
Seance memorable.
L'Art de bien argumenter.
Dissertation.
La Berlue.
Lettre de M*. N*. T***.

Рис. 11.29. Мопертюїзіана (1753), перелік творів та листів, що входять до її складу [Maupertuisiana, 1753]

Із публікацією Мопертюїзіани сварка почала більш-менш вщухати. Мопертюї хворів, провів рік в Парижі і Сен-Мало, повернувся в Берлін і жив там до 1756 р. Після ще одного року в Сен-Мало він за допомогою Йоганна II Бернуллі влаштувався в Базелі, де і помер в 1759 р. С. Кеніг прожив два роки із почуттям моральної перемоги в цій війні і помер від інсульту в Голландії в 1757 р. Вольтер ще декілька років вів активне та насичене подіями життя; він поїхав в 1753 р. з Берліна до Парижа, але мешкати там йому заборонив Луї X. Він жив у Женеві, а згодом у маєтку Ферне, розташованому по обидва боки кордону Женевського кантону із Францією. Повернутися до Парижу йому вдалося тільки у 1778 р., за три місяці він помер. Ейлер, четверта фігура в цій суперечці, залишався декілька років в Берліні, але в 1766 р. повернувся до Санкт-Петербурга. Він був надзвичайно активним і опублікував кілька фундаментальних трактатів. Пішов з життя в 1783 р.

11.8.3. Лист Лейбніца до Германна

Питання щодо підробки було розглянуто ще раз 140 років по тому, коли С.І. Герхардт, редактор математичних праць Лейбніца в Прусській академії, заново дослідив справу. Фізик Герман фон Гельмгольц, який виступив з промовою, присвяченою історії принципу Найменшої дії в Академії в 1887 р. [Helmholtz, 1887], послався на зауваження Герхардта з приводу того, що лист не узгоджується із листуванням з Германном. Лейбніц, можливо, відклав видання, тому що він планував використати його пізніше. У докладній доповіді [Gerhardt, 1898] Герхардт стверджує, що три з чотирьох листів, представлених Кенігом, є справжніми і закінчує свою статтю словами: «З наведених вище пояснень випливає, безсумнівно, що фрагмент листа, який опублікований Кенігом, не був скомпонованим, а весь лист не був підробкою. Лист написав Лейбніц. Крім того, з імовірністю, близькою до достовірності було доведено, що лист було направлено на адресу Варіньона. Подібні листи зникли з листування із Варіньоном, яке зберігається в Королівській бібліотеці Ганновера, та з відповідного листування Лейбніца з Германном». Припущення про справжність було підкреслене ще одним аргументом в 1913 році, коли В. Кабітц [Kabitz, 1913] знайшов додаткову копію листа в м. Гота серед зібрання інших справжніх листів Лейбніца. В той час це було прийнято в якості «доведення» оригінальності листа.

Проте нещодавно Брегер знову розглянув справу і в дивовижно ретельному огляді [Breger, 1999] детально зупинився на восьми аргументах проти достовірності листа. Серед них є той аргумент, що Лейбніц ніколи не застосовував поняття "Limites" в тому сенсі, в якому воно використовується в листі. Лейбніц також часто посилався на властивості мінімуму і максимуму, а також вживав термін дії, проте поєднання обох цих понять було дуже виключною подією; подальші міркування можна знайти в статті [Breger, 1999]. Брегер наполягає, що тепер настав час, щоб знову проаналізувати аргументи, які свідчать на користь автентичності. Він також висловлює думку, що в разі підробки стає зрозумілою досить дивна реакція Ейлера; він зрозумів лист як дію персонально проти нього самого. А ще одне питання, саме щодо особи фальсифікатора, до сих пір залишається відкритим.

11.8.4. Застосування принципу найменшої дії

Як було сказано вище, принцип найменшої дії як енергетичний принцип був сформульований в 1744 році Ейлером. Виявилося, що це скоріше принцип стаціонарної дії. Лагранж вивів рівняння руху на основі розвиненого їм варіаційного числення (1760). У 1834/35 Гамільтон ввів функцію Лагранжа в варіаційний принцип і вивів те, що було названо пізніше рівнянням Ейлера-Лагранжа. У той час як Ейлер і Мопертюї зосередились в Принципі найменшої дії на кінетичній енергії (vis viva, живій силі), мовчазно припускаючи, що потенціальна енергія є постійною, в принцип Гамільтона увійшла різниця між кінетичною і потенціальною енергією, яку називать функцією Лагранжа або лагранжіаном. Незважаючи на ці близькі стосунки, Принцип найменшої дії не знайшов свій шлях в інженерне співтовариство, яке в основному зверталось до робіт Лагранжа, Д'Аламбера і Гамільтона.

У XIX ст. добре відомі принципи мінімуму повної потенціальної енергії (Діріхле-Гріна) і мінімуму повної доповнювальної енергії (Менабреа-Кастільяно) стали основними теоремами механіки. Принципи віртуальної роботи та доповнювальної роботи вийшли на сцену, зокрема, через можливість їх загального застосування до задач, де не існують потенціали. Вони в даний час разом зі змішаними варіаційними принципами (Хеллінгера-Рейсснера, Фрайша де Вебеке-Ху-Васидзу тощо) є основою для виведення методів діскретізації.

На відміну від прикладних галузей науки сучасна фізика широко користується принципом найменшої (станціонарної) дії. Цілі глави трактатів присвячені цьому принципу, наприклад, [Бердичевский, 2005], [Pars, 1965]; див. також знамениті Фейнманівські лекції з фізики [Feynman et al., 2005].

Час від часу цей принцип розглядається як узагальнення принципу Гамільтона, а не як його попередник. Принцип був застосований, наприклад, в теорії відносності та в квантовій механіці, див. [Taylor, 2008].

11.9. Метод динамічної рівноваги. Принцип Д'Аламбера

> *Динаміка - це наука про прискорюючі і сповільнюючі сили і про змінні рухи, які вони повинні викликати. Ця наука цілком зобов'язана своїм розвитком новітнім ученим, і Галілей є тією особою, яка заклала перші її основи. До нього сили, що діють на тіла, розглядали тільки в стані рівноваги, і хоча падіння твердих тіл з прискоренням і криволінійний рух кинутих тіл не могли приписати якій-небудь іншій причині, крім постійної дії тяжіння, проте нікому до Галілея не вдалося визначити законів цих повсякденних явищ, -незважаючи на те, що причина їх настільки проста. Галілей перший зробив цей важливий крок і цим відкрив новий і неозорий шлях для прогресу механіки.*
>
> Ж.-Л. Лагранж

> *Слід поставити перед собою мету знайти спосіб розв'язання всіх задач ... одним і при тому простим способом.*
>
> Ж. Д'Аламбер

У динаміці при виведенні рівнянь руху використовуються три підходи. Перші два базуються на диференціальних принципах механіки – принципі Д'Аламбера та принципі можливих переміщень, третій – на інтегральному принципі Гамільтона.

Одним з широко застосовуваних підходів побудови рівнянь руху є метод, що базується на принципі Д'Аламбера. Згідно з принципом Д'Аламбера, якщо до заданих активних сил, які діють на точку механічної системи, і реакцій в'язей, які накладаються, додати сили інерції, дістанемо врівноважену систему сил.

У 1743 р. Жан Ле-Рон Д'Аламбер (1717–1783) – французький учений-енциклопедист, широко відомий як філософ, математик і механік, видав «Трактат про динаміку», який став першою роботою, де були сформульовані загальні принципи складання диференціальних рівнянь руху матеріальних систем, причому задачі динаміки зводились до задач статики. Ж.Л. Д'Аламбер по суті розповсюдив на динаміку застосування принципу віртуальних переміщень. Основні математичні дослідження Ж.Л. Д'Аламбера належить до теорії диференціальних рівнянь. Його праці разом з дослідженнями Л. Ейлера і Д. І Бернуллі стали основою математичної фізики.

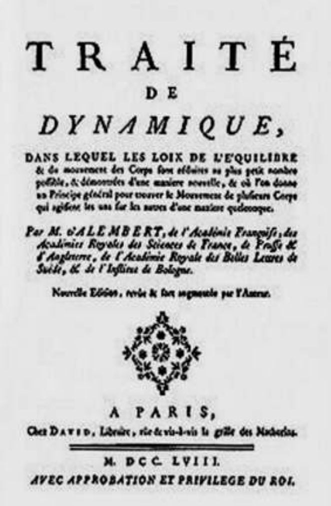
Як стверджує К. Трусделл [Трусделл, 2002], у роботі Ж.Л. Д'Аламбера, опублікованій у тому ж 1743 р., диференціальні рівняння малого руху для вагомої нитки виведені за допомогою загального методу. У віці двадцяти чотирьох років Ж.Л. Д'Аламбер опублікував книгу з вельми показовим заголовком: «Трактат про динаміку, в якому закони рівноваги і руху тіл зведені до найменшого можливого числа і доведені новим способом, і де наведено загальний принцип, як знайти рух декількох тіл, які впливають одне на одне довільним чином». Всупереч звичайним твердженням, Ж.Л. Д'Аламбер не звів динаміку до статики, не запропонував він також, ні тут і ні де-небудь ще, жодну з двох форм законів динаміки, які зазвичай зараз називають «принципом Д'Аламбера»; вони з'явилися пізніше завдяки, відповідно, Л. Ейлеру і Ж.-Л. Лаґранжу. Ж.Л. Д'Аламбер першим запропонував загальне правило для отримання рівнянь руху складних систем. Розклавши рух на дві частини, одна з яких є «природною», а інша зумовлена в'язями, він доводить, що сили, відповідні до прискорень, завдяки в'язям утворюють систему, яка знаходиться в статичній рівновазі. Таким чином, його принцип розвиває одну з ідей великої статті Якоба Бернуллі 1703 р.; він все ж ближче до принципу, сформульованого ще більш незрозуміло Даніелєм Бернуллі при розгляді підвішеної нитки в роботі 1732-1733 років (опублікована в 1740 р.). Подібно до більш старих тверджень Р. Декарта і Г. Лейбніца, це твердження про систему в цілому, а не про її частини, і його недостатньо для розв'язання загальних задач динаміки; Ж.Л. Д'Аламбер також неявно висуває інші принципи, отримує результати; він першим вивів диференціальне рівняння в частинних похідних як формулювання закону руху, окремим випадком якого були коливання важкої підвішеної нитки.

Тоді як Л. Ейлер врешті решт став поборником підходу І. Ньютона до механіки, з Ж.Л. Д'Аламбера почався новий і протилежний спосіб мислення, в якому поняття сили відіграє другорядну роль. Якщо рух відомий, зауважив він, тоді те, що ми називаємо силами, - просто його прояви, які можна розрахувати на його основі. «Чому нам слід звертатися до цього принципу, який використовує сьогодні кожен, а саме, що прискорює або гальмує сила пропорційна елементу (тобто диференціалу) швидкості, принципу, заснованому єдино на цій незрозумілій і невизначеній аксіомі, що наслідок пропорційний причині? Ми взагалі не будемо досліджувати, чи є цей принцип необхідною істиною; ми лише стверджуємо, що докази його, наведені до теперішнього часу, не представляються нам дуже переконливими; ми також не будемо приймати його, як деякі інші геометри, як чисто умовну істину, тому що це зруйнувало б визначеність механіки і звело б її тільки до експериментальної науки. Швидше, ми з задоволенням відзначимо, що принцип (прискорюючої сили), істинний він чи двоїстий, ясний він чи незрозумілий, марний для механіки і, отже, повинен бути виключений з неї».

Хоча ім'я І. Ньютона не згадується, Ж.Л. Д'Аламбер повністю виключає точку зору Ньютона на механіку. Якщо для таких вчених як Поп і Мах І. Ньютон створив весь світ, то Ж.Л. Д'Аламбер вважав «сили, властиві тілам в русі», центральне поняття точки зору І. Ньютона, «неясними і метафізичними сутностями, здатними тільки поширювати темряву над наукою, ясною за своєю суттю».

Відразу після знайомства з роботою Йоганна Бернуллі про гідравліку Л. Ейлер привітав її за те, що в ній використаний «істинний і справжній метод», а саме, ньютонівський баланс сили замість прискорення. Нові трактування Л. Ейлером зв'язаних систем близькі по духу до випадків Й. Бернуллі, але набагато ясніші і більш загальні. У 1744 р. Л. Ейлер вивів диференціальні рівняння руху для натягнутої навантаженої струни і для *n* твердих стержнів, пов'язаних разом, описавши їх в звичайній прямокутній декартової системи координат. Він використовував єдиний механічний принцип - «ньютонівський», і інтеграли кількості руху і кінетичної енергії виведені шляхом інтегрування. Тут вперше зустрічаються точні диференціальні рівняння руху для системи з *n* тіл, а також перший приклад того, що зараз в підручниках з механіки подається як «ньютонівський» метод. Як наслідок, тут також слід шукати перше визнання статусу інтегралів кількості руху і кінетичної енергії для системи. Блискучим граничним переходом в деяких наслідках фундаментальних рівнянь Ейлер вивів диференціальні рівняння руху в частинних похідних для нескінченної струни. Ця робота з'явилася в 1751 р.

Коли у 1746 р. Ж.Л. Д'Аламбер вивів лінійне хвильове рівняння малих коливань струни, він не використовував свій власний принцип механіки, але замість цього в даному випадку прийняв підхід Ньютона; по суті, він лінеаризував рівняння, яке вивів, але не зумів використати Тейлор. Хвильове рівняння Д'Аламбера - не перше диференціальне рівняння руху в частинних похідних, яке було отримано, але перше, що привернуло до себе увагу.

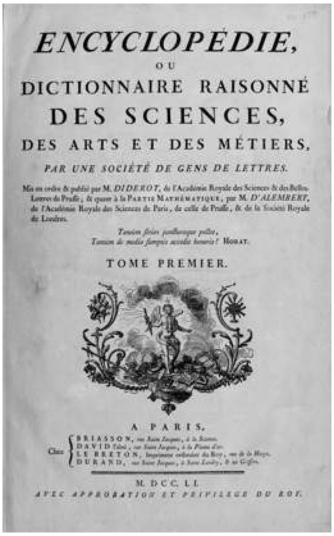


TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE

A PARIS,

M. DCC. LVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Д'Аламбер. Трактат про динаміку



ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

TOME PREMIER.

A PARIS,

M. DCC. LI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Титульна сторінка енциклопедії під редакцією Дідро і Д'Аламбера

Зауважимо, що спочатку ідея сформульованого Ж.Л. Д'Аламбером принципу була висловлена Якобом Бернуллі при вивченні задачі про центр коливань тіл довільної форми. У 1716 р. петербурзький академік Я. Германн висунув принцип статичної еквівалентності «вільних» рухів і «фактичних» рухів, тобто рухів, які здійснюються при наявності в'язей.

Пізніше цей принцип був застосований Л. Ейлером до задачі про коливання гнучких тіл (ця робота була опублікована в 1740 р.) і отримав назву «петербурзького принципу». Але першим, хто сформулював розглядуваний принцип у загальному вигляді, хоч і не дав йому певного аналітичного виразу, був саме Ж.Л. Д'Аламбер. Аналітичний вираз цього принципу був наданий пізніше Ж.-Л. Лагранжем у його «Аналітичній механіці». Цікаво, що сам Ж.Л. Д'Аламбер у «Трактаті про динаміку» [D'Alembert, 1743][1] при викладені принципу, який отримав надалі назву принципу Д'Аламбера, не користувався терміном «сили інерції». Термін «Д'Аламберові сили інерції» з'явився набагато пізніше. Л. Ейлер вважав, що термін «сили інерції» був уперше введений Й. Кеплером, який позначав їм «властиву кожному тілу силу опору всьому тому, що намагається змінити його стан руху»[2].

Рівняння динамічної рівноваги для системи з n ступенями свободи зручно записати в матричному вигляді:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{p}, \tag{11.61}$$

де $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ – вектор переміщень; **M** – матриця мас:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}; \tag{11.62}$$

K – матриця жорсткості:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11.63}$$

Отже, вимушені коливання конструкції описуються системою n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (n – кількість динамічних ступенів свободи системи).

Зазначимо, що при побудові рівнянь руху не враховувалися сили опору руху.

Рівняння руху (11.61) можна записати і в іншому вигляді.

Позначимо δ_{ik} – переміщення у напрямі y_i від дії одиничної сили у напрямі y_k (i,k=1,2,..., n) та введемо матрицю податливості розглядуваної механічної системи:

---

[1] Див. також російський переклад: *Ж. Д'Аламбер* «Динамика» [Д'Аламбер, 1950].

[2] Див. статтю: *Е.Л. Николаи* «О начале Д'Аламбера и о силах инерции» в кн. [Николаи, 1955, стор. 407-418], а також: *С.Э. Хайкин* «Физические основы механики» [Хайкин, 1963].

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (11.64)$$

Матриці податливості і жорсткості пружної системи є симетричними внаслідок відомих з курсу статики теорем про взаємність переміщень (теорема Максвелла) і взаємність реакцій (теорема Релея). Існує також теорема про взаємність реакцій і переміщень. Згадані теореми узагальнюються на область динаміки лінійних пружних конструкцій. В звичних для будівельної механіки термінах ці теореми сформульовані в роботі [Зилев, 2006].

Помноживши матричну рівність (11.61) на матрицю податливості **B**, запишемо

$$\mathbf{BM\ddot{y}} + \mathbf{BKy} = \mathbf{Bp},$$

звідки, з урахуванням того, що матриця податливості **B** обернена до матриці жорсткості **K**, дістанемо

$$\mathbf{BM\ddot{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{Bp}. \qquad (11.65)$$

Системи (11.61) і (11.65) є еквівалентними. Зазначимо, що для простих динамічних систем найефективнішим є саме метод динамічної рівноваги.

11.10. Принцип можливих переміщень в задачах динаміки. Принципи Журдена, Гаусса, Герца

> *Рух системи матеріальних точок, які пов'язані між собою довільним чином і піддаються будь-яким впливам, відбувається кожної миті в найбільш можливому узгодженні із тим рухом, який би здійснювали ці точки, якби всі вони стали вільними, тобто рух системи відбувається з найменш можливим примушенням, якщо за міру примушення, що застосовується впродовж нескінченно малої миті, взяти суму добутків маси кожної точки і квадрата відхилення від вільного руху.*
>
> Й. Гаусс

Якщо розглядувана механічна система має складну структуру і складається з дискретних мас та тіл скінченних розмірів, безпосередньо записати рівняння динамічної рівноваги дуже важко. У такому разі часто ефективним є застосування принципу можливих переміщень (принципу Д'Аламбера-Лагранжа).

Нагадаємо, що при розв'язанні лінійних задач під можливими (віртуальними) розуміють переміщення, що описуються гладкими безперервними функціями, за допомогою яких можна перевести систему з однієї конфігурації в іншу, що наближена до неї і відноситься до такого самого моменту часу, без порушення накладених в'язей. В геометрично нелінійних задачах віртуальні переміщення повинні бути ще й нескінченно малими.

В задачах динаміки принцип можливих переміщень або загальне рівняння динаміки формулюється таким чином: рух системи з ідеальними в'язями відбувається так, що в будь-який момент часу сума робіт всіх активних сил і сил інерції на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Принцип можливих переміщень є еквівалентним рівнянням динамічної рівноваги, проте варіаційне формулювання набагато ширше застосовується в задачах механіки. Справа в тому, що роботи сил на можливих переміщеннях є скалярними величинами і можуть складатися алгебраїчно, тоді як самі сили є векторами і повинні складатися за правилами векторного аналізу.

Зауважимо, що в аналітичній механіці принцип Д'Аламбера-Лагранжа часто записують у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] = 0. \qquad (11.66)$$

Це варіаційне рівняння, яке називають загальним рівнянням динаміки, містить в собі всі закони руху механічних систем з ідеальними в'язями.

Іноді корисно перетворити загальне рівняння таким чином, щоб перейти до формул, які є еквівалентними йому, але мають іншу структуру. Хоча такі формули не можуть виражати суттєво нові принципи, але можуть надати нову інтерпретацію загальних властивостей руху системи і накладених на неї в'язей. Так, якщо розглянути множину кінематично можливих рухів з різними можливими швидкостями і порівняти їх один з одним, а також з дійсним рухом в той самий момент часу, то отримаємо варіаційний принцип Журдена

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\dot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\dot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\dot{z}_i\right] = 0. \qquad (11.67)$$

Зазначимо, що тоді як в принципі Д'Аламбера-Лагранжа варіюються лише координати, а швидкості, прискорення і час лишаються незмінними ($\delta x_i \neq 0,\ \delta\dot{x}_i = 0,\ \delta\ddot{x}_i = 0,\ \delta t = 0,$ і аналогічно для координат y_i i z_i), в принципі Журдена варіюванню підлягають лише швидкості, а координати, прискорення і час не варіюються ($\delta x_i = 0,\ \delta\dot{x}_i \neq 0,\ \delta\ddot{x}_i = 0,\ \delta t = 0,$ і аналогічно для координат y_i i z_i).

Варіаційні принципи Д'Аламбера-Лагранжа і Журдена не пов'язані з поняттям екстремальності. В 1829 р. Гаусс запропонував модифікацію принципу Д'Аламбера-Лагранжа, в якій розглядається мінімум деякої величини. Цю величину Гаусс назвав примушенням або мірою примушення, а запропоновану їм модифікацію принципу Д'Аламбера-Лагранжа стали називати принципом Гаусса або принципом найменшого примушення. Для отримання математичного формулювання принципу Гауса необхідно порівнювати в деякий момент часу рухи, в яких всі точки системи мають ті самі координати і швидкості, що і при дійсному русі; відрізняються в порівнювальних рухах тільки можливі прискорення точок системи ($\delta x_i = 0,\ \delta\dot{x}_i = 0,\ \delta\ddot{x}_i \neq 0,\ \delta t = 0,$ і аналогічно для координат y_i i z_i), що дозволяє записати

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i\right] = 0. \qquad (11.68)$$

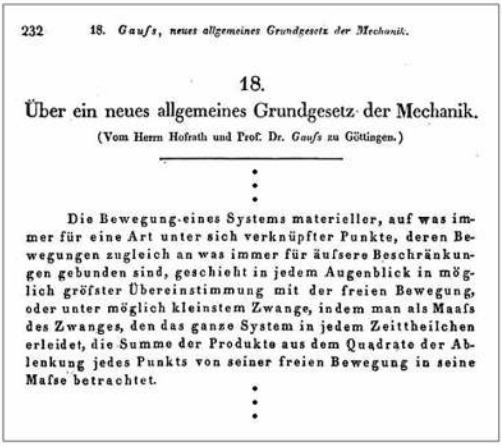
Оскільки маси точок m_i не змінюються, а сили не залежать від прискорень, рівняння (11.68) може бути записане у вигляді

$$\delta Zw = 0, \qquad (11.69)$$

де

$$Zw = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 + m_i\left(\ddot{y}_i - \frac{Y_i}{m_i}\right)^2 + m_i\left(\ddot{z}_i - \frac{Z_i}{m_i}\right)^2_i \right] = 0. \qquad (11.70)$$

Вміст кожної круглої дужки можна трактувати наступним: величина $\frac{X_i}{m_i}$ є прискоренням, з яким би рухалась i-та точка під дією активних сил X_i, якби на неї не були накладені в’язі. Отже, вираз у круглих дужках є різницею між прискореннями вільного та дійсного рухів. Тому величину *Zw*, яка знаходиться під знаком варіації в (11.69), Гаусс назвав «примушенням (zwang)». В своїй статті «Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik» («Про нове загальне начало механіки») [Gauss, 1829] Гаусс сформулював свій принцип в наступних словах: «Рух системи матеріальних точок, які пов’язані між собою довільним чином і піддаються будь-яким впливам, відбувається кожної миті в найбільш можливому узгодженні із тим рухом, який би здійснювали ці точки, якби всі вони стали вільними, тобто рух системи відбувається з найменш можливим примушенням, якщо за міру примушення, що застосовується впродовж нескінченно малої миті, взяти суму добутків маси кожної точки і квадрата відхилення від вільного руху» (рис. 11.30).



232 18. *Gauſs*, *neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.*

18.

Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.

(Vom Herrn Hofrath und Prof. Dr. *Gauſs* zu Göttingen.)

⋮

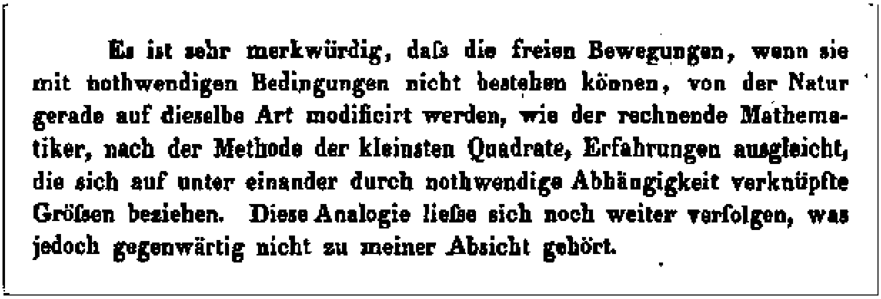
Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äuſsere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich gröſster Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maaſs des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Maſse betrachtet.

⋮

Рис. 11.30. К.Ф.Гаусс в 1828 р. та
його стаття про принцип найменшого примушення [Gauss, 1829]

Коротко кажучи, дійсний рух системи є таким, що величина *Zw* набуває значення, яке є найменшим з усіх можливих при рухах, сумісних з даними кінематичними в'язями.

Гаусс закінчує свою статтю таким зауваженням (рис. 11.31): «Дивно, що вільні рухи, коли вони не можуть задовольнити необхідні умови, модифікуються таким самим чином, як це роблять із результатами своїх обчислень математики, застосовуючи метод найменших квадратів для того, щоб узгодити ці результати з необхідними умовами, пов'язаними з природою питання».



Es ist sehr merkwürdig, daſs die freien Bewegungen, wenn sie mit nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Gröſsen beziehen. Diese Analogie ließe sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört.

Рис. 11.31. Висновки статті [Gauss, 1829]

Мабуть, зрозуміти наведене закінчення статті Гаусса відразу важко. Тому Л.С. Полак присвятив поясненню цієї тези досить багато уваги. Зокрема він писав [Полак, 2010, с.297-298]:

«У способі найменших квадратів визначається сума квадратів індивідуальних помилок m вимірів n параметрів, причому m>n, і значення параметрів проблеми визначаються з того принципу, що ця сума повинна бути мінімумом.

Принцип найменшого примушення містить 3n членів суми, що утворює Zw, які відповідають 3n спостережень. Це число більше числа невідомих q_i в силу m заданих кінематичних умов. «Помилка» формально представлена відхиленням величини діючої сили від сили інерції. Множник 1/m, може бути інтерпретований як ваговий коефіцієнт за аналогією з нерівноточними спостереженнями, яким приписується вага в залежності від їх особливостей. Таким чином, Гаусс сам підкреслює зв'язок свого принципу з розробленим ним обчислювальним методом найменших квадратів».

Згідно з поясненням Л.С. Полака величина, яка стоїть в дужках в (11.70), є для *i*-ї точки відхиленням від вільного руху, викликаним примушенням, і цю величину легко пов'язати з даламберовою втраченою силою (тобто тією частиною сили F_i, що не витрачається на рух *i*-ї точки):

$$Zw = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\mathbf{F}_i^*\right)^2 , \qquad (11.71)$$

де $\mathbf{F}_i^*$ – втрачена сила.

«Ми бачимо, – робить висновок Полак, – що втрачені сили і зворотні маси грають тут таку ж роль, як похибки і статистичні ваги в теорії помилок».

Зазначимо, що винахідником методу найменших квадратів був саме Карл Фрідріх Гаусс. Вперше він застосував цей метод в 1801 р. при визначенні еліптичної орбіти Церери, хоча основи методу були їм розроблені ще в 1795 р., коли йому було лише 18 років. Опублікував Гаусс свій метод тільки в 1809 р. у другому томі книги з теорії небесних тіл [Gauss, 1809]. При цьому в 1805 році цей самий метод було викладено в роботі Адрієна-Марі Лежандра «Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes». Але Гаусс спромігся відстояти пріоритет, надавши свою переписку з колегами.

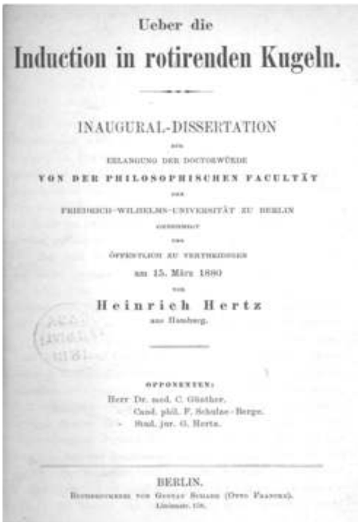
Повертаючись до принципу найменшого примушення, помітимо, що його неважко отримати за допомогою принципу Даламбера-Лагранжа, який є застосовним лише до голономних і неголономних систем з лінійними відносно швидкостей в'язями. Тому може здатися, що і принцип Гаусса є застосовним лише до зазначених систем. Насправді ж область застосування принципу Гаусса ширше, ніж область застосування принципу Даламбера-Лагранжа. Принцип Гаусса є застосовним до голономних і неголономних систем, в'язі в яких можуть бути і нелінійними відносно швидкостей (див., наприклад, [Суслов, 1944, стор. 358—359.)

Рівняння руху можуть бути отримані з принципу Гаусса, і при цьому немає необхідності вимагати, щоб диференціальні в'язі були лінійними відносно швидкостей. Нарешті, з принципу найменшого примушення витікає, що за відсутності заданих сил точка рухатиметься вздовж даної гладкої поверхні по кривій, що має найменшу кривизну. Це говорить про зв’язок принципу Гаусса з принципом прямолінійного шляху Герца.

Принцип Герца (принцип найменшої кривизни) [Голдстейн, 1957] – один із варіаційних принципів механіки, згідно з яким за відсутності активних сил із усіх кінематично можливих, тобто припускаємих в’язями траєкторій, дійсною буде траєкторія, яка має найменшу кривизну або «найпряміша». Тому принцип Герца, який має назву «принцип найпрямішого шляху», можна розглядати як узагальнення закону інерції Галілея. При застосуванні принципу Герца до механічної системи, яка має n матеріальних точок, під траєкторією системи розуміють кривизну у $3n$-мірному просторі, елемент дуги якої визначають рівністю:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathrm{d}s_i^2 ,$$

де M - маса усієї системи, m_i і $\mathrm{d}s_i$ - маси і елементи траєкторії окремих точок. Принцип Герца при



Ueber die
Induction in rotirenden Kugeln.

INAUGURAL-DISSERTATION

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN
am 15. März 1880

Heinrich Hertz
aus Hamburg.

OPPONENTEN:
Herr Dr. med. C. Günther.
Cand. phil. F. Schulze-Berge.
Stud. jur. G. Hertz.

BERLIN.

Праця Герца «Про індукцію в кулях, що обертаються» (Берлін, 1880) ідеальних в'язях має такий самий математичний вираз як і принцип Гаусса ($\delta Z = 0,$ де Z - міра примушення), тому що кривизна $3n$-мірної траєкторії системи пропорційна кореню квадратному із міри примушення. Свій принцип Герц застосував для побудови механіки, у якій дії активних сил замінюються введенням відповідних в'язей.

Жан ле Рон
Д'Аламбер,
фр. Jean Le Rond
D'Alembert, d'Alembert
(1717–1783)

Філіп Едвард Бертран
Журден,
англ. Philip Edward
Bertrand Jourdain
(1879-1919)

Йоганн Карл Фрідріх
Гаусс,
нім. Johann Carl
Friedrich Gauß
(1777-1855)

Генріх Рудольф Герц,
нім. Heinrich Rudolf
Hertz
(1857-1894)

Віддаючи належне принципам Журдена, Гаусса та Герца, все ж зауважимо, що найбільш універсальним і зручним у плані теоретичного і практичного використання є, мабуть, принцип Д'Аламбера-Лагранжа. Сам Йоганн Карл Фрідріх Гаусс, перед виведенням принципу найменшого примушення, писав [Gauss, 1829]: «Як відомо, принцип віртуальних швидкостей перетворює будь-яку проблему статики в питання чистої математики, а за допомогою принципу Д'Аламбера динаміка, в свою чергу, зводиться до статики. Звідси випливає, що жоден основний принцип рівноваги і руху не може істотно відрізнятися від двох згаданих нами вище принципів і що, яким би не був цей принцип, його завжди можна розглядати як більш-менш безпосередній висновок з них».

11.11. Принцип Гамільтона-Остроградського. Двоїстий принцип Гамільтона-Пуанкаре

> *Хоча закон найменшої дії став … в ряд з найвищими теоремами фізики, проте, його претензії на космологічну необхідність на підставі економії у Всесвіті тепер зазвичай відкидаються. Серед інших причин це випливає з того, що величина, яка претендує на те, щоб бути зекономленою, насправді часто марнотратно витрачається.*
>
> В.Р. Гамільтон

Значним етапом в історії варіаційних принципів, підготовленим розвитком науки і техніки, стали дослідження ірландського математика В. Гамільтона.

Вільям Ровен Гамільтон (1806-1865) – видатний ірландський математик і фізик XIX ст. Основні його роботи присвячені математичній оптиці, механіці, варіаційному численню. Встановив для консервативних систем загальний інтегральний варіаційний принцип класичної механіки (1833). Цей принцип був узагальнений М.В. Остроградським (1850) на неконсервативні системи (принцип Гамільтона-Остроградського). Числення кватерніонів, у якому закладені основи векторного (і операційного) числення і яке є першою некомутативною алгеброю, оператор Гамільтона – такі основні досягнення, що вписали ім'я Гамільтона в історію фізики і математики.

Протягом довгого часу В. Гамільтон цікавився уявними величинами, їх геометричною інтерпретацією і можливими узагальненнями. У 1843 р. він дійшов до відкриття числення кватерніонів – гіперкомплексних чисел. Це його основний і найбільш значимий внесок у математику. 16 жовтня 1843 р. він встановив фундаментальну теорему множення кватерніонів, яка лежить в основі некомутативних алгебр. У листопаді 1843 р. він зробив доповідь про це відкриття у Королівській Ірландській академії.

От як сам В. Гамільтон пише про це у листі до сина 5 серпня 1865 р.: «… на 16-й день того ж місяця – так сталось, що це був понеділок і день наради Королівської ірландської академії - я йшов, щоб бути присутнім і головуючим, і ваша мати, яку, мабуть, хтось підвіз сюди, гуляла зі мною вздовж Королівського каналу; і хоча вона розмовляла зі мною, але плин думок, що відбувався в моїй голові, нарешті привів мене до результату, важливість якого я відразу ж відчув. Здалось, що замкнувся електричний ланцюг і спалахнула іскра, вісник того (як я миттєво відчув), що багаторічна робота завершилася виразно спрямованою думкою ..., яка стане надбанням інших, якщо мені доведеться жити досить довго, щоб у точних виразах повідомити про відкриття. Я не міг чинити опору імпульсу – нефілософському за суттю – накреслити на камені мосту Брум, поруч з яким ми проходили, основну формулу з позначеннями i, j, k, а саме $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, яка містила розв'язок проблеми. Але звичайно, вирізьблений ножем напис відтоді геть здерся. Більш довговічне повідомлення залишилося, однак, в записах книги нарад академії (запис 16 жовтня 1843 р.), яке зафіксувало той факт, що я тоді попросив і одержав дозвіл зробити повідомлення про кватерніони на перших загальних зборах сесії, яке і відбулося відповідно в наступному місяці у понеділок 13-го листопада». (Переклад листа від сера В.Р. Гамільтона до його сина, преподобного Арчібальда Гамільтона, датованого 5 серпня 1865 року, згідно джерелу http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Letters/ BroomeBridge.html).

У механіці В. Гамільтон є прямим продовжувачем напрямку Ж.-Л. Лаґранжа. Це виражається не тільки в його захопленні «Аналітичною механікою», яку він називав «науковою поемою», і не тільки в тому, що він працював аналітично, не використовуючи наочних геометричних уявлень навіть там, де вони могли б надати йому безпосередню допомогу. Найважливішою обставиною тут є точка зору В. Гамільтона на задачі дослідження в галузі механіки, яка зближує його з Ж.-

Л. Лаґранжем: механічні задачі суть клас математичних задач, розробка механіки є розробка математичних методів.

Для поглядів В. Гамільтона є характерним такий випадок. Хтось якось помітив: «Я не знаю людей, які не бачивши конічної рефракції, повірили б у її існування. Я сам звернув увагу двох десятків математиків, показуючи їм конус світла». В. Гамільтон відповів: «Наскільки це відрізняється від мого підходу. Якби я тільки бачив конічну рефракцію, я б ніколи не повірив у неї. Мої очі часто обдурювали мене. Я вірю у конічну рефракцію, тому що я довів її» [Truesdell, 1980].

Принцип Гамільтона є інтегральним підходом, за допомогою якого можна реалізувати ефективні алгоритми побудови рівнянь руху. Цей варіаційний принцип виконується як для скінченномірних, так і для континуальних динамічних систем. З метою спрощення викладення розглянемо скінченномірні динамічні системи [Баженов та ін., 2012].

Нехай стан деякої механічної системи характеризується n узагальненими координатами $q_1(t)$, $q_2(t),...,q_n(t)$. Розглянемо $(n+1)$-мірний розширений координатний простір q_1, $q_2,...,q_n$, t (рис. 11.32). Нехай в момент часу t_1 механічна система знаходиться в точці B, що визначає деякий динамічний стан системи. Припустимо, що система зазнає деякого динамічного впливу. Внаслідок цього впливу стан системи еволюціонуватиме.

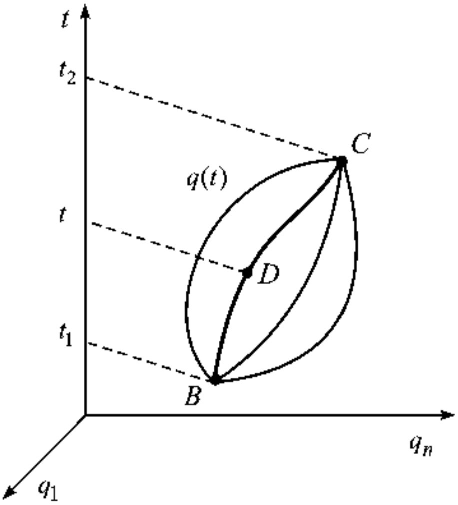


Рис. 11.32

Узагальнені координати

$$\mathbf{q}^0(t) = (q_1^0(t), q_2^0(t), ..., q_n^0(t))^T$$

опишуть деяку криву в розглядуваному координатному просторі. Нехай у момент часу t_2 система знаходитиметься в точці C. Отже, за проміжок часу від t_1 до t_2 механічна система перемістилася по кривій BC.

Кожному моменту часу $t \in [t_1, t_2]$ відповідає деяка точка на кривій BC. Під дією сил, що прикладаються, механічна система деформується. В кожний момент часу t можна визначити кінетичну енергію системи $T(t)$, енергію деформації $U(t)$, а також роботу $A(t)$ зовнішніх сил на відповідних переміщеннях; до зовнішніх сил належать також неконсервативні сили опору руху (дисипативні сили). Коли б система рухалася по іншій кривій, що з'єднує точки B і C, то кожному моменту часу t відповідали б, взагалі кажучи, інші значення T, U і A.

У випадку, коли при аналізі механічної системи застосовується перший підхід (розглядаються рівняння динамічної рівноваги), в точках кривої $\mathbf{q}(t,0) = \mathbf{q}^0(t)$ ці рівняння виконуються, тобто векторна сума сил інерції, пружних сил і зовнішніх сил дорівнює нулю. Для точок, що лежать на інших кривих, рівняння динамічної рівноваги, взагалі кажучи, не задовольняються. Відрізнити дійсний («прямий») шлях від інших («манівців») можна за величинами $T(t)$, $U(t)$ і $A(t)$. Принцип Гамільтона стверджує, що на «прямих» шляхах

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta A dt=0. \tag{11.72}$$

Зазначимо, що виходячи з принципу Гамільтона, можна одержати рівняння руху, які повністю збігаються з рівняннями, отриманими за допомогою методу динамічної рівноваги або принципу можливих переміщень. Більш того, якщо будь-який з трьох принципів, що розглядалися, взяти за вихідний, то інші два можна отримати з нього як наслідок.

У більшості механічних систем кінетична енергія виражається через узагальнені координати та їх перші похідні за часом, потенціальна енергія – тільки через узагальнені координати, а робота неконсервативних сил на можливих переміщенням, викликаних варіюванням узагальнених координат, є лінійною функцією цих варіацій. Саме завдяки цій обставині вдається досить легко перейти від інтегральної рівності (11.72) до системи диференціальних рівнянь. Поряд із рівністю (11.72) для запису принципу Гамільтона може бути застосований наступний вираз:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt+\int_{t_1}^{t_2}\delta A dt=0\,, \tag{11.73}$$

де так звана функція Лаґранжа (кінетичний потенціал)

$$L=L(t,y_1,y_2,\dots,y_n,\dot{y}_1,\dot{y}_2,\dots,\dot{y}_n)=T-U \tag{11.74}$$

є різницею між кінетичною та потенціальною енергією системи.

Сам В. Гамільтон розглядав випадок, коли функція Лаґранжа L не залежить явно від часу t, тобто $L=L(y_j,\dot{y}_j)$, що відповідає випадку стаціонарних в’язей. Дослідження В. Гамільтона були узагальнені М.В. Остроградським у 1848 р. і В.Ф. Донкіним у 1854 р. на випадок, коли функція Лаґранжа залежить явно від часу t, тобто $L=L(y_j,\dot{y}_j,t)$, що відповідає нестаціонарним в’язям. В зв’язку з цим принцип Гамільтона називають також принципом Гамільтона-Остроградського.

Зазначимо, що із умови рівності нулю першої варіації функції дії ($\delta S=0$), ще не витікає, що функція дії (по Гамільтону) S має екстремальні значення. Необхідно дослідити також другу варіацію $\delta^2 S$.

Серре показав, що друга варіація дії $\delta^2 S$ для дійсного руху при деяких обмеженнях, які накладені на границі інтегрування, є додатною і, відповідно, функція S має мінімум. Тому принцип Гамільтона називають також принципом найменшої дії.

В. Гамільтон так визначає місце свого принципу найменшої дії в системі фізичних наук: «Хоча закон найменшої дії став, таким чином, у ряд найвищих теорем фізики, все ж його претензії на космологічну необхідність на підставі економії у Всесвіті тепер зазвичай відкидаються. Серед інших причин це випливає і з того, що величина, яка претендує на те, щоб бути зекономленою, насправді часто марнотратно витрачається».

У зв'язку з тим, що задача пошуку мінімуму інтеграла S є задача варіаційного числення, принцип Гамільтона відноситься до варіаційних принципів механіки. Він є інтегральним принципом, оскільки рух системи вивчається на скінченному проміжку часу. Принцип Гамільтона є інваріантним відносно вибору системи координат.

Згідно з принципом Гамільтона-Остроградського стан системи характеризується змінними Лаґранжа $t, y_j, \dot{y}_j \ (j=1,\dots,n)$, тобто моментом часу, а також положенням та швидкостями точок системи.

Існує також інше формулювання принципу Гамільтона – у формі Пуанкаре (принцип Гамільтона-Пуанкаре), в якому для характеристики стану системи використовуються змінні Гамільтона $t, y_j, p_j \ (j=1,\dots,n)$, де p_j – узагальнені імпульси, що визначаються рівностями

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j}, \quad j=1,\dots,n, \tag{11.75}$$

причому змінні Гамільтона можуть бути виражені через змінні Лаґранжа і навпаки, а стан системи можна характеризувати як значеннями змінних Лаґранжа, так і значеннями змінних Гамільтона.

Математичний запис принципу Гамільтона-Пуанкаре має вигляд:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{y}_j - H \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \tag{11.76}$$

де функція Гамільтона $H = H(y_j, p_j, t)$ є результатом переходу від функції Лаґранжа $L(y_j, \dot{y}_j, t)$ за допомогою перетворення Лежандра та теореми Донкіна

$$H(y_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \widehat{\dot{y}}_j - L(y_j, \widehat{\dot{y}}_j, t). \tag{11.77}$$

Через $\widehat{\dot{y}}_j$ позначені узагальнені швидкості, виражені через змінні Гамільтона. При цьому позиційні координати y_j та час t є пасивними змінними.

Зазначимо, що оскільки перетворення Лежандра є інволютивним, то неважко за тією самою схемою повернутись до функції і змінних Лаґранжа. Загальна схема взаємного перетворення виглядає таким чином:

Стара система	*Нова система*
Функція: Лаґранжа, змінні: швидкості	Функція: Гамільтона , змінні: імпульси

Пасивні змінні: позиційні координати, час

Дуальна природа перетворення відбивається в наступних операціях:

1. Введення нових змінних

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}$,	$\dot{y}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$,

2. Введення нових функцій

$H = \sum p_i \dot{y}_i - L$,	$L = \sum p_i \dot{y}_i - H$,

3. Вираження нових функцій через нові змінні

$H = H(y_1,...,y_n,p_1,...,p_n,t)$,	$L = L(y_1,...,y_n,\dot{y}_1,...,\dot{y}_n,t)$.

Отже, виходячи з функції Лаґранжа L і за допомогою трьох послідовних операцій можна побудувати функцію Гамільтона H. Так само можна почати з функції Гамільтона H і побудувати, використовуючи три послідовні операції, функцію Лаґранжа L.

Зазначимо також, що похідні функцій Лапласа і Гамільтона за пасивними змінними згідно із теоремою Донкіна пов'язані співвідношеннями

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \ \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона-Остроградського (11.72) можна отримати систему n звичайних диференціальних рівнянь *другого* порядку відносно узагальнених координат $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, а за допомогою принципу Гамільтона-Пуанкаре (11.20) отримуємо систему $2n$ диференціальних рівнянь *першого* порядку відносно узагальнених координат $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ та узагальнених імпульсів $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$.

Останні 22 роки свого життя Гамільтон майже цілком присвятив розробці і розвитку числення кватерніонів і їх практичному застосуванні.

Гамільтон помер 2 вересня 1865 р. у віці 60 років. Йому належить 141 друкована робота з різних питань математики, оптики і динаміки.

Так були закладені основи аналітичної механіки Гамільтона, що стали надалі основою динаміки в сенсі Гамільтона-Якобі, так як чудовий німецький математик Якобі (1804-1851) блискуче розвинув, уточнив і значно збагатив ідеї Гамільтона в області інтегрування диференціальних рівнянь руху.

Карл Густав Якоб Якобі народився в 1804 р. в родині потсдамського банкіра. Він закінчив Берлінський університет і в 1825 р. захистив дисертацію. З 1826 р. він протягом 17-ти років працював у Кенігсберзі.

Різнобічна математична творчість Якобі, його блискучий педагогічний талант, знаменитий сарказм, що страхав супротивників, дозволили йому не тільки широко впливати на сучасників, а й створити наукову школу. Для Якобі характерно постійне прагнення до нового, бажання змін, йому не вистачає спокою, необхідного для завершення логічно струнких побудов. Недарма Якобі одного разу сказав: «Панове, для гауссовської строгості у нас немає часу». Про математику Якобі зауважив: «Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt» (Математика належить до числа тих наук, які зрозумілі самі по собі).

Бурхливий розвиток аналітичних методів розв'язання задач механіки у XVII-XVIII ст. у працях П. Ферма, Р. Декарта, Г. Галілея, І. Ньютона, Я.І. Бернуллі, І.І. Бернуллі, Г.Ф.А. Лопіталя, Г.В. Лейбніца, Г. Гюйгенса, П.Л.М. Мопертюї, Ж.Л. Д'Аламбера, Л. Ейлера, Ж. Серре, Ж Лагранжа, П. Лапласа, К. Гаусса, Ж. Фур'є та інших привів до створення основ аналітичної механіки.

Наступним етапом розвитку аналітичної механіки стали дослідження С. Пуассона і У.Р. Гамільтона в двадцятих-тридцятих роках XIX ст., К. Якобі, М.В. Остроградського, А. Лежандра, Б. Родрігеса, М.С. Лі, які були подовжені у працях Ф. Слудського, М. Тализіна, Д. Бобильова, І.Д. Соколова, Ж. Бертрана, Й. Сомова, Н. Брашмана, І. Рахманінова, О. Гельдера, П. Воронця, Г. Суслова, К. Неймана, Ж. Адамара, Е. Уіттекера, Е. Бельтрамі, П. Аппеля, С. Чаплигіна, О. Ляпунова, М. Четаєва, Л. Больцмана, О. Гьольдера, Ж. Делоне, М. Реті, Е. Рауса, А. Пуанкаре, Г. Герца, Д. Гільберта, Ф. Клейна, Е. Нетер, О. Больца та ін.


Сер Вільям Ровен
Гамільтон
англ. Sir William Rowan
Hamiltont
(1806 – 1865)


Михайло Васильович
Остроградський
(1801 – 1862)


Жуль Анрі Пуанкаре,
фр. Jules Henri
Poincaré
(1854 – 1912)


Карл Густав Я́коб
Якобі,
нім. Carl Gustav Jacob
Jacobi
(1804 – 1851)

Таким чином, у перший період формування варіаційних принципів механіки, їхній розвиток по суті невід'ємний від варіаційного числення і проблеми побудови аналітичної механіки. Розвиток варіаційного числення давав математичні методи аналітичної механіки, розвиток останньої був однією із важливих причин, що привели до створення варіаційного числення, а надалі постійно розширювало коло його проблем.

НАРИС 12

ОСНОВНІ ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ І ФУНКЦІОНАЛИ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

«ceiiinosssttuv»
Ut tensio, sic vis
Яке подовження, така і сила

Роберт Гук

Теорія споруд була певною мірою заснована італійцями, такими як Галілей, Марчетті, Фабрі, Гранді та інші. Останнім часом у відповідь на запити, висунуті розвитком залізниць, згадана теорія досягла нових значних успіхів, і італійці знову відіграли провідну роль у цьому поступі. Серед недавніх публікацій слід відмітити роботи Аллієві, Біадего, Каневаццi, Керадіні, Клерікетті, Кремони, Фаваро, Фаверо, Фігарі, Гвіді, Модільяні, Савіотті, Сайно, і це лише деякі з авторів, яких варто згадати в цьому переліку.

Праці Кастільяно виділяються навіть серед цих робіт. Хоча ми, німці, також пишаємось своїми досягненнями в механіці, однак повинні визнати, що ми багато чого навчилися у наших італійських колег.

Е. Вінклер

12.1. Гук, Маріотт, Юнг

Думати – ось найважча робота, і тому мало хто за неї береться.

Г. Форд

Хто мало думає, той багато помиляється.

Леонардо Да Вінчі

Знаний англійський учений-енциклопедист Роберт Гук (1635-1703), наукова творчість якого охоплює багато розділів природознавства, у 1660 р. сформулював, а у 1676 р. записав у своїй криптограмі наступне твердження «Яке подовження, така і сила» (навіть не навпаки), що ввійшло в історію науки як закон Гука і стало фундаментом, на якому надалі будувалась механіка пружних тіл. Працюючи над створенням конструкції регулятора точного ходу годинника, Р. Гук робив випробування плоских спіральних пружин і встановив, що кут закручування пружини пропорційний прикладеному моменту. Потім він повторив досліди на розтягнутій крученій пружині, розтягнутому сталевому дроті, консольній дерев'яній балці, зігнутою силою, прикладеною на вільному кінці. У ході цих досліджень він встановив, що в усіх випадках переміщення прямо пропорційні прикладеним силам [Hooke, 1931]. Таким чином, закон Гука був отриманий експериментально для наступних типів навантаження: розтяг (сталевий дріт), кручення (кручена пружина), згин (спіральна пружина і дерев'яна балка).

Цікаво, що як і життя Р. Гука було сповнено таємниць, так і саму появу його видатного закону не оминули загадки. Закон був надрукований в книзі Гука у вигляді криптограми «ceiiinosssttuv».

Чотирнадцять латинських літер, розставлених за абеткою. Якщо їх упорядкувати шляхом, відомим тільки автору криптограми, то з них починаються слова фрази, яка розкриває сутність закону - «Ut tensio, sic vis», тобто яке подовження така і сила.

Значення і роль закону Гука такі важливі тому, що він - загальний. Відомий французький математик, фізик і філософ А. Пуанкаре в своїй праці «Наука і метод» писав: «... усякий закон буде тим більш цінним, чим більш він буде загальним». До цього слід додати, що чим змістовнішим і загальнішим є науковий закон, тим більш стислою є форма, в якій він записаний, тим він простіший. Закон Гука повністю відповідає цій думці.

Тільки скорочений перелік відкриттів і винаходів Р. Гука в різних галузях техніки займе багато місця.

У 1665 р. Р. Гук вперше описав будову деяких рослинних тканин, зокрема, пробки, яка складається із маленьких комірок, обмежених перетинками. Так була відкрита клітина. Зусиллями багатьох учених, головним чином XIX і першої половини XX ст. склалась наука про клітину, яка отримала назву цитології.

В тому ж році Р. Гук видав класичну працю «Мікрографія», присвячену оптиці і мікроскопії (він, до речі, удосконалив мікроскоп). Тут він навів, зокрема, результати вивчення будови рослин і ввів термін «клітина».

Р. Гука визнавали хорошим архітектором. Після пожежі в Лондоні в 1666 р. він був головним помічником Кристофера Рена з відновлення міста. У співробітництві з Реном і самостійно побудував як архітектор багато будівель (наприклад, Грінвічську обсерваторію, церкву Вілленського приходу у Мілтон Кінсє), співпрацював з Реном у будівництві Лондонського собору св. Павла, купол якого побудований за його власним методом, запропонував нову схему планування вулиць при відновленні Лондона.

Р. Гук займався хвильовою теорією світла, описав явище дифракції і низку інших світлових явищ. Він проводив досліди з дерев'яними консольними балками, вимірюючи їхні прогини, і дійшов висновку, що на опуклому боці волокна - розтягнуті, на угнутому - стиснуті. В 1666 р. Р. Гук зробив доповідь в Королівському науковому товаристві, в якій, зокрема, сказав: «Я маю намір викласти систему всесвіту, що вельми відрізняється від усіх досі запропонованих...».

По суті, він обґрунтував закон всесвітнього тяжіння. В листі до І. Ньютона в 1668 р. він писав, що «сила, яка керує рухом планет, змінюється в деякій залежності від відстані». Зрештою проникливі думки Р. Гука так і залишилися незавершеними. Пріоритет відкриття закону всесвітнього тяжіння належить І. Ньютону (1683). Але Р. Гук не міг з цим змиритись і розпочав сумнозвісний позов до І. Ньютона за авторство закону. Врешті решт, І. Ньютон одного разу зробив посилання на Р. Гука і інцидент було вичерпано.

В.І. Арнольд у книзі «Гюйгенс і Барроу. Ньютон і Гук» аргументує, в тому числі документально, твердження про те, що саме Р. Гук відкрив закон всесвітнього тяжіння (закон зворотніх квадратів для центральної гравітаційної сили) і навіть цілком коректно обґрунтовав його для випадку кругових орбіт. І. Ньютон же доробив це обґрунтування для випадку еліптичних орбіт (Р. Гук за власною ініціативою повідомив І. Ньютону свої результати і попросив зайнятися його цією задачею). Наведені там цитати І. Ньютона, який оспорював пріоритет Р. Гука, говорять лише про те, що І. Ньютон вважав свою частину доведення значно більш важливою (в зв'язку з її складністю і т.ін.), але зовсім не заперечує належність саме Р. Гуку формулювання закону. Таким чином, пріоритет формулювання і первинного обґрунтування слід віддати Р. Гуку і він же, мабуть, ясно сформулював І. Ньютону задачу про завершення обґрунтування. І. Ньютон стверджував, що зробив це відкриття незалежно і раніше, але він нікому не повідомляв і не залишив жодних документальних свідоцтв цього. Крім того, І. Ньютон зупинив роботи по цій темі, які поновив, за його зізнанням під впливом Р. Гука.

Наведений факт не є єдиною суперечкою Р. Гука за свій пріоритет. Відомо, що він оспорював свої права з К. Гюйгенсом та іншими вченими. Пояснюється це різнобічністю інтересів і захоплень Р. Гука, внаслідок чого він проривався у сферу наукових досліджень інших дослідників. Швидко добиваючись успіхів, він остигав, йому частенько не вистачало терпіння і часу довести справу до кінця.

Остання цікава риса його характеру така. Він був товариською людиною і зустрічався з різними людьми. Його нерідко можна було бачити в порту. Як результат розпитувань моряків, він в 1696 р. зробив в Королівському товаристві доповідь про нову мапу «Татарії» – просторої території, до якої входить Урал і західна частина Сибіру.

Майже одночасно з Р. Гуком (1680 р.) і незалежно від нього закон, який ми називаємо ім'ям Гука, сформулював француз Е. Маріотт: «Навіть найбільш тверді тіла – скло і залізо – деформуються пропорційно навантаженню». Тобто, $f = kP$, де P – навантаження, f – деформація стержня, k – коефіцієнт пропорційності.

Едм Маріотт (1620-1684) - французький фізик, один із засновників і перших членів Паризької академії наук (1666). Народився в Діжоні, був пріором монастиря св. Мартіна в містечку Сан-Мартан су Бон (St. Martin sous Beaune) поблизу Діжона [Храмов, 1983, с. 179].

Його наукові роботи відносяться до механіки, термодинаміки, оптики. У 1676 р. встановив закон залежності зміни об'єму газу від тиску при сталій температурі (зазвичай його називають «законом Бойля-Маріотта», оскільки цей закон був відкритий і опублікований у 1662 р. Р. Бойлем). Передбачив різноманітні застосування цього закону, зокрема, розрахунок висоти місцевості за показаннями барометра. Описав численні досліди з вивчення течії рідин по трубах, експериментально підтвердив висновки Г. Галілея і Е. Торрічеллі відносно швидкості витоку рідини. Дослідив висоту підйому води у фонтанах і склав таблиці залежності висоти підйому води від діаметру випускних отворів. Вивчав деформації пружних тіл, коливання маятника. У «Трактаті про удар і співудар тіл» (1678) узагальнив дослідження у цій галузі. Довів збільшення об'єму води при замерзанні. У 1666 р. виявив наявність в оці людини сліпої плями. Досліджував кольори, зокрема, вперше описав світлові кольорові кільця навколо Сонця і Місяця (оптичне явище гало), вивчав веселку, променеву теплоту, показав різницю між тепловими і світловими променями. Помер у Парижі у 1684 р.

Розшифрування коефіцієнту пропорційності k стало можливим через 130 років, коли англійський фізик Томас Юнг (1773 – 1829) при дослідженні розтягу-стиснення вперше (1807) ввів поняття модулю пружності E, названого його ім'ям (модуль Юнга). Тепер можна було записати $f = \Delta l = \frac{Pl}{EF}$, де l –

Роберт Гук,
англ. Robert Hooke
(1635–1703)

Едм Маріотт,
фр. Edme Mariotte
(1620–1684)

Томас Юнг,
англ. Thomas Young
(1773–1829)

довжина стержня, F – площа поперечного перерізу, E – модуль Юнга, P – навантаження (сила).

Цікаво, що за фахом Т. Юнг - лікар, дослідник в галузі медицини і фізіології. Його праці стосуються також оптики, акустики, теплоти, механіки, астрономії, геодезії,філології. Він один з основоположників хвильової теорії світла, пояснив явище інтерференції світла тощо.

По-різному люди приходять в науку. Т. Юнг належить до тих, хто є дослідником від природи. У дворічному віці навчився читати, в шість – почав самоосвіту, вже з дев’яти років вивчав математику і мови. В чотирнадцять років він володів французькою, італійською, єврейською, фарсі і арабською і почав давати приватні уроки. В п’ятнадцять років він розпочав роботу над «Філософським трактатом». З дев’ятнадцяти років почав вивчати медицину одразу в трьох університетах. Медицина стала справою всього його життя. Одночасно він представив у Королівське наукове товариство працю «Теорія зору», а невдовзі «Начала і досліди, що стосуються звуку і світла». В 23 роки отримав докторський ступінь з медицини. В 1807 році видав два томи по 900 сторінок кожний з натуральної філософії. Він глибоко дослідив єгипетські ієрогліфи і теорію музики. Грав на всіх відомих музичних інструментах, навіть на шотландській волинці. Він чудово знав живопис. При всьому цьому він все життя працював практикуючим лікарем.

Сказано вже багато дивовижного про Т. Юнга, але дуже хочеться ще додати до його повного неповторного портрета. Ще в дитинстві захопившись ботанікою, він збудував для своїх дослідів мікроскоп. А оскільки він до всього підходив розважливо, вивчив для розрахунків диференціальне числення, а для роботи - токарну справу. Під час навчання в університетах виступав у цирку наїзником, вольтижером на двох конях одразу і танцював на канаті не гірше від професійного циркача.

Різнобічність талантів Т. Юнга дозволяє багатьом дослідникам порівнювати його з Леонардо да Вінчі. Т. Юнг розробив особисте правило: «Всяка людина спроможна робити те, що роблять інші люди», і все життя сповідував його. Він займався різноманітними справами і неодмінно здобував успіх.

Т. Юнг розвинув теорію згину балок, теорію ударного руйнування твердих тіл. Він вперше ввів термін «енергія». Зазначимо, що термін «робота» був введений Г.-Г. Коріолісом.

Т. Юнг встановив обмеженість закону Гука, тобто справедливість його тільки в початковій стадії навантаження, а також визначив поняття модуля пружності, хоча й у формі, відмінній від прийнятої в даний час. Т. Юнг ввів дві величини: вагу модуля EA, де A - площа поперечного перерізу стержня, і висоту модуля $\frac{E}{g \cdot \rho}$, де ρ - щільність матеріалу тіла. Перша величина (жорсткість стержня при розтягуванні) не є сталою матеріалу. Друга - стала матеріалу, що має розмірність довжини. Визначення модуля пружності дано Т. Юнгом в такій вельми туманній формі: «Модуль пружності якої-небудь речовини являє собою стовпчик цієї речовини, здатний призвести тиск на свою основу, який так само відноситься до ваги, що створює деяку ступінь стиснення, як довжина стовпчика до зменшення його довжини».

Т. Юнг звернув увагу на те, що при розтягуванні-стисненні поперечні розміри стержня змінюються. Ці положення сформульовані їм у двотомному курсі лекцій, виданих у 1807 р. [Young, 1807], які Т. Юнг читав в Королівському інституті.

Т. Юнг також застосовує такі вирази, як «вага модуля» і «висота модуля», зазначаючи, що висота модуля для даного матеріалу не залежить від площі поперечного перерізу. Вага модуля дорівнює добутку величини, яку ми називаємо зараз модулем Юнга, на площу поперечного перерізу бруса. Т. Юнг визначив величину модуля пружності сталі, спостерігаючи за частотою вібрацій камертона, і знайшов, що він дорівнює $29 \cdot 10^6$ *фунт/дюйм*^{2} = $2 \cdot 10^5$ *МПа.*

Механік і історик механіки К. Трусделл вказує [Truesdell, 1968], що в манускрипті Л. Ейлера, написаному в 1727 р. (за 80 років до виходу у світ книги Т. Юнга), але опублікованому тільки в 1862 р., міститься поняття модуля пружності E, хоча для його використання надалі він застосовував величину $\frac{E}{g \cdot \rho}$, тобто висоту модуля за Юнгом [Белл, 1984].

Математик, механік і архітектор Джордано Ріккатті (1709-1790) по експериментально виміряній частоті згинальних коливань сталевих і латунних циліндрів в 1767 р. визначив співвідношення їх модулів пружності [Riccati, 1782], тобто здійснив перше експериментальне дослідження модулів пружності.

Абсолютна величина співвідношення поперечної деформації до поздовжньої, постійна в межах справедливості закону Гука, пов'язана з ім'ям С.-Д. Пуассона, який ввів її у своєму мемуарі, представленому в Паризьку академію наук в 1829 р. [Poisson, 1829], і на основі рариконстантної молекулярної теорії встановив, що вона дорівнює 1/4.

12.2. Варіаційні принципи механіки твердого деформівного тіла

> *Принцип, обраний нами в якості основи для міркувань, полягає в наступному: яким би не був характер взаємодії елементів матеріальної системи, сума добутків внутрішніх сил та елементів відповідних зміщень, утворена для будь-якої даної маси, завжди є точним диференціалом деякої функції.*
>
> Дж. Грін

Після виходу в світ в 1638 р. знаменитої книги Г. Галілея (Galileo Galilei, Discorsi e Dimonstrazioni matematiche, Leiden, 1638) і аж до 1820 р. в галузі механіки проводились дослідження різних частинних проблем. Але була одна істотна обставина, яка повинна була привести до широких узагальнень. Ця обставина полягала в розвитку фізичних теорій про будову речовини. У XVIII ст. уявлення Декарта про всезаповнюючу тонку матерію (plenum) з пронизуючими її «вихорами» поступилося місцем ньютонівській концепції матеріальних тіл, що складаються з найдрібніших частинок, взаємодія яких здійснюється за допомогою центральних сил. Ньютон вважав свої «молекули» частинками скінченних розмірів і певної форми [Newton, 1717], але у його послідовників вони звелися поступово до матеріальних точок.

Найбільш чітко виражена теорія цього типу належить Бошковичу [Boscovich, 1763], для якого матеріальні точки були тільки постійними центрами сил. До цього ряду ідей відноситься теорія капілярності Лапласа [Laplace, 1806] і перше дослідження Пуассона про рівновагу "пружної поверхні" [Poisson, 1814]. Однак протягом довгого часу не було зроблено ніяких спроб отримати загальні рівняння рівноваги і руху пружного твердого тіла.

До кінця 1820 р. ньютонівська концепція про будову речовини і закон Гука надали засоби для узагальнення принципу можливих робіт в Mecanique Analytique, чим відкрили широку дорогу для нових досліджень як в механіці, так і в усіх інших галузях математичної фізики. Як зазначає А.Ляв [Ляв, 1935], фізична наука вийшла з початкового періоду свого розвитку з визначеною методикою побудови гіпотез і індукції, а також спостережень і дедукції, з ясною метою дослідження законів, які пов'язують різні явища між собою, і з накопиченим фондом аналітичних методів дослідження. Настав час створення загальних теорій.

Рене Декарт,
фр. René Descartes
(1596 -1650)

Руджер Йосип Бошкович,
хорв. Ruđer Josip
Bošković
(1711-1787)

Одна з можливостей введення поняття про напруження в загальну схему абстрактних понять теоретичної механіки (Rational Mechanics) полягає в прийнятті його, як основного поняття, взятого з досвіду. Тут мається на увазі просто поняття про взаємодію між двома дотичними тілами або двома частинами одного тіла, розділеними уявною поверхнею. Фізична реальність подібної дії згідно з цією точкою зору приймається як основа для включення цього поняття в загальну схему. Може бути в цьому сенсі слід розуміти слова Кельвіна і Тейта [Thomson & Tait, 1867, vol.1, p. 220] про те, що сила «є предмет безпосереднього сприйняття» (force is a direct object of sense). Ця ідея лежить в основі методу, яким користувався Ейлер, формулюючи принципи гідростатики і гідродинаміки, і яку застосовував Коші [Cauchy, 1827a] в своїх перших роботах по теорії пружності. Якщо наслідувати ці ідеї, то треба робити відмінності між двома типами сил, саме: масовими силами (body forces) і поверхневими напруженнями (surface tractions); перші належать до числа сил, що діють на відстані (дальнодія), другі діють при зіткненні тіл.

Натуралісти (natural philosophers), як правило, не схильні приймати і дальнодію і дію при зіткненні як рівноправні основні поняття. Вважалося, що більш глибокий аналіз відкриє можливість встановити тотожність обох видів дії. Інколи намагалися пояснити дальнодію за допомогою напружень в середовищі, також намагалися, навпаки, напруження, які взагалі вважалися результатом близькодії, пояснити шляхом уявлення про центральні сили, що діють безпосередньо на відстані. Коливання у поглядах на це питання, які мали місце в науці, відображені в роботі Максвелла [Maxwell, 1890]. Прикладом прагнень першого роду може служити введення системи максвеллівських напружень, які еквівалентні електростатичному тяжінню і відштовхуванню [Maxwell, 1881]. Метод центральних сил застосовувався в багатьох дослідженнях з теорії пружності. Коші використав цей метод для визначення співвідношень між компонентами напруження і деформації в кристалічному тілі [Cauchy, 1828b]. Будь-яке подібного роду зведення близькодії до дальнодії стирає різницю між поверхневим напруженням і масовими силами; зазвичай намагалися підтримати цю відмінність шляхом гіпотези про молекулярному будову тіл. У теорії Коші, наприклад, несправжня блізькодія приводиться до дальнодії між молекулами, причому приймається, що ця дія не розповсюджується за межі так званої «області молекулярної дії». Масові сили, навпаки, розглядаються, як діючі на значній відстані. Таким чином, другий спосіб введення поняття напруження заснований на гіпотезі молекулярних сил.

Нарешті, третій спосіб пов’язаний із застосуванням поняття енергії. Приймається, що існує пружний потенціал, і з використанням варіаційних підходів виводиться рівняння рівноваги або коливань пружного тіла. Нехай енергія частини тіла, обмеженої якою-небудь поверхнею S, збільшується при збільшенні зміщення. Це збільшення енергії виразиться за допомогою інтеграла по поверхні такого вигляду:

$$\iint\left\{\left[\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\cos(x,\nu)+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\cos(y,\nu)+\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\cos(z,\nu)\right]\delta u+\cdots+\cdots\right\}\mathrm{d}S\,.$$

При енергетичному підході сила визначається як коефіцієнт при збільшеннях зміщення у виразі збільшення енергії. Вищенаведений вираз для енергії вказує безпосередньо на існування сил, які діють на поверхню, що обмежує будь-яку частину тіла. При такому розумінні поняття напруження стає вторинним або вивідним поняттям, а в якості основних понять приймаються енергія, відмінність її видів і локалізація її в середовищі. Цей метод обмежується випадками, коли існує пружний потенціал.

Перший і третій з цих підходів більш, ніж другий, підходять до такого роду теорій, які називають іноді макроскопічними, як і теорію пружності в більшій її частині. У другому методі, навпаки, виходять з молекулярної, атомістичної або субатомістичної структури тіла. Щоб відповідати цілям теорії пружності, структурна теорія повинна приводити до поняття напруження, а також повинна приводити до закону Гука і існування пружного потенціалу. Крім того, вона повинна містити в собі можливість того, що співвідношення між пружними постійними, які ми називали співвідношеннями Коші, можуть і не зберігатися. Ось чотири вимоги, які пред'являються до теорії.

Більшість структурних теорій, що застосовуються в механіці твердого тіла, представляють молекули, атоми чи пружні елементарні частинки, з яких складається тіло, як прості центри сил, наділені властивістю маси. Ці елементи тіла діють з деякими силами один на одного, причому сили, що діють між двома елементами P і P', спрямовані по лінії, яка їх з'єднує, і протилежні одна одній. Зазвичай передбачається, що сили, що діють між структурними елементами тіла, зникають, коли відстань між ними перевищує деяку величину, звану радіусом сфери молекулярної дії. Але це не обов'язково. Досить було б прийняти, що ці сили зменшуються настільки швидко при зростанні відстані, що ними можна знехтувати вже при відстанях, малих в порівнянні з найменшими відстанями, які можна заміряти звичайними приладами.

Першим дослідником, що зайнявся побудовою загальних рівнянь рівноваги і коливань пружних тіл, був Нав'є [Navier, 1827]. Він виходив з концепції Ньютона про будову речовини і вважав, що пружні реакції виникають внаслідок тих змін інтрамолекулярних сил, які є результатом змін у взаємному розташуванні молекул. Він розглядав молекули як матеріальні точки і припускав, що сила взаємодії двох молекул, відстань, між якими дещо збільшилася, пропорційна добутку збільшення відстані на деяку функцію початкової відстані. Його метод полягає в утворенні виразів для проекції на довільний напрямок всіх сил, що діють на зміщену молекулу, і у виведенні звідси рівнянь руху молекули. Рівняння, отримані таким чином, виявляються вираженими в зсувах молекули.

Матеріал передбачається ізотропним, і рівняння рівноваги і коливального руху містять одну постійну тієї ж природи, що і модуль Юнга. Нав'є утворює потім вираз для суми робіт всіх сил, що діють на молекулу при малому зміщенні; він називає її сумою моментів (в сенсі Mecanique Analytique) усіх сил, прикладених до даної молекули і спричинених усіма іншими молекулами. Користуючись варіаційним численням, він виводить звідси не тільки отримані раніше диференціальні рівняння, але також і граничні умови, які повинні задовольнятися на поверхні тіла. Цей мемуар дуже важливий, як перше загальне дослідження з даного питання; проте застосовуваний в ньому хід міркувань не зустрів загального визнання. Були висунуті заперечення проти прийнятого Нав'є виразу для сили взаємодії двох молекул і проти його методу спрощення виразів для сил, що діють на окрему молекулу. Ці вирази призводять до трикратного підсумовування, яке Нав'є замінює інтегруванням; законність цього прийому піддавалась сумніву. Критику мемуара Нав'є і виклад суперечки, причиною якого він послужив, описана у [Todhunter & Pearson, 1886, pp. 139, 221, 177], а також у звіті [Burkhardt, 1903]. Не зайве зауважити, що уявлення про молекули як матеріальні точки, що знаходяться в спокої в стані стійкої рівноваги під дією сил взаємного тяжіння і відштовхування і дещо зміщуються зовнішніми силами, значно відрізняється від тієї концепції молекул, до якої привчила нас сучасна термодинаміка. «Молекулярні» теорії Нав'є, Пуассона і Коші, по суті, мають мало спільного із сучасними уявленнями про молекули.

Слід відмітити, що Л. Нав'є належить значний крок у розвитку будівельної механіки. Сутність реформи, пов'язаної з іменем Нав'є, як з'ясувалось набагато пізніше, полягала, по-перше, у відмові від розрахунку за граничним станом, який існував у науці з часів Галілея, і у переході всієї будівельної механіки на розрахунок по робочому стану, а, по-друге, у введенні принципу малих переміщень, який дозволив вести розрахунок не за невідомим кінцевим деформованим станом системи, а за заданим початковим станом [Бернштейн, 1957].

Л. Нав'є був не тільки видатним ученим, але і рішучим і діяльним практиком. Щоб запропонований ним метод розрахунку «запрацював», він ввів поняття «допустимі напруження», значення яких значно менше від напружень при руйнуванні. Ось що він писав:

«Опору руйнуванню недостатньо для проектування, тому що треба знати не руйнівну силу, а ту, якою можна навантажити елемент без того, щоб ті зміни, що в ньому виникли, не зростали з часом».

Зародження теорій технічних наук у галузях статики кам'яної арки, статики балки, статики тиску ґрунту, опору матеріалів і математичного аналізу пружної лінії, яке відбулось в «попередній період технічних наук», було сформовано в теорію споруд Л. Нав'є в 1826 р. в «період формування технічних наук». Зазначені періоди визначені німецьким політологом Хансом Букхаймом [Buchheim, 1984].

Нові відносини між наукою і виробництвом взагалі, і механікою і інженерною практикою зокрема, які були обумовлені індустріальною революцією, були відмічені французькими політехніками як перерозподіл відносин між емпіричними результатами і теорією. У передмові до другого видання «Résumé des Leçons» («Уроки. Резюме») по будівельній механіці Л. Нав'є пише: «Більшість проектувальників визначають розміри частин конструкцій або машин згідно із переобтяжуючими традиціями і проектами вже завершених робіт; дуже рідко вони розглядають тиск, якому ті частини повинні протистояти і опір, з яким ті частини протистоять стиску. Це може викликати лише деякі незручності, поки роботи з будівництва подібні до інших, побудованих вже споруд в інших випадках, і вони залишаються в звичайних межах з огляду їх вимірювань і навантажень. Але не можна використовувати той самий метод, якщо обставини вимагають перевищення тих меж або, якщо це повністю новий тип конструкції, в будівництві якої немає поки що ніякого досвіду. Ця книга призначається для визначення умов зведення таких будівель, що виконуються під наглядом інженерів; це також визначить ступінь опору окремих частин будівлі. Ми вважаємо, що необхідно у загальних рисах стисло змалювати принципи, на яких ґрунтується розгляд найважливіших питань» [Navier, 1864]. Таким чином засновник сучасної теорії споруд сформулював не тільки методи, проблеми і цілі, але також і програму, яка, як з'ясується потім, стане теоретичною основою для розвитку будівельних технічних наук протягом XIX ст. Брюссельський випуск «Résumé des Leçons» Л. Нав'є також містить біографію, написану Гаспаром де Проні (1755-1839) [Prony].

Видані у 1826 р. «Résumé des Leçons» Л. Нав’є читав як лекції в Ecole des Ponts et Chaussees (Школі мостів і шляхів) - головній школі французьких інженерів-будівельників. Саме в них Л. Нав’є застосував механіко-математичний аналіз пружної лінії, виконаний Якобом Бернуллі, Л. Ейлером і іншими і, перш за все, інженерно обґрунтовану статику балки, і замінив ці дві традиційні теорії XVIII ст. своєю практичною теорією згину [Navier, 1864].

Використання цієї реальної теорії технічних наук дало можливість знайти загальне рішення в питаннях рівноваги і деформації щодо компонентів навантаження при згині для статично визначуваних і невизначуваних систем на емпіричній основі, забезпеченій випробуваннями на міцність. Крім того, ця класична робота сучасної теорії споруд містить корисні підходи для вирішення важливих проблем, що виникали в цивільному будівництві: стійкості підпірних стінок, підданих тиску ґрунту [Navier, 1833 (с. 98–137)], статики кам’яних арок [Navier, 1833 (с. 137–175)], втрати стійкості колон [Navier, 1833 (с. 190–209)], пружних арочних балок [Navier, 1833 (с. 217–246)], пружних пластин [Navier, 1833 (с. 327–330)] і мембран [Navier, 1833 (с. 331–340)].

Щодо проблеми втрати стійкості колон, то серйозних невдач, що призвели до «ряду нещасних випадків, - пише Фріц Стуссі - можна було б уникнути, якби знання Л. Нав’є не були забуті на тривалий період, але, навпаки, були б збережені в щоденній будівельній практиці» [Stüssi, 1964]. Проте, теорія споруд все більше і більше почала позбавлятися своєї пасивної ролі по відношенню до практики будівництва вже опісля декількох років після смерті Л. Нав’є 21 серпня 1836 р.

Клод-Луї Марі-Анрі Нав’є,
фр. Claude-Louis Marie-Henri Navier
(1785–1836)

Огюсте́н Жан Френе́ль,
фр. Augustin-Jean Fresnel
(1788 – 1827)

У тому ж 1821 році, коли Нав'є доповів свій мемуар академії, ще одна галузь стала несподіваним джерелом нового потужного імпульсу для розвитку теорії пружності. О.Ж. Френель (Fresnel) оголосив, що, на його думку, відомі із спостережень факти, які стосуються інтерференції поляризованого світла, можуть бути пояснені тільки за допомогою гіпотези поперечних коливань (див. [Verdet, 1866], с. LXXXVI, а також с. 629 и наст.). Верде вказує, що Френель прийшов до своєї гіпотези поперечних коливань вже в 1816 р. (цит. тв. с. XV, 385,394). Томас Юнг у статті [Young, 1817]) стверджує, що світлові коливання мають лише слабкі поперечні складові. Верде показав, як повинні відбуватися такі коливання і поширення хвиль відповідних типів в середовищі, що складається з «молекул», пов'язаних дією центральних сил.

Всі ті приклади поперечних хвиль, які були відомі раніше часів Юнга і Френеля, наприклад, хвилі на воді, поперечні коливання струн, стержнів, мембран і пластинок, не являли собою хвилі, що поширюються всередині середовища. І ні захисники, ні противники хвильової теорії світла не уявляли собі, мабуть, світлові хвилі інакше, ніж як «поздовжні» хвилі згущення і розрідження, подібні до тих, які були добре знайомі з теорії поширення звуку. Теорія пружності і зокрема проблема поширення хвиль в пружному середовищі залучили тепер увагу двох видатних математиків: Коші, що був прихильником ідей Френеля, і Пуассона - противника, налаштованого скептично по відношенню до них. Зазначимо, що поштовхом до занять Коші теорією пружності стала його участь у комісії, призначеній для розгляду мемуара Нав'є про пружні пластинки, який був представлений Паризькій академії в серпні 1820 р.

Розвиток теорії пружності в подальшому виявився тісно пов'язаним з проблемою поширення світла; цей розвиток у багатьох відношеннях почався з робіт цих двох учених.

12.3. Узагальнений принцип напруження О.Коші

> *Ідея Коші геніально проста. Її глибока оригінальність повністю окреслюється лише на фоні сторічних зусиль його попередників – блискучих геометрів, які досліджували частинні випадки деформівних тіл складним, а іноді і нетривіальним шляхом, навіть не охоплюючи цю основну ідею, яка відразу стала і залишилась основою механіки розподіленої матерії. Нема нічого важчого, ніж подолати вантаж правильного, але дуже частинного знання; переглянути традиції своїх попередників – це найбільша оригінальність, яку може досягти людина.*
>
> К. Труcделл

30 вересня 1822 р. Огюстен Луї Коші оголосив про існування принципу напружень, який з тих пір став підґрунтям раціональної механіки суцільних середовищ. Мемуар Коші був представлений Паризькій академії у вересні 1822 р, але не був опублікований. Резюме поміщено в Bulletin des Sciences & la Societe philomatique, 1823; зміст мемуара було опубліковано в статтях [Cauchy, 1827a], [Cauchy, 1827b], [Cauchy, 1828a]. Остання з цих статей містить основні рівняння, виведені цілком правильно.

Сучасне визначення поняття напруження було дано А.Б. Сен-Венаном в 1844 р. [Saint-Venant, 1844].

Принцип Коші містить у собі чотири незалежні твердження:

- фізична розмірність – «сила»/«площа»;
- напруження визначається на уявній границі, яка розділяє тіло на дві частини;
- напруження являє собою вектор або векторне поле, еквівалентне дії однієї частини тіла на іншу;

- напрямок вектору напружень нічим не обмежений.

Ці чотири тези виникли окремо одна від одної і розвивались незалежно.

Робота О. Коші була підготовлена дослідженнями Л. Нав'є, який в мемуарі, представленому в Паризьку академію наук в 1821 р. і опублікованому в 1827 р. [Navier, 1827] (у скороченому вигляді в 1823 р. [Navier, 1823]), розвинув молекулярну теорію пружного твердого тіла і вивів рівняння його рівноваги і руху в переміщеннях. Ймовірно, ця робота і спонукала О. Коші написати вищезгаданий мемуар, тому що він був призначений Паризькою академією наук членом комісії з розгляду мемуара Л. Нав'є. Уявлення про те, що властивість пружності може бути пояснена силами тяжіння і відштовхування, що діють між найдрібнішими частинками тіл, існувало ще з часів І. Ньютона, і було предметом дослідження Р. Бошковича, розглянутим в його книзі [Boscovich, 1763], опублікованій в 1763 р.

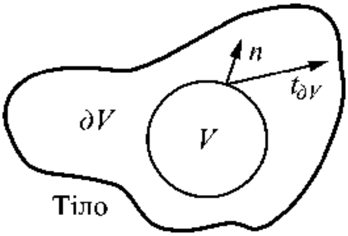


Рис. 12.1. Напруження $\mathbf{t}_{\partial V}$, діюче на границі ∂V області V, зайнятої частиною тіла

Принцип стверджує, що на будь-якій гладкій замкнутій зорієнтованій поверхні ∂V, чи є вона уявною поверхнею всередині тіла або обмежуючою поверхнею самого тіла, існує інтегроване поле векторів напружень $\mathbf{t}_{\partial V}$, рівносильне дії з боку матеріалу, зовнішнього до ∂V та суміжного з нею на цій внутрішній стороні до ∂V (рис. 12.1). Таким чином, рівнодіюча сила $F(V)$ і рівнодіючий обертовий момент $L_{x_0}(V)$, що діють на матеріал в області V, прилеглій до ∂V, визначаються рівняннями:

$$F(V)=\int\limits_{\partial V}\mathbf{t}_{\partial V}\mathrm{d}s+\int\limits_{V}\mathbf{b}\mathrm{d}m, \qquad (12.1)$$

$$L_{x_0}(V)=\int\limits_{\partial V}(x-x_0)\wedge\mathbf{t}_{\partial V}\mathrm{d}s+\int\limits_{V}(x-x_0)\wedge\mathbf{b}\mathrm{d}m, \qquad (12.2)$$

де ds і dm вказують на інтегрування відносно площі поверхні і маси і де b - масова сила на одиницю маси. Таким чином, на тіло діють сили і моменти двох видів: ті, які є абсолютно неперервними функціями маси, і ті, які є абсолютно неперервними функціями площі граничної поверхні. Термін «тіло» застосовується до перших, а «контакт» або «напруження» - до останніх. Раціональна механіка матеріалів - це теорія контактних зусиль.

Коші припустив, що напруження залежать від поверхні тільки через нормаль:

$$\mathbf{t}_{\partial V}=\mathbf{t}_n, \qquad (12.3)$$

тому всі тіла, обмежуючі поверхні яких мають спільну нормаль n в якійсь точці, мають там однакові напруження. Застосувавши принцип кількості руху, він потім довів, що $\mathbf{t}_n$ змінює знак, якщо змінюється орієнтація ∂V:

$$\mathbf{t}_n=-\mathbf{t}_{-n}, \qquad (12.4)$$

або напруження, що виникає під дією внутрішньої сторони на зовнішню, є таким самим і протилежним за напрямком напруженню, що викликається дією зовнішньої сторони на внутрішню. Використовуючи цей результат, який називається лема Коші, і звернувшись знову до принципу кількості руху, він доводить, що якщо, за припущенням, $\mathbf{t}_n$ - неперервна функція n, тоді вона - однорідна лінійна функція n:

$$t_n = T_n, \tag{12.5}$$

Тобто у просторі векторів існує лінійне перетворення **T**, що зветься тензором напружень, дія якого на одиничний зовнішній вектор, нормальний до ∂V в якійсь точці, дає вектор напружень в цій точці. Зокрема, мовою самого Коші, напруження на трьох взаємно перпендикулярних площинах в деякій точці однозначно визначають там напруження на всіх площинах. Існування тензора напружень часто називають основною теоремою Коші. Застосувавши його в (12.1), Коші потім доводить, що в точці, внутрішній до області, де в певний час тензорне поле **T** неперервно диференціюється, де **b** - неперервна і де існує прискорення $\ddot{\mathbf{x}}$ і воно неперервне, принцип кількості руху в інерційній системі координат еквівалентний диференціальному рівнянню в частинних похідних

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{x}}, \tag{12.6}$$

де ρ - масова щільність також, за припущенням, неперервна. Потім він доводить, що за тих же припущень, якщо виконується (12.6), принцип моменту кількості руху еквівалентний

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \tag{12.7}$$

Таким чином, тензор напружень симетричний. Ці два рівняння, (12.6) і (12.7) - перший і другий закони руху Коші. Якщо ми підтверджуємо правильність принципів кількості руху і моменту кількості руху, то перший закон Коші доводить, що рівнодіюча контактного зусилля на одиницю об'єму дорівнює $\operatorname{div}\mathbf{T}$, в той час як другий - необхідна і достатня умова, щоб рівнодіюча контактного обертового моменту була моментом рівнодіючої контактного зусилля.

Для сучасної механіки суцільних середовищ ці два закони іноді недостатньо загальні. По-перше, те, що всі діючі моменти є моментами сил, як стверджується (12.2), не завжди підходяще припущення, тому що там можуть бути контактні пари, а також у зв'язку з орієнтованими матеріалами може виникнути необхідність ввести напруження вищого порядку, крутний момент кількості руху тощо. По-друге, припущення про гладкість, необхідні для отримання законів Коші, можуть виявитися занадто сильними. Довга низка досліджень ударних хвиль і інших сильних порушень неперервності, починаючи з окремих випадків, розглянутих Фур'є, Пуассоном, Стоксом, Ренкіном, Гюгоніо, Адамаром і Цempленом, призвела, зрештою, до загальної теореми Кочина [Кочин, 1926], застосовування якої до принципу кількості руху з рівнодіючою силою, заданою (12.1), дає умову стрибка

$$\left[\mathbf{t}_{\partial V} + \rho U\dot{\mathbf{x}}\right] = \mathbf{0}. \tag{12.8}$$

Тут квадратні дужки позначають стрибок через сингулярну поверхню в конкретному розглянутому місці, U - локальна швидкість поширення поверхні, а $\dot{\mathbf{x}}$ - поле швидкості. Умова (12.8) необхідна і достатня для того, щоб виконувався принцип кількості руху з рівнодіючою силою, заданою принципом напружень Коші, в кожному околі точки, до якої він відноситься. Таким чином, ця умова не висловлює нового поняття, а скоріше є результатом математичного застосування принципу напружень для випадку, коли звичайні припущення про гладкість були б занадто сильними. Принцип моменту кількості руху, за умови, що рівнодіючий момент заданий (12.2), при сингулярній поверхні також еквівалентний умові Коші.

Таким чином О. Коші вивів три рівняння рівноваги елементарного чотиригранника, довів закон парності дотичних напружень, ввів поняття головних осей і головних напружень і вивів диференціальні рівняння рівноваги. Їм же введено поняття про поверхню нормальних напружень (квадрика Коші), на якій розташовуються кінці радіус-векторів, напрями яких збігаються з напрямом нормалей до площадок, а величина обернено пропорційна кореню квадратному з абсолютної величини нормального напруження на цій площадці, і доведено, що ця поверхня є поверхнею другого порядку з центром у початку координат. Можливість перетворення поверхні нормальних напружень до головних осей свідчить про існування в кожній точці трьох взаємно головних перпендикулярних площадок.


Огюстен Луї Коші, фр. Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Аналогічне поняття про поверхню дотичних напружень було введено Г.В. Колосовим в 1933 р. [Колосов, 1933].

Цікаво, що коли О. Коші було дванадцять років, великий Ж.-Л. Лагранж звернув увагу на його визначні математичні здібності, наврочив хлопчикові велике майбутнє і порадив батькові хлопчика: «Якщо ви не поквапитесь дати Огюстену ґрунтовну літературну освіту, то він попростує за своїм покликанням, зробиться великим математиком, але не буде вміти навіть писати рідною мовою. Не дозволяйте йому торкатись до математичних книг раніше сімнадцятирічного віку». Порада була виконана. Огюстен отримав освіту в школі для особливо обдарованих дітей, де вивчав гуманітарні науки, декілька мов. Його вірші французькою та латинською мовами відзначались преміями. В шістнадцять років він вступив у Ecole Polytechnique (Політехнічну школу), а потім у Ecole des Ponts et Chaussees (Школу мостів і шляхів). Після її закінчення молодий інженер працює в Шербурзі на будівництві портових і оборонних споруд. Одразу почалася і наукова діяльність, спрямована на розрахунок кам'яних мостів, склепінь та інших конструктивних форм. Але молодого дослідника тягнуло до наукових проблем з використанням математики. Коші написав більш ніж 700 математичних робіт, у яких заклав основи сучасної математики.

Геометрична інтерпретація напруженого стану в просторі у вигляді еліпсоїда напружень була запропонована Г. Ламе і Б. Клапейроном в їх мемуарах, представлених в Паризьку академію наук у 1828 р. і опублікованих в 1833 р. [Lamé & Clapeyron, 1833].

Геометричне зображення напруженого стану на площині для однієї серії площадок, що проходять через головну ось, у вигляді кола напружень було запропоновано К. Кульманом в його книзі в 1866 р. [Culmann, 1866].

Для загального випадку напруженого стану дуже наочною є геометрична інтерпретація на площині дана О. Мором (так звана кругова діаграма Мора) [Mohr, 1882] в 1882 р. З неї можна зробити ряд важливих висновків про екстремальність головних напружень, положення площадок, на яких дотичні напруження максимальні, і про величини цих максимальних дотичних напружень.

О. Коші дав визначення деформацій, вивів залежність їх від переміщень в окремому випадку малих деформацій, визначив поняття головних напружень і головних деформацій і отримав залежності компонентів напружень від компонентів деформацій як для ізотропного, так і для анізотропного пружного тіла. Вони називаються узагальненим законом Гука, хоча, звичайно, ця назва умовна, тому, що поняття напружень Р. Гуку не було відомо.

У зазначених залежностях Коші спочатку ввів дві постійні і записав залежності напружень від деформацій у вигляді

$$\sigma_x = k\varepsilon_x + K\Theta,\quad \sigma_y = k\varepsilon_y + K\Theta,\quad \sigma_z = k\varepsilon_z + K\Theta, \tag{12.9}$$

$$\tau_{xy} = k\frac{\gamma_{xy}}{2},\quad \tau_{yz} = k\frac{\gamma_{yz}}{2},\quad \tau_{zx} = k\frac{\gamma_{zx}}{2},$$

де $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, тобто так, як це прийнято в теорії пружності (з іншими позначеннями). Проте надалі О. Коші прийняв концепцію Л. Нав'є. Згідно їй пружні тіла складаються з молекул, між якими при деформуванні виникають сили, які діють за напрямками прямих ліній, що з'єднують молекули, і пропорційні зміні відстаней між молекулами. Тоді число пружних постійних для загального випадку анізотропного тіла дорівнює 15, а для тіла ізотропного отримуємо одну пружну постійну. Цієї гіпотези дотримувався С.-Д. Пуассон, а спочатку - Г. Ламе і Б. Клапейрон.

Дж. Грін в 1839 р. вивів залежність між деформаціями і напруженнями в анізотропному тілі без використання гіпотези про молекулярну будову пружних тіл [Green, 1839]. Він отримав їх на основі принципу збереження енергії, ввівши поняття пружного потенціалу, і показав, що при використанні лінійних залежностей шести компонентів деформацій від шести компонентів напружень з 36 коефіцієнтів незалежними є 21, тобто в загальному випадку анізотропного тіла число пружних постійних дорівнює 21. Для ізотропного тіла число пружних постійних знижується до двох.

Як зазначає А. Ляв [Ляв, 1935], роботи Гріна за тим значенням, яке вони мали для основ теорії пружності, можна порівняти тільки з відкриттям основних рівнянь Нав'є. Виходячи із закону, званого нині «принципом збереження енергії», він запропонував новий метод отримання цих рівнянь. Він сам у такий спосіб формулював свій принцип і метод:

«Яким би не був характер взаємодії елементів матеріальної системи, сума добутків внутрішніх сил та елементів відповідних зміщень, утворена для будь-якої даної маси, завжди є точним диференціалом деякої функції. Якщо ця функція відома, то ми можемо безпосередньо застосувати загальний метод, що дається в Mécanique Analytique, який, мабуть, може бути прямо застосований до проблем руху систем, що складаються з безлічі частинок, що діють одна на одну. Одна з важливих переваг цього методу полягає в тому, що сам хід обчислення необхідно приведе нас без особливих зусиль до всіх тих рівнянь і умов, які необхідні і достатні для повного вирішення будь-якої проблеми, до якої він застосовується» [Ляв, 1935, с.24-25].

Функція, про яку тут ідеться, є взята з протилежним знаком потенціальна енергія деформованого пружного тіла, віднесена до одиниці об'єму і виражена в компонентах деформації; частинні похідні цієї функції за компонентами деформації дорівнюють компонентам напружень. Грін припускав, що ця функція може бути розкладена за ступенями і добутками компонентів деформації, тому він представив її у вигляді суми однорідних функцій цих величин першого, другого, третього і вищих порядків. Перший з цих членів повинен бути рівний нулю, бо потенціальна енергія до деформації повинна мати найменше значення; а оскільки всі деформації малі, то істотне значення має тільки один другий член. З цього принципу Грін вивів свої рівняння теорії пружності, що містять в загальному випадку 21 постійну. У разі ізотропії залишаються тільки дві постійні, і рівняння збігаються з тими, які наведені в першому мемуарі Коші.

Джорджа Гріна (1793-1841) зазвичай відносять до числа вчених-самоуків: найбільш значні свої результати – застосування теорії потенціалу в задачах математичної фізики, знамениті «формули Гріна» і «функцію Гріна» він отримав задовго до вступу до Кембриджського університету. Це виглядає тим більш дивним, якщо взяти до уваги те, що і в школі маленький Джордж навчався зовсім недовго, бо батько майбутнього видатного вченого – Джордж Грін-старший – вирішив зробити сина своїм помічником у пекарні, а згодом на млині. Але Джордж-молодший завжди знаходив час для самоосвіти. Зберігся список книг, якими він користувався і який містить роботи Лапласа та Лагранжа, курси з математики і механіки англійських авторів, а також «Праці» Англійського Королівського товариства. При цьому Грін користувався англійськими перекладами робіт Лапласа і Лагранжа, тоді як Кулона і Пуассона він, судячи з усього, читав в оригіналі, і отже, французьку він, скоріш за все, також вивчив самостійно.

Молодому Джорджу дуже пощастило, коли в його рідному місті Ноттінгемі зусиллями значної групи ентузіастів в 1816 р. була відкрита публічна бібліотека, до фондів якої входила найкраща наукова література того часу. Грін завжди міг вільно користуватись книгами з бібліотеки, але не менш важливим, мабуть, виявилось те, що та сама група ентузіастів посприяла у виданні в 1828 р. його першої, найбільшої і найзначнішої наукової праці «Досвід застосування математичного аналізу до теорій електрики і магнетизму».

Судячи з усього, видати цю роботу було нелегко: необхідні математичні знаки - літери типографського набору вдалося знайти лише в Лондоні. Тираж був невеликим - близько сотні примірників. Більшість їх розсіялася по домівках його друзів-передплатників. Коли В. Томсон (згодом лорд Кельвін) менш ніж через 20 років спробував дістати це видання, знайти його вдалося лише з великими труднощами. Але вражає інше: молодий провінціал, який не отримав майже ніякої освіти, не мав керівника, опублікував працю, ідеї якої набагато випередили сучасні йому дослідження. По суті, це перша і досить успішна спроба побудови єдиної теорії електромагнетизму. В якості «універсального інструменту» для цього Грін обирає «особливу функцію», яку він назвав «потенціальною функцією». Хоча сама функція була відома в механіці і гідродинаміці ще до другої половини XVIII ст., однак саме Дж. Грін перетворив її в потужний і універсальний метод. Слід також зазначити, що до задач електромагнетизму потенціальну функцію першим застосував Пуассон (1811). Він ввів, кажучи сучасною мовою, поняття потенціалу простого шару. У своїй роботі 1828 р. Грін, відштовхуючись від досліджень Пуассона, йде значно далі. Він записує потенціальну функцію V точки (x, y, z) в прямокутній системі координат:

$$V(x,y,z)=\int\frac{\rho'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{r}, \qquad (12.10)$$

де ρ' - щільність електрики в точці $P'(x',y',z')$, r - відстань від точки $P(x,y,z)$ до точки P', а далі формулює загальну теорему для двох неперервних функцій U і V, що мають скінченні значення своїх похідних в будь-якій точці всередині тіла довільної форми. В роботі доведено, що якщо в об'ємі v, обмеженому поверхнею s, задані дві функції U і V, то

$$\int\limits_{v}(V\Delta U-U\Delta V)\mathrm{d}v=\int\limits_{s}(V\mathrm{grad}U-U\mathrm{grad}V)\mathrm{d}s, \qquad (12.11)$$

де Δ – оператор Лапласа.

Ця рівність має назву другої формули Гріна. В процесі доведення була також отримана перша формула Гріна

$$\int\limits_{s}V\mathrm{grad}U\mathrm{d}s=\int\limits_{v}(V\Delta U+\mathrm{grad}V\cdot\mathrm{grad}U)\mathrm{d}v. \qquad (12.12)$$

Далі Грін встановлює дуже важливе співвідношення, яке зараз називають «основною інтегральною формулою для гармонічних функцій» [Тихонов, Самарский, 1951] або «третьою формулою Гріна» [Kellog, 1953]:

$$U(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_{v}\frac{\Delta U}{r}\mathrm{d}v-\int_{s}\left(U\mathrm{grad}\frac{1}{r_{PM}}-\frac{1}{r_{PM}}\mathrm{grad}U\right)\mathrm{d}s, \qquad (12.13)$$

де P, M – точки всередині об'єму v, а r_{PM} – відстань між цими точками. Також в цій роботі вперше використане поняття «сингулярності» функції в деякій точці. Співвідношення (12.11), (12.12) поряд із згадуваною нижче функцією Гріна представляють, очевидно, найбільші досягнення цього вченого.

В той час тільки починався розвиток напряму, названого пізніше «теорією потенціалу». Найбільш істотними були праці К.Ф. Гаусса [Гаусс, 1952]. При цьому, хоча англійські і німецькі вчені розвивали свої дослідження незалежно один від одного, їх підхід був подібним, що формально відбилося навіть в близькості введених ними термінів: «потенціальна функція» Гріна і «потенціал» у Гаусса. Останнє найменування завдяки більшій стислості і залишилося прийнятим в науці. Зараз ясно видно зв'язок результатів Гріна з роботами інших дослідників. Так, перша (12.12) і друга (12.11) формули Гріна є прямим наслідком формули Остроградського і легко з неї виводяться; вперше на це звернув увагу Дж.К. Максвелл.

Не можна також обійти увагою такий видатний результат цієї роботи, як введена автором нова функція, названа згодом «функцією Гріна». Ця функція являє собою вираз $G(P,M)=1/r+w(M)$, який в математичному відношенні є повним розв'язком рівняння $\Delta G=-4\pi\delta(r-r')$. Перший доданок $1/r$ у виразі для G є полем одиночного заряду в порожнечі, а другий доданок w є загальним розв'язком однорідного рівняння. Тут приймається, що функція Гріна не залежить від часу. Пізніше поняття функції Гріна було поширене і на випадок залежності від часу. З часом виявилось, що Грін ввів у вжиток універсальну математичну конструкцію, і результати, отримані ним при розв'язанні задач електромагнетизму, становлять цінність практично для всіх галузей сучасної теоретичної фізики і механіки.

У 1839 р. побачила світ стаття Дж. Гріна «Про закони відбиття і заломлення світла на поверхні, що розділяє два некристалічні середовища", яка мала фундаментальне значення для теорії пружності. Автору для пояснення поширення поперечних коливань через світлоносний ефір виявилося необхідним досліджувати рівняння руху в пружному твердому тілі. У цій праці Дж. Грін спочатку докладно обговорює спроби вивести рівняння теорії пружності з корпускулярних уявлень, однак згодом приходить до думки про те, що краще не пов'язувати свої міркування якимись конкретними моделями: «... Більш безпечним методом було б взяти за основу наших міркувань деякий загальний фізичний принцип, ніж приймати деякі конкретні способи дії, які, до того ж, можуть сильно відрізнятися від механізму, використовуваного природою ... » [Ferrers, 1971]. В якості загального підходу Грін вибирає добре відомі йому (за «Аналітичною механікою» Лагранжа) принцип Д'Аламбера і принцип віртуальних швидкостей. Одночасно застосовується і потенціальна функція, яку Грін використовував у всіх своїх роботах, диференціал якої є сумою добутків внутрішніх сил та елементів відповідних зміщень:

$$\mathrm{d}W=\sigma_x\mathrm{d}\varepsilon_x+\sigma_y\mathrm{d}\varepsilon_y+\sigma_z\mathrm{d}\varepsilon_z+\sigma_{xy}\mathrm{d}\varepsilon_{xy}+\sigma_{yz}\mathrm{d}\varepsilon_{yz}+\sigma_{zx}\mathrm{d}\varepsilon_{zx}, \qquad (12.14)$$

де W – потенціальна енергія деформації, віднесена до одиниці об'єму. Звідси випливають формули Гріна

$$\sigma_x=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_x};\ \ \sigma_y=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_y};\ \ \sigma_z=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_z};\ \ \sigma_{xy}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{xy}};\ \ \sigma_{yz}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{yz}};\ \ \sigma_{zx}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{zx}}. \qquad (12.15)$$

Розрахунок показує, що функція W може бути представлена у вигляді однорідної форми другого порядку, яка містить 21 коефіцієнт. Це є істотним досягненням Гріна, оскільки математичний аналіз такої ситуації іншими авторами приводив до 36 параметрів. Реальні значення (і кількість) цих коефіцієнтів визначаються властивостями даного середовища. Так, в разі середовища, симетричного відносно трьох взаємно перпендикулярних площин, число коефіцієнтів зменшується до 9, у середовища з однією віссю симетрії - до 5, а для ізотропного (або некристалічних) середовища становить 2. Але в будь-якому випадку без формул (4), (5) не можна уявити собі курс сучасної теорії пружності.

Цікаво, що Грін вступив до коледжу Гонвілла і Кайюса (одного з найстаріших в Кембриджі) у жовтні 1833 у віці 40 років. У 1838 р. він отримав ступінь бакалавра мистецтв. 31 жовтня 1839 р. Джорджа Гріна обирають членом (феллоу) його рідного коледжу — Гонвілла і Кайюса. Але працював він недовго. Його здоров'я значно погіршилось і 31 травня 1841 р. він помер.

В той же час, як стверджує відомий англійський історик науки Е. Віттекер, «... не буде перебільшенням назвати Гріна по суті справи засновником тієї «Кембриджської школи» натуралістів, видатними представниками якої у другій половині XIX ст. були Кельвін, Стокс, Релей, Клерк Максвелл, Лемб, Дж. Дж. Томсон, Лармор і Ляв» [Wittaker, 1960]. Його підтримує Ю.А. Любимов [Любимов, 1994], який закінчив свою статтю, присвячену 200-річчю з дня народження Джорджа Гріна, словами: «Зараз про Гріна згадують найчастіше тільки як про автора «Досвіду»; ми постаралися показати, що коло його досліджень і досягнень було набагато ширшим, а вплив на подальший розвиток фізики, математики та механіки - значно глибшим».

Симеон-Дені Пуассон, фр. Siméon-Denis Poisson (1781–1840)

Джордж Грін, англ. George Green (1793–1841)

Вільям Томсон, лорд Кельвін, англ. William Thomson, 1st Baron Kelvin (1824–1907)

Зазначимо, що незалежно від Гріна співвідношення між інтегралом по об'єму і інтегралом по поверхні, що обмежує цей об'єм, у тому ж 1828 р. отримав М.В. Остроградський.

Лорд Кельвін (Lord Kelvin) навів доведення існування пружного потенціалу Гріна, засноване на першому і другому законах термодинаміки. Користуючись цими законами, він робить висновок, що коли деформація твердого тіла не супроводжується зміною температури, компоненти напруження є частинними похідними деяких функцій від компонентів деформації по цим компонентам. Можна довести, що це вірно і в тому випадку, коли деформація відбувається настільки швидко, що в жодній частині тіла не відбувається ані поглинання, ані віддача тепла.

Методи Нав'є, Пуассона і пізніших мемуарів Коші призводять до рівнянь руху, що містять менше число пружних постійних, ніж рівняння, одержувані методами Гріна, Стокса і першого мемуара Коші. Значення цієї розбіжності вперше було підкреслено Стоксом. Суперечка йшла про те, чи визначаються пружні властивості ізотропного тіла двома або ж однією постійною. Пірсон називає ці дві теорії «мультиконстантною» і «рариконстантною» теоріями [Todhunter & Pearson, 1886, p. 496]; полеміка щодо цих теорій тривала досить довго. Рариконстантні рівняння можуть бути отримані з мультиконстантних, якщо в останніх прирівняти деякі пари коефіцієнтів, але рариконстантні рівняння засновані на деякій спеціальній гіпотезі про будову речовини, в той час як прийняття мультиконстантної теорії пов'язано, як вважали, з запереченням цієї гіпотези. Розбіжності між результатами обох теорій могли б бути усунені шляхом експериментальних досліджень, і можна було думати, що таким шляхом питання було б остаточно вирішене; однак цінність багатьох експериментальних досліджень, зменшується тим, що отримати достатню впевненість в ізотропії матеріалу досить нелегко, і тенденція багатьох прихильників мультиконстантної теорії базуватися на випробуванні таких матеріалів, як пробка, желатин, каучук, тільки послабила їх аргументацію. Велика частина суперечок велася стосовно значення відношення поперечного скорочення до поздовжнього видовження стержня під дією розтягуючого навантаження, прикладеного до його кінців. Це відношення називається коефіцієнтом Пуассона. С.Д. Пуассон на підставі своєї теорії прийшов до висновку, що це відношення має дорівнювати 1:4. Експерименти Вертхейма [Wertheim, 1848] зі склом і латунню не підтвердили цих результатів, і Вертхейм запропонував вважати його рівним 1:3 - значення, яке не має жодного теоретичного обґрунтування. Ґрунтуючись на експериментальному матеріалі, Ламе [Lamé, 1852] у своєму трактаті приходить до мультиконстантних рівнянь; і після появи цієї книги вони стали загальноприйнятими. Сен-Венан, який був переконаним прихильником рариконстантної теорії, виклав, проте, результати своїх досліджень про кручення [Saint-Venant, 1855], згин [Saint-Venant, 1856] і розподіл пружних властивостей в деякій даній точці [Saint-Venant, 1863], користуючись мультиконстантною теорією. Кірхгоф [Kirchhoff, 1850, 1859a] користувався цією ж теорією в своїх дослідженнях про тонкі стержні і пластинки і підкріпив її експериментами по крученню і згину сталевих стержнів [Kirchhoff, 1859]. Клебш в своєму трактаті [Clebsch, 1862] також користувався термінологією біконстантної ізотропії. Кельвін і Тет [Thomson & Tait] приділили цій суперечці лише кілька слів і приєдналися до поглядів Стокса. Експерименти підтверджують висновок, що коефіцієнт Пуассона може значно відрізнятися від 1/4 для матеріалів, які без натяжки можна розглядати як ізотропні і однорідні.

Однак найбільш вражаючі дані були отримані Фохтом [Voigt, 1887, 1910] при вивченні пружних властивостей кристалів. Відсутність впевненості в ізотропії матеріалів, які піддавались випробовуванням перестало бути перешкодою після того, як він зважився проводити експерименти з матеріалом, свідомо анізотропним[1].

Разом з тим труднощі, які підлягають вирішенню, є глибшими. За Гріном матеріал, який має анізотропію самого загального виду, характеризується 21 незалежною постійною.

---

[1] Відома пропозиція, вперше зроблена Ф. Нейманом, полягає у твердженні, що анізотропія кристалів щодо пружності може бути вивчена за допомогою дослідження кристалографічних форм.

Молекулярна гіпотеза, яку, розробив Коші і підтримував Сен-Венан, призводить до 15 пружних постійних, тобто якщо рариконстантна теорія вірна, то 21 постійна Гріна повинна бути пов'язана 6 незалежними співвідношеннями[1].

Експерименти Фохта полягали у випробуваннях на кручення і згин призм з різних кристалічних матеріалів; для більшості з них справедливі формули Сен-Венана для анізотропних стержнів, а для інших Фохт сам знайшов необхідні формули; співвідношення Коші з певним ступенем точності підтвердилися тільки для берилу і кам'яної солі; для 7 інших досліджених кристалічних матеріалів було виявлено, що коефіцієнти, які згідно з цими співвідношеннями повинні були б бути рівні, досить значно відрізнялися один від одного.

Сер Джордж Габріель Стокс,
англ. Sir George Gabriel Stokes
(1819–1903)

Вольдемар Фохт,
нім. Woldemar Voigt
(1850 – 1919)

Незалежно від експериментальних даних рариконстантна теорія втратила значення у зв'язку з розширенням поглядів на будову матерії. Гіпотеза матеріальних точок, пов'язаних дією центральних сил, була відкинута. Ця еволюція в фізичних поглядах визначається багатьма причинами, серед яких розбіжність рариконстантної теорії пружності з результатами експерименту грає порівняно підпорядковану роль. Набагато більше значення мали розвиток атомістичної теорії в хімії, статистичної молекулярної теорії у фізиці, поширення енергетичних принципів і відкриття електромагнітного випромінювання.

У класичній будівельній механіці стержневих систем [Рабинович, 1954] вважається, що принцип можливих переміщень для деформівних тіл вперше був застосований у 1833 р. Пуассоном. Для розрахунку системи довільного числа стержнів, шарнірно сполучених своїми кінцями в довільному числі вузлів, він отримав рівняння, яке, по суті, являє собою принцип можливих переміщень для деформівних тіл:

$$\sum Q_m \overline{\delta}_m - \sum S \overline{\Delta s} = 0,$$

де Q_m - зовнішні сили, $\overline{\delta}_m$ - можливі переміщення вузлів за напрямками цих сил, S - зусилля в стержнях, $\overline{\Delta s}$ - подовження стержнів, які відповідають переміщенням $\overline{\delta}_m$. І хоча властивості пружності системи тут не враховувались, робота С.Д. Пуассона розглядається як етап у підготовці подальших робіт.

Слід зазначити, що у 1742 р. в листі від 22 жовтня Даніель Бернуллі подав Л. Ейлеру, учню Й. Бернуллі, ідею використати варіаційне числення для отримання

---

[1] Мабуть, вони вперше були отримані Сен-Венаном в його роботі про кручення [Saint-Venant, 1855], хоча А.Ляв [Ляв, 1935] називає їх співвідношеннями Коші.

рівнянь пружних кривих: «Оскільки ніхто не оволодів такою досконалою майстерністю ізопериметричного методу (варіаційного числення) як Ви, Вам легко буде розв'язати задачу, у якій треба, щоб $\int\limits_0^l 1/\rho^2\,\mathrm{d}s$ набув найменшого значення» (див. [Fuss, 1843]). Це була перша в історії теорії пружності постановка варіаційної задачі. Очевидно, що наведений функціонал з точністю до множника $\frac{1}{2}EI$ - потенціальна енергія пружної деформації. Доведення цього положення Л. Ейлер опублікував в 1744 р.

Даніель Бернуллі першим отримав диференціальне рівняння поперечних коливань призматичного брусу, вивчав частинні випадки коливань, провів велику кількість експериментів.

В своїй книзі «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti», до речі, це була перша книжка з варіаційного числення, Ейлер підходить до вирішення задач з точки зору варіаційного числення. Він відмічає «Оскільки будова всього світу досконала і зведена мудрим (творцем), то у світі не відбувається нічого, у чому не був би помітний сенс будь-якого максимуму або мінімуму, тому нема ніякого сумніву, що усі явища світу з таким же самим успіхом можна визначити з причин кінцевих за допомогою методу максимумів і мінімумів, як і із самих причин… Тобто, відкрито два шляхи для розуміння явищ природи: один – через обумовлюючі причини, який називається прямим методом, інший – через кінцеві причини і математика з рівним успіхом користується обома. Але перш за все треба додати зусиль, щоб відкрити доступ до розв'язання обома шляхами; адже тільки тоді не тільки один розв'язок підтверджується іншим, але від відповідності обох ми отримуємо найвищу насолоду». Англійський переклад додатка до цієї книги, присвяченого дослідженню пружних ліній згину був виконаний Олдфазером (W.A. Oldfalher), Еллісом (C.A. Ellis) і Броуном (D.M. Brown). Див. [Isis, 1933, с. 1]. Див. також німецький переклад в серії «Ostwald's Klassikei» («Класика Оствальда»), № 175). Російський переклад: «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера» [Эйлер, 1934, с. 447-572].

Для ілюстрації цих підходів Л. Ейлер розглядав задачу про ланцюгову лінію.

Для ланцюга (рис. 12.2) можна отримати криву, що відображає стан рівноваги «прямим методом». При цьому розглядаються сили, які діють на його нескінченно малий елемент m_n і складаються рівняння рівноваги цих сил. З отриманих рівнянь виводиться диференціальне рівняння

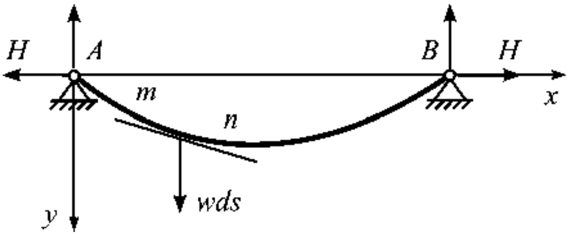


Рис. 12.2

ланцюгової лінії. Цієї ж мети можна досягнути і «методом кінцевих причин» (за термінологією Л. Ейлера), якщо підійти до задачі із міркувань потенціальної енергії: сил ваги. З усіх можливих кривих провисання шукана повинна бути такою, для якої її потенціальна енергія становить найменше значення, або, що те ж саме, кривою рівноваги буде та, для якої центр ваги ланцюга займе найнижче положення. Таким чином задача зводиться до пошуку екстремуму функціоналу $\int_{\partial}^{s} w \cdot y \, \mathrm{d}s$, де s - задана довжина кривої, w - вага одиниці довжини ланцюга. Застосовоючи правила варіаційного числення ми приходимо до диференціального рівняння.

Переходячи до випадку пружного стержня, Л. Ейлер зауважує, що «прямий метод» був застосований Я. I Бернуллі. Для застосування «методу кінцевих причин» Л. Ейлер користується даними Д. I Бернуллі з листа від 22 жовтня 1742 р. Він пише: «Достославний і найдотепніший у цій високій царині природи Даніель Бернуллі повідомив мене, що він може представити всю силу, яка міститься у зігнутій пружній пластинці, однією формулою, яку він називає «потенціальною силою», і що цей вираз для пружної кривої повинен бути найменшим», а потім продовжує (згідно з Бернуллі): «... якщо тільки пластинка буде усюди однаково товста, широка і пружна і у природньому стані буде витягнута прямолінійно», то для цього випадку «значення виразу $\int_{\partial}^{s} (1/R^2)\mathrm{d}s$ буде найменшим». Користуючись своїм варіаційним численням, Ейлер отримує диференціальне рівняння Якоба Бернуллі для пружної лінії консолі, завантаженої силою P на кінці (рис. 12.3), у вигляді:

$$\frac{C y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = Px. \qquad (12.16)$$

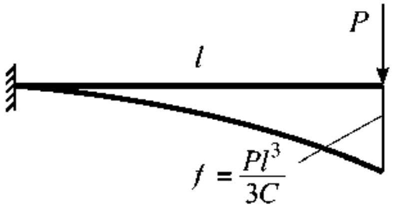


Рис. 12.3

Л. Ейлер не обмежується розглядом лише малих прогинів, інтегрує це рівняння шляхом розкладу в ряд і показує, що якщо прогин малий, то рівняння (12.16) дає

$$C = \frac{Pl^2(2l-3f)}{6f}.$$

Якщо ми випустимо член $3f$ у чисельнику, то ми отримаємо звичайну формулу для прогину на кінці консолі

$$f = Pl^3/(3C).$$

Л. Ейлер не обговорює фізичний зміст константи C, яку він називає «абсолютною пружністю», відмічаючи лише те, що вона залежить від пружних властивостей матеріалу і що у випадку трикутної балки вона пропорційна ширині і квадрату (!) її висоти h. Очевидно, що Л. Ейлер помилявся, припускаючи пропорційність h^2, а не h^3.

Теорія моментів інерції, якою механіка користується і в даний час, повністю побудована Л. Ейлером.

Саме поняття «момент інерції» і його чітке визначення було дане Л. Ейлером в трактаті «Корабельна наука, або Трактат про будівництво і водіння суден; частина перша, яка містить загальну теорію про положення і рух тіл, плаваючих водою; частина друга, в якій докладніше викладаються принципи і керівництва з суднобудування і судноводіння» [Euler, 1749]. Робота над трактатом по навігації за дорученням Академії наук була почата їм в 1737 р. в Петербурзі (закінчена вже в Берліні). Трактат, написаний латинською мовою, вийшов в 1749 р., російською - в тому ж 1749 р. - опубліковано тільки «Письмо Л. Эйлера из Берлина 25-го Генваря 1749 г. Президенту Академии наук графу Кириллу Григорьевичу Разумовскому с изложением содержания написанного по поручению Академии сочинения «Scientia navalis seu traktatus de construendis ac dirigendis navibus»» [Эйлер, 1963, с.225].

У першому томі трактату Ейлер викладає основи своєї теорії коливання плаваючих тіл біля положення рівноваги, причому за основу приймається коливальний рух простого маятника, ізохронного даному тілу. Так як при вивченні такого руху крім поступального необхідно досліджувати ще і обертальний рух, то одного поняття центру мас недостатньо - необхідна ще динамічна характеристика, «якою і стало поняття «момент інерції»»: «Моментом інерції тіла щодо осі повороту називається сума добутків всіх частинок тіла на квадрати відстаней до зазначеної осі» (цит. за [Кудряшова, Иванова, 1986, с. 195]).

Ейлер інтегрує по частинкам m і у нього $M = \int m$ - маса тіла. У сучасних позначеннях момент інерції тіла відносно осі $\int r^2 \mathrm{d}m$.

В тій же роботі вперше доводиться теорема про властивості моментів інерції відносно паралельних осей: «Момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює моменту інерції цього тіла відносно осі, що проходить через центр ваги, складеному з добутком його маси на квадрат відстані центра ваги до даної осі» (цит. за: [Кудряшова, Иванова, 1986, с. 195]). Цей висновок отримано Ейлером при розв'язанні конкретної задачі: знайти момент інерції тіла відносно осі, паралельної тієї, яка проходить через центр ваги тіла.

В результаті їм отримана формула

$$I_{CD} = \int r^2 \mathrm{d}m = S + M \cdot GH^2,$$

де I_{CD} - момент інерції тіла відносно осі CD, S — момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр ваги, GH – відстань від розглядуваної осі до осі, яка паралельна їй і проходить через центр ваги.

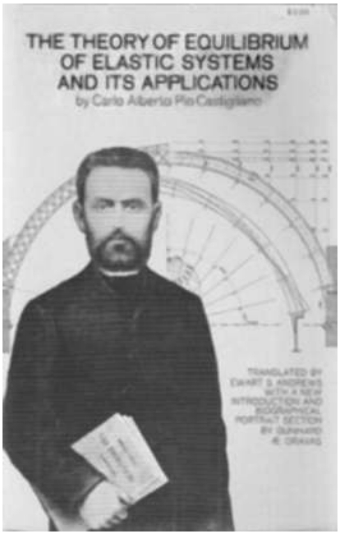
Повністю теорію моментів інерції Л. Ейлер будує в мемуарах, опублікованих в 1758 р.: «Дослідження про механічне пізнання тіл» і «Обертальний рух твердого тіла відносно змінної осі» [Euler, 1758]. Докладне дослідження робіт Л. Ейлера, присвячених виведенню знаменитих рівнянь руху твердого тіла з нерухомою точкою, можна знайти в книзі «Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние» [Горр и др., 1978].

Отже, заслуга створення загальної теорії моментів інерції належить Ейлеру.

Побудову власне теорії моментів інерції було доповнено в наступному столітті роботами Ж. Біне [Binet, 1813] і Л. Пуансо [Poinsot, 1851].

Механік і історик механіки К. Трусделл вказує [Truesdell, 1968], що в манускрипті Л. Ейлера, написаному в 1727 р. (за 80 років до виходу у світ книги Т. Юнга), але опублікованому тільки в 1862 р., міститься поняття модуля пружності E, хоча для його використання надалі він застосовував величину $\frac{E}{g \cdot \rho}$, тобто висоту модуля за Юнгом [Белл, 1984].

У 1833 р. Ж. Фур'є вперше ввів поняття в'язей, отримав нерівність Фур'є. У 1851 р. Сільвестер ввів термін «інваріант».



Нова теорія рівноваги пружних систем Кастільяно (1866)

Згодом були сформульовані теореми Лаґранжа і Кастільяно. Формула Лаґранжа (перша формула Кастільяно), як і сам принцип можливих переміщень, справедлива для будь-якої (лінійної або нелінійної) деформівної системи. Природа формули Лаґранжа аналогічна природі формули Дж. Гріна в теорії пружності. Із зазначеною формулою пов'язують ім'я Ж.-Л. Лаґранжа, мабуть, у тому сенсі, що вона витікає з варіаційного принципу Лаґранжа. Проте, безпосередньо її отримав Карло Альберто Кастільяно (1847–1884) і оскільки є й інша симетрична формула, цю формулу називають також інколи першою формулою Кастільяно.

У 1884 р. засновник берлінської школи теорії споруд Е. Вінклер в некролозі з приводу кончини К.А. Кастільяно, не приховуючи захоплення і гіркоти писав: «Теорія споруд була певною мірою заснована італійцями, такими як Галілей, Марчетті, Фабрі, Гранді та ін. Останнім часом у відповідь на запити, висунуті розвитком залізниць, згадана теорія досягла нових значних успіхів, і італійці знову відіграли провідну роль у цьому поступі. Серед недавніх публікацій слід відмітити роботи Аллієві, Біадего, Каневацці, Керадіні, Клерікетті, Кремони, Фаваро, Фаверо, Фігарі, Гвіді, Модільяні, Савіотті, Сайно, і це лише деякі з авторів, яких варто згадати в цьому переліку. Праці Кастільяно виділяються навіть серед цих робіт. Хоча ми, німці, також пишаємось своїми досягненнями в механіці, однак повинні визнати, що ми багато чого навчилися у наших італійських колег, і що, на жаль, мовні бар'єри все ще перешкоджають скорішому розповсюдженню їх теоретичних розробок».

У своїй дипломній роботі К.А. Кастільяно досліджував пружні системи за допомогою теореми про мінімум роботи деформації. Незабаром виявилось, що ця теорема багато в чому збігається з принципом найменшої роботи $\Pi = \min$, відкритим Луїджі Федеріко Менабреа ще в 1857 р. Обурений зневажливим ставленням до себе, Менабреа видав в 1875 р. статтю, в якій відстоював свій пріоритет. Кастільяно за декілька місяців у відповідь опублікував есе, обсягом 150 сторінок, під назвою «Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elasticiti» («Нова теорія рівноваги пружних систем»), у якій він пішов набагато далі Л.Ф. Менабреа і сформулював сутність своєї головної роботи, яка з’явилася згодом в 1879 р.

Головна робота К.А. Кастільяно базується на трьох твердженнях щодо енергії деформації: «Якщо ми виразимо функцію внутрішньої роботи тіла або пружної системи через відносні переміщення точок прикладення зовнішніх сил, то похідні цієї функції по переміщеннях дадуть величини відповідних сил»:

$$\partial\, \Pi\, (\ldots, \delta_k\, , \ldots)\, /\, \partial \delta_k = F_k$$

Перша теорема Кастільяно ще раніше була застосована до фізичних проблем Дж. Гріном. Перекладення цієї теореми для задач теорії споруд – справжній витвір К.А. Кастільяно, сформульований їм вперше в 1873 р. в дипломній роботі.

Друга теорема Кастільяно формулюється таким чином: «Якщо виразити внутрішню роботу тіла або пружної системи як функцію зовнішніх сил, то похідна цього виразу по одній з сил дасть відносне переміщення точки прикладення сили»:

$$\partial\, \Pi\, (\ldots, F_k\, , \ldots) / \partial F_k = \delta_k\, .$$

З цього виразу можна отримати третю теорему Кастільяно: «Напруження, що виникають між частинами тіла або системи після деформації, є такими, що робота внутрішніх сил є мінімальною, з чого слідують рівняння, які виражають рівновагу сил, прикладених до кожної з частин». Ця теорема відповідає принципу Менабреа, на який К.А. Кастільяно посилається у вступі явно, але при цьому він додає, що дав її строге доведення у своїй дипломній дисертації в 1873 р.

Карло Альберто Кастільяно
італ. Carlo Alberto Castigliano
(1847–1884)

Луїджи Федеріко Менабреа
італ. Luigi Federico Menabrea
(1809–1896)

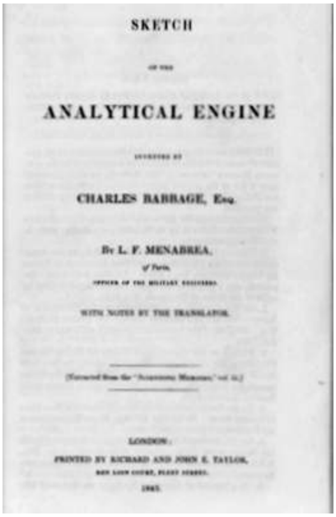
У вступі до своєї головної роботи К.А. Кастільяно стверджує, «що дана книга, яка повністю охоплює теорію пружних зусиль у спорудах, ... заснована виключно на теоремах про похідні внутрішньої роботи». Таким чином він вперше ввів принцип енергії в теорію споруд.

Хоча деякі із наведених вище результатів були незалежно отримані Л.Ф. Менабреа, а також англійським ученим Джеймсом Генрі Коттеріллом (1836–1922), мабуть надання їм імені Кастільяно історично є цілком виправданим, оскільки саме він розв’язав шляхом отриманих ним результатів велику кількість задач і, по суті, створив робочий розрахунковий апарат.

Увагу своїх німецьких колег до головної роботи К.А. Кастільяно «Теорія рівноваги пружних систем та її застосування» привернув Е. Вінклер.

Слід зазначити, що одним із перших учених, які намагалися формулювати принцип, що зараз має назву принципу можливих змін зусиль (напружень), був італійський інженер Л.Ф. Менабреа (1809-1896). Перша його робота, присвячена цьому питанню, - «Principio generale per determinare le tensioni e le pressioni in un sistema elastico» («Загальний принцип для визначення напружень і тиску в пружній системі») була представлена на семінарі в Академії наук в Турині в 1857 р. і в тому ж році надрукована.

Проте у роботі були неточності. По-перше, Л.Ф. Менабреа не розумів того, що у формулюванні цього принципу фігурує не потенціальна енергія деформації, а деяка абстрактна математична величина, яка потім була названа доповнювальною енергією; по-друге, у сформульованому Л.Ф. Менабреа принципі фігурували не дійсні переміщення, як це мало бути, а їх варіації, і, нарешті, не була підкреслена необхідність задоволення варіаціями напружень рівнянь рівноваги, тобто не підкреслювалась статична можливість варіації напружень. У зв'язу з появою робіт Л.Ф. Менабреа і цими неточностями виникла велика і довготривала дискусія. Один із учасників цієї дискусії Жозеф Луї Франсуа Бертран (1822-1900) у листі до Л.Ф. Менабреа у 1869 р. повідомив його про необхідність внесення змін у принцип ($U^{\text{доп}}$ замість U, Δ_i замість $\delta\Delta_i$ і статична можливість δP_i). У 1870 р. Л.Ф. Менабреа опублікував статтю, в якій урахував усі зауваження Ж.Л.Ф. Бертрана (з уривку листа Менабреа до Бертрана, який був спільно опублікований ними в Трудах Академії наук в Турині 1 травня 1870 р., с. 702). Таким чином сучасне формулювання принципу можливих напружень належить Ж.Л.Ф. Бертрану. Проте, у зв'язку з тим, що, незважаючи на наявність помилок у початковому формулюванні принципу, Л.Ф. Менабреа застосував його при розв'язанні багатьох задач і не припускався помилок (оскільки розглядалися лінійні системи для яких $U^{\text{доп}} = U$, варіації сил приймалися статично можливими без зазначення цього, а під $\delta\Delta_i$ фактично розумілась Δ_i) інколи зберігають у назві принципу і ім'я Л.Ф. Менабреа.



SKETCH

ANALYTICAL ENGINE

CHARLES BABBAGE, Esq.

By L. F. MENABREA,

WITH NOTES BY THE TRANSLATOR.

LONDON:

PRINTED BY RICHARD AND JOHN E. TAYLOR,

Титульний лист книги Менабреа

Незалежно від Ж.Л.Ф. Бертрана у 1882 р. принцип додаткового пружного потенціалу (доповнювальної пружної енергії) був запропонований німецьким ученим Вільгельмом Френкелем (1841-1895) стосовно просторової задачі теорії пружності в статті «Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben» («Принцип найменшої роботи внутрішніх сил пружних систем та його застосування до вирішення задач статики») [Fränkel, 1882].

У 1921 р. німецький учений Оскар Домке (1874-1945) досліджував принцип можливої зміни сил з термодинамічної точки зору [Domke, 1921] і встановив екстремальний принцип для адіабатичних пружних систем: усі зовнішні сил і температура роблять величину $u^{\text{доп}} - \sum_i P_i \Delta_i - \sum TS$ мінімальною, тобто

$$\delta_{(Q,T)}[u^{\text{доп}} - \sum_i P_i \Delta_i - \sum TS] = 0,$$

де T - абсолютна температура, S - ентропія.

Використання теореми робіт для обчислення переміщень у пружних системах було започатковано Джеймсом Клерком Максвеллом і Християном Отто Мором. Дж.К. Максвелл у роботі 1864 р., а О. Мор у низці статей 1874-1885 рр. отримали відому формулу для визначення переміщень у пружній фермі за заданими внутрішніми зусиллями, яка надала можливість зручного розрахунку статично невизначуваних систем.

Джеймс Генрі
Коттерілл,
англ. James Henry
Cotterill
(1836–1922)

Жозеф Луї
Франсуа Бертран,
фр. Joseph Louis
François Bertrand
(1822–1900)

Джеймс Клерк
Максвелл,
англ. James Clerk
Maxwell
(1831–1879)

У 1882 р. Маттіас Коенен звернувся до загальної теореми роботи, яку О. Мор з успіхом використовував у теорії розкісних стержневих систем, і застосував її у формі принципу можливих змін напруженого стану для обчислення переміщень у статично визначуваних балках і реакцій опор в нерозрізній балці. При цьому він вперше сформулював рівняння роботи одиничної сили у вигляді відомого інтеграла від добутку $\delta_i = \int\limits_{(l)} \frac{M_i M_j}{EI} \mathrm{d}x$.

Щодо обчислення наведеного вище інтегралу варто навести слова І.М. Рабіновича: «У 1924 р., коли я викладав в МІІТ методи розрахунку статично невизначених рамних систем, до мене на квартиру прийшов незнайомий студент Верещагін і попросив дозволу викласти кілька міркувань щодо цих розрахунків. Те, що він розповів, виявилося цікавим, оригінальним і дуже плідним. Основна його ідея полягала в тому, що при виборі так званих одиничних епюр немає ніякої необхідності користуватися поняттями про одну базову систему або, інакше кажучи, можна взагалі не користуватися поняттям про одну систему. Можна за власним бажанням призначати епюри, аби вони викликалися внутрішніми силами і були лінійно незалежні. Для того часу це, була революційна ідея. Інша його ідея, що була скромнішою, але теж виявилася плідною, полягала в запропонованому ним способі обчислення переміщень за умови, коли у відповідному визначеному інтегралі $\int_a^b y(x)z(x)\mathrm{d}(x)$ одна з функцій $y(x), z(x)$ є лінійною функцією від x.

Я оцінив обидва методи гідно і допоміг автору опублікувати їх в журналі «Будівельна промисловість». Спосіб обчислення зазначеного інтеграла я виклав потім в одному з томів своєї книги «Методи розрахунку рам» під назвою «способу Верещагіна». Під цією назвою він і увійшов в будівельну механіку. На жаль, Верещагін пішов з МІІТ не закінчивши курсу, і я втратив його з поля зору. Через років 30 він несподівано зателефонував мені, здається, з Ленінграда і поцікавився, чи вважаю я, що він міг би захистити тепер свою стару статтю як кандидатську дисертацію. Я відповів позитивно. Після цього він поклав трубку, і більше мені про нього нічого не відомо».

Із інтегральною формулою для обчислення переміщень в стержневих системах пов’язана особистість професора П.А. Веліхова. Як зазначає І.М. Рабінович: «Характерна його риса, як на мене, полягала в здатності швидко сприймати все нове. Він умів оцінити нові ідеї і іноді використовувати їх раніше, ніж це вдавалося зробити іншим. Так, наприклад, він перший в нашій літературі звернув увагу на ідею, викладену в книзі німецького автора Л. Андре (Andrée L. Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme: Das B.-U. Verfahren. München; Berlin, 1919). У найпростішому вигляді ідея полягає в тому, що всякий вплив на плоску систему, що має одну або декілька осей симетрії, може бути представлено у вигляді одного або декількох симетричних і назад-симетричних впливів. Це, як тепер добре відомо, дозволяє виробляти моментально чудову операцію розтину системи канонічних рівнянь методу сил або деформацій на більш прості групи незалежних рівнянь. Ця ідея настільки проста і настільки увійшла в побут розрахунків, що важко навіть уявити собі, що був такий час, коли вона не була відома. Між іншим, термін «канонічні» для рівнянь методів сил і деформацій введений вперше в будівельну механіку П.А. Веліховим».

У своєму курсі будівельної механіки він чи не перший рішуче відмовився від обхідних методів розрахунку статично невизначених систем, наприклад від складання виразу потенційної енергії деформацій і її похідних, і рішуче перейшов до обчислення всіх переміщень по формулі Мора.

Повертаючись до теореми Кастільяно, пошлемося на слова відомого німецького вченого Фріделя Хартманна, який у статті із красномовною назвою «Кастільяно і Соболєв» [Hartmann, 1985] зазначив, що ця теорема “не може бути застосована для двовимірних і тривимірних масивних тіл, пружне деформування яких описується класичними рівняннями Нав'є-Коші. Такий негативний результат, природно, викликає питання: «Чому теорема Кастільяно іноді справедлива, а іноді ні? Які умови необхідні для її справедливості?».

Перш ніж надати відповіді на ці питання та проілюструвати їх, автор згаданої статті наводить доведення теореми Кастільяно для простої модельної задачі. При цьому зазначається, що перша і друга теореми Кастільяно, по суті, являють еквівалентні твердження і надалі говориться просто про теорему Кастільяно. Доведення полягає в наступному.

Переміщення $u(y)$ одновимірного елемента в умовах розтягу-стиснення (рис. 12.4) є розв'язком крайової задачі (КЗ)

$$-EAu''(y) = \delta_0(y-x)P, \quad u(0) = u(l) = 0$$

і тому можуть бути подані у вигляді суми

$$u(y) = \left\{ g_0(y,x) + u_{R_0}(y) \right\} P$$

фундаментального розв'язку $g_0(y,x)$ та регулярного однорідного розв'язку $u_{R_0}(y)$.

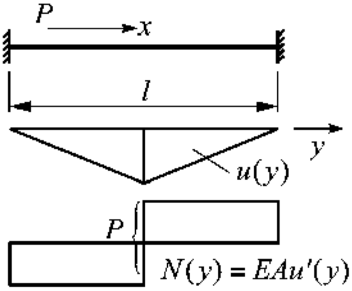


Рис. 12.4

Перша тотожність Гріна для оператора $-EA\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ проголошує

$$I(u,\hat{u}) = -\int_0^l (-EAu''\hat{u})\mathrm{d}x - [N\hat{u}]_0^l + \int_0^l \frac{NN}{EA}\mathrm{d}x = 0, \quad \forall u,\hat{u} \in C_s^2 \times C_s^1,$$

де через C_s^m позначений клас функцій, m-та похідна яких є, принаймні, кусково-неперервною на відрізку $[0,l]$, а нижчі похідні безперервні усюди на $[0,l]$.

Як справедливо зазначає Ф. Хартманн, при формулюванні тотожності Гріна для $\{u, u\}$ необхідно враховувати той факт, що переміщення u одновимірного елемента не належать до класу C_s^2 $[0, l]$, (див. рис. 12.4), і отже, ця тотожність може бути сформульована лише в області $\Omega_\varepsilon = [0, x-\varepsilon] \cup [x+\varepsilon, 0]$, тобто всюди на відрізку $[0,l]$ окрім деякого малого околу $(x-\varepsilon),(x+\varepsilon)$ точки прикладення сили:

Фрідель Хартманн
нім. Friedel Hartmann

$$\frac{1}{2}I_\varepsilon(u,u) = \frac{1}{2}\left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} (-EAu''u)\mathrm{d}x - [Nu]_0^{x-\varepsilon} + [Nu]_{x+\varepsilon}^l + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ -N(x-\varepsilon)u(x-\varepsilon) + N(x+\varepsilon)u(x+\varepsilon) + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x \right\} = 0.$$

Спрямовуючи параметр ε до нуля, отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} I_\varepsilon(u,u) = -\frac{1}{2}Pu(x) + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x = 0,$$

і в результаті маємо 1-у теорему Кастільяно

$$\frac{\partial}{\partial P}\frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x = u(x).$$

Після такого вступного дослідження розтягу-стиску стержня Ф.Нартманн розглядає більш загальну задачу, яка описується рівняннями

$$Du=\delta_i(y-x)F_i\,,\ i\text{ – задане ціле невід'ємне число,} \tag{12.17}$$

$$\partial^j u\big|_{\Gamma}=0, \quad 0\le j\le 2m-1\,, \tag{12.18}$$

де D - лінійний еліптичний оператор ступеня $2m$ з постійними коефіцієнтами, а ∂^j - диференціальний оператор ступеня $\le j$. При $0\le j\le m-1$ оператор ∂^j являє собою «переміщення», а при $m\le j\le 2m-1$ ∂^j представляє «сили».

δ_i - функція Дірака ступеня $i=0,1,...,2m-1$.

Якщо оператор D має ступінь 2 (m = 1), то

δ_0 - це зосереджена сила;

δ_1 - подвійна зосереджена сила (стрибок переміщення).

Якщо оператор D має ступінь 4 (m = 2), то

δ_0 - це зосереджена сила;

δ_1 - зосереджена пара сил;

δ_2 - подвійна зосереджена пара сил (стрибок кута повороту);

δ_3 - подвійна-подвійна зосереджена пара сила (стрибок переміщення).

Ми називаємо функцію $u(y)$ розв'язком рівняння (12.17), якщо

$$Du=0,\quad y\neq x,\quad y\in\Omega,$$

та якщо вона задовольняє $2m$ рівнянь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\partial_u^{2m-1-j}\mathrm{d}s=\begin{cases}F_i,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}\quad 0\le j\le 2m-1, \tag{12.19}$$

де $\Gamma_{N_\varepsilon}(x)$ - границя ε-околу точки прикладення зосередженої дії (рис. 12.5).

Якщо розглядається пластинка, навантажена зосередженою силою (див. рис. 12.5), то співвідношення (12.19) запишуться в наступному вигляді

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\partial^3 w\mathrm{d}s=P\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\partial^j w\mathrm{d}s=0,\quad j=0,\,1,\,2\,,$$

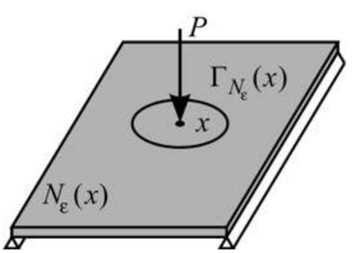


Рис. 12.5

де $\partial^3 w$ - перерізуюча сила, а $\partial^0 w=w$, $\partial^1 w=\partial w/\partial n$, $\partial^2 w=M_n$ - це відповідно прогин, нормальна похідна прогину і згинальний момент.

Для одновимірного елемента в умовах розтягу-стиску (рис. 12.4) умови спрощуються

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[N(x-\varepsilon)-N(x+\varepsilon)]=P,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u(x-\varepsilon)-u(x+\varepsilon)]=0,$$

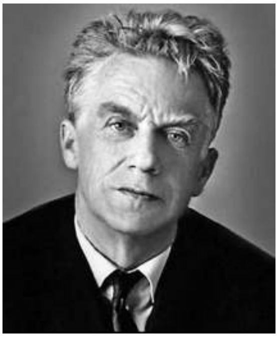
оскільки границя $\Gamma_{N_\varepsilon(x)}$ складається з двох точок $(x-\varepsilon)$ зліва і $(x+\varepsilon)$ праворуч.

Перша тотожність Гріна для оператора D має вигляд:

$$I(u,\hat{u}) = -\int_{\Omega} Du\hat{u}\,\mathrm{d}\Omega + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\int_{\Gamma}\partial^{2m-1}u\,\partial^{i-1}\hat{u}\,\mathrm{d}s + E(u,\hat{u}),\quad \forall u,\hat{u}\in H^{2m}(\Omega)\times H^{m}(\Omega). \qquad (12.20)$$

Тут через $H^m(\Omega)$ позначені функції з простору Соболєва. Надалі також розглядаються функції з простору Соболєва, які мають нульові граничні умови; вони позначаються через $H_0^m(\Omega)$ [Фикера, 1974]. Через $\|.\|_m$ позначається норма простору. Крім того відзначається, що інтеграл по області $E(u,\hat{u})$ - це білінійний функціонал, що містить похідні порядку $\le m$. При $\hat{u}=u$ він представляє подвоєну внутрішню енергію поля.

Цікаво, що С. Л. Соболєв був обраний членом-корреспондентом АН СРСР у 1933 р. у віці 24 років. При цьому вчений ступінь доктора физико-математичних наук йому було присвоєено наступного 1934 року. В 1939 р. 30-річний Соболєв став дійсним членом АН СРСР по відділенню математичних і природничих наук (математика). Протягом довгого часу залишався наймолодшим академіком країни. У роботах С.Л. Соболєва вперше отримало систематичне застосування і глибокий розвиток поняття узагальненого розв'язку диференціального рівняння. Пропозиція С.Л. Соболєва щодо постановки і розв'язання задачі Коші в просторі функціоналів була заснована на революційному розширенні ейлерова поняття функції. У 1933-1935 рр. Сергій Львович опублікував цикл досліджень, в яких були встановлені існування та єдність розв'язку задачі Коші в просторах функцій з узагальненими похідними, які увійшли в науку як простори Соболєва і зіграли виняткову роль у формуванні сучасних математичних поглядів. Також варто відмітити, що до математики майбутній академік прийшов не відразу. По закінченні школи С.Л. Соболєв навчався 1-й Державній художній студії по класу гри на фортепіано і лише за рік вступив на фізико-математичний факультет Ленінградського університету.


Сергій Львович Соболєв
(1908 — 1989)

У якості прикладу можна розглянути внутрішню енергію одновимірного елемента в умовах розтягу-стиску, задану виразом

$$\frac{1}{2}E(u,u) = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x = \frac{EA}{2}\int_0^l (u')^2\,\mathrm{d}x. \qquad (12.21)$$

При цьому робиться припущення про те, що внутрішня енергія задовольняє на класі $H_0^m(\Omega)\subset H^m(\Omega)$ нерівність

$$\frac{1}{2}E(u,u)\geq c_1\|u\|_m^2,\ \forall u\in H_0^m(\Omega),$$

причому константа c_1 не залежить від функції *u*. Це припущення є цілком обґрунтованим, оскільки енергія стандартного еліптичного оператора математичної фізики задовольняє цю нерівність.

Розв’язок крайової задачі (12.17), (12.18) має вигляд

$$u(\mathbf{y}) = \{\, g_i(\mathbf{y},\mathbf{x})+u_{R_i}(\mathbf{y})\,\}F_i,$$

де $g_i(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – фундаментальний розв’язок, що відповідає функції Дірака δ_i а $u_{R_i}(\mathbf{y})$ - регулярний однорідний розв’язок. Оскільки $g_i(\mathbf{y},\mathbf{x})$, а отже і $u(\mathbf{y})$ не належать класу $H^m(\Omega)$, то формування тотожності (12.20) в області Ω виконується в два етапи: спочатку тотожність формулюється в області $\Omega_\varepsilon=\Omega-N_\varepsilon(\mathbf{x})$, в якій *u* є регулярним

$$\frac{1}{2}I_\varepsilon(u,u)=\frac{1}{2}\left\{-\int\limits_{\Omega_\varepsilon}Duu\mathrm{d}\Omega+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\int\limits_{\Gamma}\partial^{2m-1}u\partial^{i-1}u\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\partial^{2m-1}u\partial^{i-1}u\mathrm{d}s+E(u,u)_{\Omega_\varepsilon}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\partial^{2m-1}u\partial^{i-1}u\mathrm{d}s+E(u,u)_{\Omega_\varepsilon}\right\}=0.$$

Тут використано те, що $Du\big|_{\Omega_\varepsilon}=0$ та $\partial^i u\big|_{\Gamma}=0,\ 0\leq i\leq m-1$.

Тепер можна спрямувати радіус ε отвору $N_\varepsilon(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}\in\Omega/(\mathbf{y}-\mathbf{x})\leq\varepsilon\}$ до нуля і отримати

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}I_\varepsilon(u,u)=-\frac{1}{2}\partial^i u(\mathbf{x})F_i+\frac{1}{2}E(u,u)=0.$$

Простим наслідком отриманої тотожності є перша теорема Кастільяно

$$\frac{\partial}{\partial F_i}\frac{1}{2}E(u,u)=\partial^i u(\mathbf{x}).$$

Очевидно, що для справедливості теорема Кастільяно необхідно, щоб величина $\partial^i u(\mathbf{x})$ була обмеженою, а внутрішня енергія розв’язку $\frac{1}{2}E(u,u)$ була скінченною. Обидві умови є еквівалентними.

Функції, що належать $H^m(\Omega)$, мають похідні ступеня $\leq m$ і інтегруються разом зі своїми квадратами. Похідні, що входять до вираз внутрішньої енергії $\frac{1}{2}E(u,u)$, мають ступінь $\leq m$. Отже, функції, що належать $H^m(\Omega)$, мають скінченну внутрішню енергією

$$u \in H^m(\Omega) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} E(u,u)_{\Omega_\varepsilon} = \frac{1}{2} E(u,u) < \infty .$$

З цієї причини простір $H^m(\Omega)$ часто називають простором функцій зі скінченною внутрішньою енергією або просто «енергетичним простором».

Проблема, таким чином, зводиться до відповіді на питання, чи належить розв'язок задачі (12.17), (12.18) класу $H^m(\Omega)$. Для відповіді достатньо розглянути слабке формулювання задачі (12.17), (12.18):

Знайти і $u \in H^m(\Omega)$ таке, що

$$E(u,\hat{u}) = \int_{\Omega} F_i \delta_i(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \hat{u}(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Omega_y - \partial^i \hat{u}(\mathbf{x}) F_i , \quad \forall \hat{u} \in H_0^m(\Omega) ,$$

з урахуванням обмеженості $\partial^i \hat{u}(\mathbf{x}) F_i$ для всіх $\hat{u} \in H_0^m(\Omega)$.

Якщо ця задача має розв'язок, тоді за допомогою стандартних аргументів (див. [Фикера, 1974]) можна показати, що u також є і розв'язком рівняння (12.17).

Для того, щоб варіаційна задача мала розв'язок в $H_0^m(\Omega)$, достатньо (див. теорему Лакса-Мільграма [Сьярле, 1980]), щоб функція Дірака $\delta_i(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ належала $H^{-m}(\Omega)$ - простору, двоїстого по відношенню до $H_0^m(\Omega)$. Ця інформація забезпечується наступною теоремою [Фикера, 1974].

Теорема вкладення Соболєва.

Якщо $\Omega \subset R^n$ *є обмеженою областю, для якої справедлива умова конуса (всі «розумні» області задовольняють цю умову), і якщо індекс m простору Соболєва* $H^m(\Omega)$ *перевищує n/2, тобто m>n/2, то* $H^m(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, *і більш того, існує константа* c_2, *що залежить тільки від області Ω і індексу m простору Соболєва така, що*

$$\max_{x \in \Omega} |u(\mathbf{x})| \le c_2 \|u\|_m .$$

Ця теорема стверджує, що функції, що належать $H^m(\Omega)$, неперервні в Ω, якщо індекс m перевищує $n/2$ і що неперервне саме вкладення $H^m(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.

Далі, якщо $u \in H^m(\Omega)$, то $\partial^i u$ належить $H^{m-i}(\Omega)$, і якщо $m-1 > n/2$, то відповідно до теореми Соболєва існує константа c_3, що залежить тільки від області Ω, індексу m і порядку оператора $\partial^i u$, така, що

$$\max_{x \in \Omega} \left| \partial^i u(\mathbf{x}) \right| \le c_3 \left\| \partial^i u \right\|_{m-i} .$$

Але очевидно, що для всіх $u \in H^m(\Omega)$ справедлива оцінка $\left\| \partial^i u \right\|_{m-i} \le c_4 \|u\|_m$ (c_4 - фіксована константа), в результаті чого

$$\max_{x\in\Omega}\left|\partial^i u(\mathbf{x})\right|\le c_3\cdot c_4\left\|u\right\|_m .$$

Це означає, що функція Дірака δ_i є обмеженим і неперервним функціоналом в $H^m(\Omega)$.

Зрозуміло, що така ситуація матиме місце до тих пір, поки індекс простору Соболєва m за вирахуванням індексу дельта функції i перевищуватиме величину $n/2$:

$$m-i>n/2\Rightarrow\delta_i\in H^{-m}(\Omega).$$

Отже, відповідь на питання щодо того, чи належить δ_i простору $H^{-m}(\Omega)$ може бути отримана шляхом простих арифметичних операцій. Результати такої рутинної роботи, виконаної для операторів ступеня 2 (m = 1) і 4 (m = 2), наведені в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

$m=1$ (диференціальне рівняння 2-го порядку)			R^1	R^2	R^3
		Підстановка індексів в умову m-i > n/2	$n=1$	$n=2$	$n=3$
			Виконання умови		
	$\delta_0\in H^{-1}$	1-0 > n/2	так	ні	ні
	$\delta_1\in H^{-1}$	1-1 > n/2	ні	ні	ні
$m=2$ (диференціальне рівняння 2-го порядку)					
	$\delta_0\in H^{-2}$	2-0 > n/2	так	так	так
	$\delta_1\in H^{-2}$	2-1 > n/2	так	ні	ні
	$\delta_2\in H^{-2}$	2-2 > n/2	ні	ні	ні
	$\delta_3\in H^{-2}$	2-3 > n/2	ні	ні	ні

Зазначимо, що коли $\delta_i\in H^{-1}$ і умова виконується (m-i > n/2), то розв’язок u задачі (12.17), (12.18) має скінченну енергію, і теорема Кастільяно справедлива. Якщо ні, то енергія повинна бути нескінченною, $\partial^i u(\mathbf{x})$ необмеженим, і, отже, теорема Кастільяно застосована бути не може.

Далі розглядаються деякі конкретні об’єкти будівельної механіки.

Рівняння другого порядку (m = 1):

одновимірний елемент в умовах розтягу-стиску $-EAu''=p$;

мембрана $-N\Delta w=p$,

а також такі системи (по індексу, що повторюється, слід виконувати підсумовування)

масивне двовимірне або тривимірне тіло

$$-\mu\Delta u_i-\frac{\mu}{1-2\nu}u_{j},_{ji}=p_i,\quad i,j=1,2,\ \text{або}\ i,j=1,2,3\,;$$

згин пластини (Рейсснер)

$$-K\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\left\{\left[\Phi_{\alpha,\beta}+\Phi_{\beta,\alpha}+\frac{2\nu}{1-\nu}\Phi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]_{,\beta}-\lambda^2(\Phi_\alpha+w,_\alpha)\right\}=p_\alpha\,,$$

$$-K\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^2\lambda^2(\Phi_\alpha+w,_\alpha),_\alpha=p_3\,,\qquad \alpha,\beta=1,2\ .$$

Рівняння четвертого порядку (m = 2):

балка $EIw^{\mathrm{IV}}=p\,;$

згин пластини (Кірхгофф) $K\Delta\Delta w=p\,.$

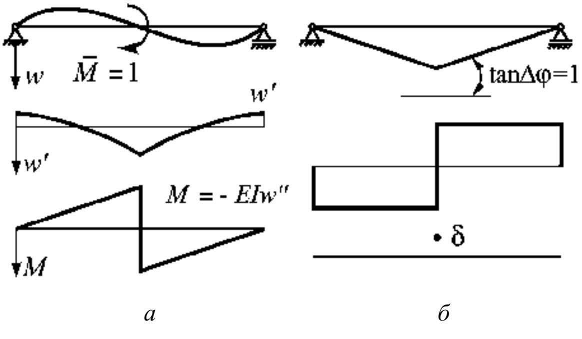
Неважко застосувати отримані результати до цих рівнянь, починаючи з оператора другого порядку (m = 1). Відповідно до (12.21) одновимірний елемент в умовах розтягу-стиску (n = 1), навантажений зосередженою силою δ_0, має скінченну енергію, тоді як масивне двовимірне (n = 2) або тривимірне (n = 3) тіло при аналогічному навантаженні має нескінченну енергію.

Дещо кращою є ситуація в разі оператора четвертого порядку (m = 2). Енергія, що відповідає навантаженню зосередженою силою, скінченна при будь-якій розмірності задачі. А ось пара сил δ_1 призводить до напруженого стану пластинки (n = 2), що характеризується нескінченною енергією. У той же час у балці (n=1) при навантаженні парою сил енергія має скінченне значення.

Якщо зосереджений вплив є таким, що кут повороту або переміщення змінюються стрибком, то внутрішня енергія завжди нескінченна.

Проілюструємо цей результат кількома простими прикладами. Балка на рис. 12.6,*а* навантажена зосередженим моментом, а до балки на рис. 12.6,*б* прикладене зосереджене навантаження (подвійний момент), що призводить до одиничного зламу $\Delta\varphi=1$. Прогини відповідно в першому випадку задовольняють рівняння $EIw^{\mathrm{IV}}=\delta_1(y-x)$, а в другому - $EIw^{\mathrm{IV}}=\delta_2(y-x)$.

Внутрішня енергія балки на рис. 12.6,*а* є скінченною, тому що друга похідна прогину є квадратично інтегрованою функцією. Внутрішня енергія балки на рис. 12.6,*б* є нескінченною, оскільки в цьому випадку друга похідна прогину є дельта-функцією. Така функція не належить до $H^0(0;l)$, отже, функція прогину w не належить до енергетичного простору $H^2(0;l)$.



а *б*

Рис. 12.6

У разі розмірності задачі, що дорівнює 2, найпростіший приклад НДС з нескінченною внутрішньою енергією - це мембрана. Припустимо, що в центрі кола $x=0$ одиничного радіусу прикладена зосереджена сила $F_0=2\pi$. Прогини мембрани є розв'язком крайової задачі

$$\Delta w=2\pi\delta_0(\mathbf{y}-\mathbf{0}), \quad w_\Gamma=0.$$

Природно, розв'язок задачі має вигляд $w=-\ln r$. Внутрішня енергія, що відповідає оператору Лапласа, визначається як

$$\frac{1}{2}E(w,w)=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (w,_{x_1}^2+w,_{x_2}^2)\mathrm{d}\Omega.$$

Тому внутрішня енергія кільця $\Omega_\varepsilon=\Omega-N_\varepsilon(\mathbf{0})$, $\varepsilon\le r\le 1$ виражається в такий спосіб

$$\frac{1}{2}E(-\ln r, -\ln r)_{\Omega_\varepsilon}=\frac{1}{2}\int\limits_\varepsilon^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\int\limits_\Omega(r,_{x_1}^2+r,_{x_2}^2)\mathrm{d}\varphi r\mathrm{d}r=\pi\ln\varepsilon^{-1}$$

і отже енергія є нескінченною:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}E(w,w)_{\Omega_\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\pi\ln\varepsilon^{-1}=\infty.$$

Відповідно переміщення в центрі нескінченно великі $w(\mathbf{0})$ = -ln(0), і отже, теорема Кастільяно не може бути застосована.

На завершення наведемо зіставлення деформування під дією зосередженої сили P мембрани, пластинки Кірхгоффа і пружного тіла.

Нормальна похідна $\partial w/\partial n$ переміщень мембрани повинна задовольняти рівняння

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}s=P, \tag{12.22}$$

прогини пластинки Кірхгоффа – рівняння

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\partial^3 w\mathrm{d}s=P, \tag{12.23}$$

а вектор напружень $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ у пружному тілі, навантаженому зосередженою силою **P** в точці **x**, – рівняння

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\Gamma_{N_\varepsilon}(x)}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\mathrm{d}s=\mathbf{P}. \tag{12.24}$$

У випадку двовимірної задачі $\Gamma_{N_\varepsilon}(x)$ - це коло довжиною $\mathrm{mes}\,\Gamma_{N_\varepsilon}(x)=2\pi\varepsilon$, а у випадку тривимірної задачі $\Gamma_{N_\varepsilon}(x)$ - це сфера з площею поверхні $\mathrm{mes}\,\Gamma_{N_\varepsilon}(x)=4\pi\varepsilon^2$.

З рівнянь (12.22), (12.23) випливає, що для рівноваги необхідно, щоб мембранні сили і поперечні сили в пластинці Кірхгоффа, розподілені вздовж кола, прямували до нескінченності як ε^{-1}, коли ε прямує до нуля:

$$\frac{\partial w}{\partial n}\sim\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \partial^3 w\sim\frac{1}{\varepsilon} .$$

Аналогічно, дивлячись на співвідношення (12.24), можна зробити висновок, що рівновага можлива, якщо вектор напружень веде себе таким чином:

$$\tau(u)\sim\frac{1}{\varepsilon^2} .$$

Тепер зрозуміло, чому в нерівності Соболєва присутня величина *n*. Вона пов'язана з мірою $\Gamma_{N_\varepsilon}(x)$, і отже, розмірністю континууму *n* визначає, наскільки швидко напруження прямують до нескінченності.

Далі, з'ясуємо значення іншої величини, що входить нерівність Соболєва, - індексу *m*.

Сили в мембрані $\partial w/\partial n$ є, по суті, першою похідною прогину *w*, і тому сам прогин - це свого роду інтеграл сил. Якщо мембрана навантажена зосередженою силою, то поблизу точки прикладення сили поведінка нормальної похідної може бути охарактеризована наступним чином

$$\frac{\partial w}{\partial n}\sim\frac{1}{r} ,$$

тоді прогин є величиною, пропорційною логарифму відстані, тобто $w\sim\ln r$.

Аналогічний результат отримуємо, якщо прикладемо зосереджену силу до пружного тіла. Напруження є першою похідною переміщень:

$$\tau_i=\mu\left(u_{i,j}n_j+u_{j,i}n_i+\frac{2\nu}{1-2\nu}u_{j,j}n_i\right),$$

а переміщення, навпаки, є інтегралом напружень. Напруження поблизу точки прикладання сили поводяться як r^{-2}, переміщення, відповідно, як r^{-1}:

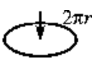
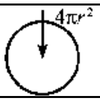
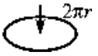
$$u\sim\frac{1}{r} .$$

Якщо деформування описується диференціальними рівняннями другого порядку (*m*=1), то сили є результатом лише одноразового диференціювання переміщень. У той же час, якщо диференційний оператор має четвертий порядок (*m*=2), то для отримання сил операцію диференціювання необхідно виконати тричі.

Один раз виконавши інтегрування r^{-1}, ми все ще будемо мати сингулярну функцію, а саме $\ln r$, але якщо проінтегрувати її тричі, то отримаємо функцію $\iiint r^{-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}r^2\left(\ln r-\frac{3}{2}\right)$, поведінка якої не викликає докорів, оскільки $\lim\limits_{r\to 0} r\ln r=0$.

Третя величина, яка входить в нерівність Соболєва - це *i*, ступінь сингулярності. Якщо *i* дорівнює нулю, то ступінь сингулярності відповідає реакції на дію зосередженої сили. При $m = 2$ ця реакція (характеристика поведінки поперечних сил поблизу точки навантаження) буде функцією третього рівня (табл. 12.2, рядок 3). Сполучена величина - це переміщення, яке завжди є функцією нульового рівня, і значить, ці два рівня максимально віддалені один від одного. Їх розділяють операції інтегрування, число яких достатньо для пом'якшення сингулярності r^{-1}.

Таблиця 12.2

Об’єкт		Характер поведінки параметрів НДС			
		3-й рівень	2-й рівень	1-й рівень	0-й рівень
m=1 (диф. рівняння 2-го порядку)					
Мембрана i=0, n=2		-	-	r^{-1} сили	$\ln r$ переміщення
Пружне тіло i=0, n=3		-	-	r^{-2} напруження	r^{-1} переміщення
m=1 (диф. рівняння 4-го порядку)					
Пластинка i=0, n=2		r^{-1} сили	$\ln r$ моменти	$r\ln r - r$ повороти	$\frac{1}{2}r^2\ln r - \frac{3}{4}r^2$
Пластинка i=1, n=2		r^{-2} сили	r^{-1} моменти	$\ln r$ повороти	$r\ln r - r$ переміщення
Пластинка i=3, n=2		r^{-4} сили	r^{-3} моменти	r^{-2} повороти	r^{-1} переміщення

Якщо i збільшується на одиницю (до пластинки прикладений зосереджений момент), то сингулярність порядку r^{-1} зміщується на другий рівень (табл. 12.2, рядок 4) та характеризує поведінку поблизу точки навантаження згинальних моментів. У той же самий час сполучена величина (кути повороту) зміщується на перший рівень. Всього одна операція інтегрування розділяє тепер сполучені величини. Цього недостатньо, щоб перетворити сингулярність r^{-1} в функцію пристойної поведінки - сполучена величина характеризується сингулярністю порядку $\ln r$.

При великому i, наприклад, якщо до пластинки прикладений стрибок прогину (табл. 12.2, рядок 5, i=3), для отримання сполученої величини (поперечних сил) необхідно виконати не інтегрування, а диференціювання. Це абсолютно неприйнятно для теореми Кастільяно, оскільки сполучена величина поводиться ще гірше, ніж реакція на зосереджене навантаження, що має сингулярність r^{-1}.

Основу класичної фази перетворення теорії споруд у фундаментальну дисципліну технічних наук цивільного будівництва (1875–1900) складала боротьба навколо її теоретичного обгрунтування, в результаті якої метод сил, створений Генріх Франц Бернхард Мюллер-Бреслау і його студентами, набув сучасної форми.

Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау значно розширив свої журнальні статті по теорії статично невизначуваних ферм, видані між 1882 і 1885 рр., в своїй книзі з опору матеріалів і теорії споруд (1886), заснованій на принципі можливих переміщень і роботі деформації. У цій монографії проблеми аналізу конструктивно-технічних особливостей несучих систем, витікаючих з щоденного будівництва, піддалися обробці, заснованій на єдиній теоретичній основі принципу можливих переміщень (у формі принципу віртуальних сил), другій теоремі Кастільяно (заснованій на принципі енергії) і принципі Менабреа. Ця робота, яка витримала в цілому п'ять видань (1886, 1893, 1904, 1913, 1924), не тільки завершила період формування дисципліни теорії споруд, який був розпочатий роботою Л. Нав'є «Résumé des Leçons» [Navier, 1826], але також і дозволила класичній теорії споруд замінити статику і опір матеріалів. Серцевиною цього синтезу було строге формулювання методу сил для ферм в його сучасній структурі і формі.

У першому виданні Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау вводить поняття статично визначуваної основної системи і одиничної сили X_k =1, що діє на цю систему. Наслідуючи ідею О. Мора та розширюючи її для охоплення конструкцій при згині, Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау дозволяє цій одиничній силі виконати роботу на дійсних переміщеннях (тобто над даною системою з n ступенями статичної невизначеності) і таким чином отримує n рівнянь пружності; він отримує ті ж самі рівняння через принцип Менабреа і суперпозицію рівнянь для внутрішніх сил. Майже всі статично невизначувані задачі розв'язані Г.Ф.Б. Мюллером-Бреслау з використанням принципу Менабреа. Проте, при визначенні ліній впливу для статичної невизначуваності у разі рухомого навантаження P_m він прямо приймає принцип віртуальних сил і за допомогою теореми Максвелла $\delta_{mn} = \delta_{nm}$, яку Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау узагальнив для поворотів, виражає першу версію методу сил [Müller-Breslau, 1886, с. 138–140].

Die neueren Methoden

der

Festigkeitslehre

und der

Statik der Baukonstruktionen,

ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und
den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit;

von

Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Hannover.

Mit 121 Textfiguren in Holzschnitt.

Leipzig,
Baumgärtner's Buchhandlung.
1886.

Титульний лист другого випуску «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktion» Мюллера-Бреслау

Безпосередньо після публікації «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktion» («Найновітніші методи опору матеріалів та теорії споруд») О. Мор видав сформульовану в категоричних виразах полеміку в журналі «Zivilingenieur», що протистояла концепції «ідеалізованої роботи деформації» Г.Ф.Б. Мюллера-Бреслау, яку він розповсюдив на спеціальні випадки навантаження у вигляді теплових ефектів і зсувів опор; одне з його критичних зауважень полягало в тому, що «цілий ряд інших позначень, наприклад, принцип роботи, принцип можливої роботи, принцип можливих переміщень, використовувалися для принципу можливих швидкостей захисниками новіших методів» [Mohr, 1886, с. 398]. Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау відповів на це слушне заперечення в 1892 р., символічно відокремивши фактичну умову зсуву і причинну умову сили від теоретичної умови сили [Müller-Breslau, 1892, с. 9-11]. Тому принцип віртуальних сил отримав право на існування вперше, незалежно від принципу можливих переміщень на рівні невеликих зсувів, не в назві, а в апараті рівнянь класичної теорії споруд.

Тоді як О. Мор обговорював законність теорем Кастільяно для обгрунтування класичної теорії споруд, Г.Ф.Б. Мюллер-Бреслау завершував класичну теорію споруд, послідовно розширюючи вираз енергії деформації для пружних розкісних систем. Тому енергетична доктрина стала домінуючою в теорії і практиці біля 1900 року. Проте в першому десятилітті XX ст. Вейнгартен і Мертенс спробували усунути панування теорем Кастільяно. Дебати, що супроводжували це, нагадували стару суперечку між О. Мором і Г.Ф.Б. Мюллером-Бреслау, яка значною мірою стосувалась проблем пріоритету. Але до 1910 року дебати були завершені Вейраухом на користь теорем Кастільяно в класичній теорії споруд.

Християн Отто Мор
нім. Christian Otto Mohr
(1835–1918)

Генріх Франц Бернхард Мюллер-Бреслау
нім. Heinrich Franz Bernhard Müller-Breslau
(1851–1925)

Ріхард Курант,
нім. Richard Courant
(1888–1972)

12.4. Суперництво як джерело народження двох наукових шкіл

> *У філософії не може бути государя, окрім істини. Ми повинні поставити пам'ятники із золота Кеплеру, Галілею, Декарту і на кожному написати: "Платон - друг, Аристотель - друг, але головний друг - істина.*
>
> І. Ньютон

12.4.1. Мор проти Мюллера-Бреслау

Запекле суперництво між Мором і Мюллером-Бреслау наприкінці 1880-х років врешті-решт привело до утворення на початку двадцятого сторіччя двох наукових шкіл. Генріх Мюллер-Бреслау відстоював інтерпретацію Максвелла загальної теореми роботи $A_a + A_i = 0$, яку він вважав такою ж важливою, як принцип мінімуму потенціальної енергії ($\Pi = \min$) і друга теорема Кастільяно $\left(\frac{\partial \Pi(\ldots, F_j, \ldots)}{\partial F_j} = \delta_j \right)$.

У 1864 р. Максвелл розглянув шарнірну ферму як механізм з коефіцієнтом корисної дії, рівним 1: у фермі Максвелла, модель якої заснована на енергії механізму, зовнішня робота, A_a перетворюється на енергію деформації П без втрат відповідно до закону збереження енергії. Мор, навпаки, розробив іншу інтерпретацію загальної теореми роботи в 1874 р., в якій виконується тільки зовнішня робота, тобто вираз теореми набуває вигляду $A_a = 0$. Різниця між кінематичною механічною моделлю ферми Мора і моделлю Максвелла, що базується на енергії механізму, полягає в тому, що підхід Максвелла заснований на внутрішній дійсній роботі і законі збереження енергії, а Мора, з іншого боку, на зовнішній дійсній роботі. Однак, і енергетична модель, і модель кінематичного механізму засновані на принципі можливих сил.

Суперечка між Мором і Мюллером-Бреслау насамперед стосувалася

- формулювання, адаптації та узагальнення понять роботи і енергії для прикладної механіки (див. [Clapeyron, 1833], [Ляме, 1852]) в формі теореми Клапейрона, і їх реалізації в системі знань теорії конструкцій;
- теорії лінійно-пружних ферм, опублікованої Максвеллом в 1864 р.;
- теорії ферм, розробленої Мором в 1874/75 рр. на основі загальної теореми роботи;
- енергетичних теорем, сформульованих Кастільяно в 1879 р.;
- розширення теорії фер Максвелла і Мора, яку прийняв Мюллер-Бреслау для лінійно-пружних ферм;
- застосування Мюллером-Бреслау енергетичних теорем Кастільяно до лінійно-пружних ферм.

Суперечка між Мором і Мюллером-Бреслау щодо основ класичної теорії конструкцій, яка тривала з 1883 до 1889 р., відбувалася на сторінках промислових журналів і була продовжена в додатках до їх наукових творів. Ця наукова ворожнеча швидко поширилася на інші області теорії конструкцій, наприклад, на розрахунок просторових конструкцій.

Вони не змогли в той час отримати всеосяжне, чітке розділення принципів теорії споруд на принцип можливих переміщень, принцип віртуальних сил, загальну теорему роботи і принцип енергії.

12.4.2. Суперечка про принципи

Це наукове протистояння між 1883 і 1889 рр. в першому десятилітті XX-го століття переросло у суперечку щодо пріоритету між Мертенсом і Вейнгартеном з одного боку і Хертвігом, Фьопплем і Вейраухом з іншого. Як зазначає німецький історик науки К.Е. Кюррер [Kurrer, 2008], характерною особливістю цього наукового протиріччя було те, що з вищезгаданих людей кожен приводив доводи на користь пріоритетних прав Мора або Мюллера-Бреслау.

Георг Крістоф Мертенс (1843-1917) - провідний німецький мостобудівник. В 1895 р. був призначений професором мосто-будування і теорії споруд в Дрезденському технічному університеті, послідовник Мора. Автор тритомної роботи Vorlesungen über Statik und Festigkeitslehre (лекції по теорії конструкцій і опору матеріалів) [Mehrtens, 1903, 1904, 1905], в якій в одному з розділів надав схему історії теорії конструкцій і всебічно обгрунтував пріоритетні права Мора стосовно розвитку теорії конструкцій: ліній впливу, загальної теореми роботи, принципу можливих сил тощо.

Юліус Вейнгартен, нім. Julius Weingarten (1836 –1910)

Георг Крістоф Мертенс, нім. Georg Christoph Mehrtens (1843 –1917)

Крім того, слідуючи напрямку Мора, він виключає теореми Кастільяно як основу класичної теорії конструкцій.

Юліус Вейнгартен (1836-1910) в 1874 – 1903 рр. був професором механіки в Берлінській Академії (Берлінський технічному університеті після 1879 р.).

Август Хертвіг (1872-1955) за рекомендацією Мюллера-Бреслау в 1902 р. був призначений професор теорії конструкцій в Аахені. У 1906 р. опублікував статтю, присвячену розвитку деяких принципів теорії конструкцій і лекціям з теорії споруд і опору матеріалів К.Г. Мертенса [Hertwig, 1906]. Підіймав питання пріоритету щодо кінематичної теорії в'язей, ліній впливу, теорій статично невизначених систем Максвелла, Мора і Кастільяно. Критикував підхід Мертенса стосовно теорії пружної арки і теорії вторинних зусиль. У 1924 р. став спадкоємцем Мюллера-Бреслау в Берлінському технічному університеті. Крім важливої роботи по теорії конструкцій і ґрунтів Хертвіг зробив внесок історію конструкцій.

Август Хертвіг, нім. August Hertwig (1872 – 1955)

Август Феппль, нім. August Föppl (1854 –1924)

Йохан Якоб Вейраух, нім. Johann Jakob Weyrauch (1845 –1917)

Август Феппль (1854-1924) в 1894 р. став наступником Баушінгера в Мюнхенському технічному університеті. Приділяв увагу теоремі Кастільяно в томі Festigkeitslehre (опір матеріалів) своїх Vorlesungen uber Technische Mechanik (лекцій з прикладної механіки) [Föppl, 1897]. Наводив приклади розрахунку систем з одним ступенем статичної невизначеності.

Йохан Якоб Вейраух (1845-1917) в 1890 р. був призначений професором в Штутгартському технічному університеті. Відомий своїми роботами з механічної теорії теплоти, аеростатіки і аеродинаміки та з деяких аспектів технічної механіки.

З точки зору змісту Берлінська школа теорії конструкцій по суті слідувала за геометричним представленням статики, тоді як Дрезденська школа прикладної механіки ґрунтувалась на кінематичному поданні статики.

Теми спору між Мором і Мюллером-Бреслау і їх послідовниками щодо принципів теорії конструкцій стали об'єктами наукових суперечок і в період між 1936 та 1938 роками, тобто в фазі винаходів теорії конструкцій (1925 - 1950). В основному це стосувалося принципу можливих переміщень і варіаційних принципів теорії пружних деформацій. Обговорення було відкрито Пьошлем в 1936 р. в його статті щодо принципу мінімуму енергії в теорії пружності в журналі Der Bauingenieur [Pöschl, 1936]. В тій статті він приходить до висновку, що принцип можливих переміщень призводить до істотно різних висновків «в залежності від того, чи є розглядувана проблема стандартною задачею рівноваги деформівного об’єкту або такою, де розглядається втрата стійкості» (цит. за [Schleusner, 1938/3]). У відповіді Домке доводить, що цей висновок не має сенсу [Domke, 1936] і посилається на свою роботу, опубліковану в 1915 р. [Domke, 1915], в якій він роз'яснює війну положень щодо принципів теорії конструкції. Маргуер також в листі до журналу Zeitschrift for Angewandte Mathematik und Mechanik в 1938 довів, що висновок Пёшля не може бути підтримано, але за зовсім інших міркувань [Marguerre, 1938/1]. За рік до того Каммюлер видав свій фундаментальний огляд щодо принципу можливих переміщень в журналі Beton und Eisen [Kammuller, 1937], який спровокував заперечення Арно Шлеуснера [Schleusner, 1938/1], які, в свою чергу, привели до заперечення Каммюлера [Kammuller, 1938/1], відповіді Шлеуснера [Schleusner, 1938/2] і, нарешті, до відповіді Каммюлера на відповідь Шлеуснера [Kammuller, 1938/2]. Дебати, в яких Шлеуснер вперше використовував вираз «принцип можливих сил» німецькою мовою [Schleusner, 1938/1, p. 253] були зупинені редакцією журналу Beton und Eisen. Слідом за цим, Шлеуснер вжив заходів, щоб його позаштатний помічник Клаус Цвейлінг сформував рукопис Das Prinzip der virtuellen Verrackungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie (принцип можливих переміщень і варіаційні принципи теорії пружності), яку Шлеуснер видав під своїм ім'ям за згодою автора в журналі Der Stahlbau в 1938 [Schleusner, 1938/3].


Арно Шлеуснер,
нім. Arno Schleusner
(1882-1951)


Клаус Цвейлінг,
нім. Klaus Zweiling
(1900-1968)

У вищезгаданій роботі чітко видно зроблену відмінність між принципом можливих переміщень, принципом можливих сил і загальною теоремою роботи. В ній також встановлено, що принцип можливих переміщень пояснює загальні принципи теорії пружності. Отже, Цвайлінг і Шлеуснер зробили важливий крок до формулювання теорії конструкцій на мові варіаційного числення.

Арно Шлеуснер (1882-1951) вивчав технічні науки в Берлінському технічному університеті і математику та фізику в університетах Берліна, Ростока і Йени. Мав технічну практику в різних компаніях, які спеціалізувались на металевих та залізобетонних конструкціях і будівництві літаків. Шлеуснер автор статейт з теорії стійкості і розрахунку бетонних та залізобетонних конструкцій. Написав кілька монографій.

Клаус Цвейлінг (1900-1968) вивчав математику і фізику в Геттінгені, а після закінчення був фізиком в лабораторії Lorenz AG в Берліні.

З 1937 р. деякий час Цвейлінг писав наукові роботи для Шлеуснера, які з'явилися пізніше. Найважливіші з них були присвячені теоретичному обгрунтуванню за допомогою варіаційного числення і формулюванню принципів теорії конструкцій (принципу можливих переміщень, принципу можливих сил, загальній теоремі роботи). На чолі теорії конструкцій поставив принцип можливих переміщень, з якого за деяких умов може бути виведено принцип можливих сил. Комбінація обох принципі, знову за деяких умов, дозволяє сформувати загальну теорему роботи.

Після 1945 р. він поновив власні публікації, а згодом став провідним марксистським теоретиком в НДР.

У своїй книзі Gleichgewicht und Stabilität (Рівновага і стійкість), виданій в 1953 р. [Zweiling, 1953], він зібрав роботи, які були видані під ім'ям його найкращого друга Шлеуснера, тому що Цвайлінгу було заборонено публікуватися в роки Третього Рейху.

За три роки до цього Маргуер чітко пояснив двоїстість принципів можливих переміщень і можливих сил на рівні малих переміщень [Marguerre, 1950, стор 70-90], але потім дійшов висновку, що принцип можливих переміщень включає принцип можливих сил в разі великих переміщень. Ще в 1938 р. Маргуер зробив спробу подолати домінування лінійної теорії конструкцій, коли опублікував теорію великих деформацій кривої пластини [Marguerre, 1938/2].

Найголовнішим є те, що дискусія, яка виникла с приводу застосування принципу можливих переміщень, сприяла розвитку дисципліни теорії конструкцій.

12.5. Б.П. Клапейрон, Г. Ламе, Дж. Максвелл, О. Мор, Дж. Релей, В.Л. Кирпичов, С.П. Тимошенко, А. Ляв

> *Автор заслужить вічну подяку всіх, хто вивчає фізику і математику, якщо він продовжить свою роботу в тому ж дусі, в якому він почав перший том. Через свою вдалу систематичну організацію всього об'єму найскладніших проблем акустики, автор надав можливість вивчати цей предмет способом набагато простішим, ніж раніше.*
>
> Г. Гельмгольц
> (щодо роботи Дж.В. Релея «Теорія звуку»)

Розвиток будівельної механіки в цей період пов'язаний з іменами Б.П. Клапейрона, Г. Ламе, Дж. Максвелла, О. Мора, Дж.В. Релея, В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, О. Лява, Софі Жермен та ін. Два найзначніші з наукових досягнень Бенуа Поля Еміля Клапейрона – це, скоріш за все, «Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme» («Трактат про рушійну силу тепла») [Clapeyron, 1926] і теорема, яка носить його ім'я в теорії пружності. Надання цій теоремі імені Клапейрона може бути приписане Г. Ламе, який в 1852 р. виклав теорему Клапейрона для загального випадку просторового пружного континууму в першій монографії по теорії пружності [Lamé, 1852, с. 80–92]. Обидві ці роботи Б.П. Клапейрона мали вирішальний вплив на фундаментальні науково-технічні дисципліни - теорію споруд і прикладну термодинаміку, яка почала формуватися з 1820 р.

Публікація теореми Клапейрона про роботу пружних сил (1852) ознаменувала початок нової ери енергетичного напрямку у теорії пружності і будівельній механіці. Формула Клапейрона встановлює залежність між роботою зовнішніх сил і потенціальною енергією деформації. Принципово важливо, що ця залежність, справедлива для дійсного стану системи, дозволяє шляхом варіювання певних компонентів сформулювати різні варіаційні принципи механіки.

Хоча головні принципи термодинаміки, які були сформульовані до 1850 р. Саді Карно (1796–1832), Дж.П. Джоулем (1818–1889), Р. Майєром (1814–1879), Г. Гельмгольцем (1821–1894), Р. Клаузісом (1822–1888) і У. Томсоном (1824–1907), Д.У. Гіббсом (1839-1903), відносилися до найважливіших відкриттів XIX ст. багатьма знаними сучасниками, тільки багато десятиліть опісля вони суттєво вплинули на теоретичні основи теорії споруд і прикладної термодинаміки під час їх формування, яке тривало три чверті сторіччя (1825–1900). Їх становлення було результатом створення парового двигуна, не як винаходу для досягнення специфічної мети, а швидше як «універсального двигуна промисловості» [Marx, 1979, с. 398]. Паровий локомотив буксирував промислову революцію до найдальших занедбаних куточків континенту.

Фундаментальний варіаційний принцип термодинаміки – принцип термодинамічної рівноваги Гіббса.

Для k-компонентної r-фазної системи при сталості її внутрішньої енергії U

об'єму V і кількості молей компонентів умова термодинамічної рівноваги полягає в тому, що при всіх можливих змінах параметрів стану ентропія системи S залишається незмінною або зменшується. Іншими словами ентропія ізольованої системи при термодинамічній рівновазі має умовний максимум

$$(\delta S)_{U,V} \leq 0.$$

Знак рівності має місце при протіканні в системі зворотних процесів, знак нерівності - при незворотних процесах (у разі ізольованої системи).

Принцип рівноваги можна виразити також через термодинамічні потенціали - внутрішню енергію U, ентальпію H, енергію Гіббса G, енергію Гельмгольца F - при умовах, що характеризуються постійністю відповідних параметрів стану. Термодинамічній рівновазі відповідає умовний мінімум термодинамічних потенціалів

$$(\delta U)_{S,V} \geq 0; (\delta H)_{P,S} \geq 0; (\delta G)_{V,T} \geq 0; (\delta F)_{V,T} \geq 0,$$

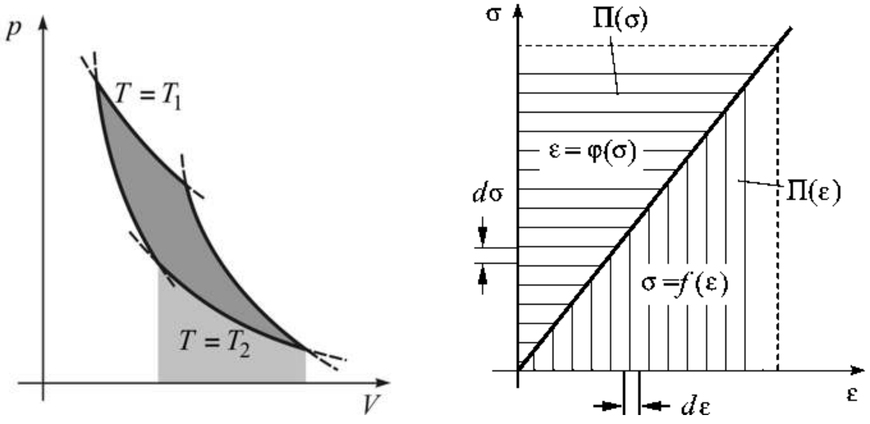
де U - внутрішня енергія, S - ентропія, $H{=}U{+}PV$ - ентальпія, $G = H - TS$ - ізобаро-ізотермічний потенціал (вільна енергія Гіббса, вільна ентальпія), $\left.\begin{matrix} F = U - TS \\ A = U - TS \end{matrix}\right\}$ - ізохоро-ізотермічний потенціал (вільна енергія Гельмгольца).

Перехід системи з одного стану термодинамічної рівноваги в інший може відбуватися через послідовність станів, кожен з яких є також станом термодинамічної рівноваги. Це означає, що параметри стану системи протягом всього процесу переходу нескінченно мало відрізняються від своїх значень при термодинамічній рівновазі. Це - рівноважний (квазістатичний) процес. В дійсності ж процеси переходу завжди нерівноважні, вони вивчаються хімічною термодинамікою [Базаров, 2010], [Тюлина, 1979], [Пригожин, Дефей, 1966].

Впровадження енергетичної доктрини в теорію споруд – термін, введений засновником фізичної хімії, Вільгельмом Оствальдом (1853–1932), приблизно в 1900 р. – є не чим іншим, як проекцією реального парового двигуна на науково-технічну модель розкісної ферми, яку на основі енергетичного підходу виконав Джеймс Клерк Максвелл [Maxwell, 1864]. Це стає ясним, коли ми порівнюємо діаграму об'єм-тиск теплового двигуна (рис. 12.7,*а*) з діаграмою сила-переміщення лінійно-пружної наскрізної стержневої конструкції (рис. 12.7,*б*). В обох випадках площа окресленої області визначає енергію відповідного технічного артефакту, вираженої у формі механічної роботи. Б.П. Клапейрон сформулював математичні принципи обох діаграм.

Рівняння, що відповідає розв'язку задачі про деформацію пружних шарнірних ферм на основі принципу віртуальних сил, Дж.К. Максвелл використав, щоб отримати співвідношення $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ [Maxwell, 1864, c. 297], яке в 1886 р. Г. Мюллер-Бреслау назвав теоремою Максвелла, як данину цьому дивовижному фізику.

Особливе виведення рівняння Максвелла із теореми Клапейрона в кількох словах і без діаграм, зіграло велику роль в суперечці між Християном Отто Мором і Генріхом Францем Бернхардом Мюллером-Бреслау щодо теоретичного обґрунтування класичної теорії споруд, яка точилась впродовж 1880-х років.



а *б*

Рис. 12.7. *а*) діаграма об'єм-тиск по Клапейрону і *б*) діаграма залежності деформацій від напружень одновимірного тіла, що підпорядковується закону Гука

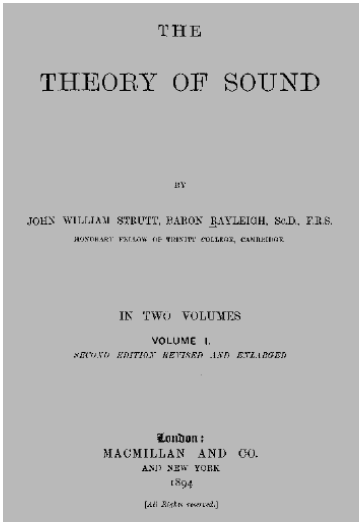
Після вирішення проблеми стосовно деформації статично визначуваної розкісної ферми Дж.К. Максвелл звернувся до аналізу статично невизначуваних ферм. Для цього він обрав статично визначувану основну систему з *s–n* стержнями та записав вираз для сумарного зусилля $S_j^{(n)}$ в стержні *j* статично невизначуваної системи, що має *n* зайвих стержнів

$$S_j^{(n)} = S_{j,0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} S_{j,k}^{(0)} \cdot X_k .$$

Без сумніву, двотомна робота Джона Вільяма Стретта, третього барона Релея «Теорія звуку» [Rayleig, 1877-78] належить до бібліотеки класики фізики і є першою книгою, що присвячена акустиці. У своєму огляді першого тому цієї книги для журналу Nature (Природа), Г. Гельмгольц пише: «Автор заслужить вічну подяку всіх, хто вивчає фізику і математику, якщо він продовжить свою роботу в тому ж дусі, в якому він почав перший том. Через свою вдалу систематичну організацію всього об'єму найскладніших проблем акустики, автор дав можливість вивчати цей предмет способом набагато простішим, ніж раніше» (цит. за [Rayleig, 1879 (передмова німецького перекладача)]. За пропозицією «канцлера німецької фізики» Г. Гельмгольца, двотомна робота Дж.В. Релея була негайно перекладена німецькою мовою [Rayleig, 1879, 1880]. Друге, доповнене і розширене видання англійською мовою з'явилося в 1894 р. і 1896 р. [Rayleig, 1894, 1896]; саме це видання без змін було передруковане Dover Publications в 1945 р.

Цікаво, що Джон Вільям Стретт (лорд Релей) був удостоєний звання Лауреата Нобелівської премії з фізики 1904 р. «За дослідження щільностей найбільш розповсюджених газів і за відкриття аргону в ході цих досліджень».

Але яке відношення класик акустики має до класичної теорії споруд? Погляд на перший том «Теорії звуку» дає нам підказку. Після того, як Дж.В. Релей розглядає коливання систем взагалі в перших чотирьох розділах, він аналізує коливання тросів, стержнів, мембран і пластин; у другій частині тому він вивчає коливання оболонок [Rayleig, 1894, с. 395–432] і електричні коливання [Rayleig, 1894, с. 433–474]. Його другий том присвячений аеродинамічним проблемам акустики.



THE

THEORY OF SOUND

BY

JOHN WILLIAM STRUTT, BARON RAYLEIGH, Sc.D., F.R.S.
HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

IN TWO VOLUMES

VOLUME I.
SECOND EDITION REVISED AND ENLARGED

London:
MACMILLAN AND CO.
AND NEW YORK
1894

[All Rights reserved.]

Обкладинка другого випуску першого тому «Теорії звуку» лорда Релея

Поняття енергії займає центральне місце в акустиці Дж.В. Релея. Наприклад, в третьому розділі, «Коливальні системи взагалі» [Rayleig, 1894, с. 91–169], він починає з потенціальної енергії П і кінетичної енергії T і узагальнює теорему взаємності коливальних пружних систем, сформульовану Е. Бетті в 1872 р., за допомогою поняття узагальнених сил F_k і відповідних узагальнених координат переміщень δ_k і принципу Д'Аламбера: «Якщо сила гармонійного типу із заданими амплітудою і періодом діє на систему в точці P, то переміщення, що виникає, в іншій точці Q, буде мати ту саму амплітуду і фазу, що і переміщення в точці P, якби сила була прикладена в Q» (цит. за [Тимошенко, 1957, с. 383]). У своїй книзі «Лишние неизвестные в строительной механике» [Кирпичев, 1903, 1934], В.Л. Кирпичов перекладає математично сформульовану Дж.В. Релеєм проблему коливань на мову енергетичного принципу, а формалізм Ж.-Л. Лаґранжа щодо узагальнених координат і сил – на рівень аналізу споруд.

Дж.В. Релей - засновник принципу [Rayleig, 1894, с. 109–112], який стверджує, що в замкнутій, в сенсі термодинаміки, системі, в якій закон збереження енергії має форму

$$\Pi = T\,, \tag{12.25}$$

перша власна частота ω_1^2 системи може бути обчислена як

$$\omega_1^2 = \frac{\Pi}{\left(T/\omega_1^2\right)}. \tag{12.26}$$

Вираз (12.26) відомий як дроб Релея. Для балок довжиною l на двох опорах з постійною погонною масою μ і постійною жорсткістю при згині EI, з енергією деформації

$$\Pi = \frac{EI}{2}\cdot\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2\overline{w}(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{12.27}$$

і кінетичною енергією

$$T = \omega_1^2 \frac{\mu}{2} \cdot \int_0^l \overline{w}^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.28}$$

власна частота, отримана із закону збереження енергії (12.25), дорівнює

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{EI}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2 \overline{w}(x)}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 \mathrm{d}x}{\frac{\mu}{2} \cdot \int_0^l \overline{w}^2(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{12.29}$$

Вираз (12.29) є частинним поданням дробу Релея (12.26), що випливає з порівняння знаменників в (12.29) і (12.26). Якщо ми підставимо статичну криву деформації $w(x)$ замість форми коливань $\overline{w}(x)$ в (12.27) і (12.28), тоді отримаємо корисне наближення

$$\omega_1^2 \approx \frac{EI \cdot \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 \mathrm{d}x}{\mu \cdot \int_0^l w^2(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{12.30}$$

Таким чином, Дж.В. Релей досяг успіху у визначенні першої власної частоти коливальних систем за допомогою закону збереження енергії (12.25) без розв'язання відповідного диференціального рівняння. Пізніше, Вальтер Рітц ще далі розвинув метод Релея в рамках варіаційного числення і сформував загальний наближений метод (1909) – метод Релея-Рітца. Метод Рітца, призначений для прямого розв'язання варіаційних задач, забезпечує не тільки математичну фізику, але і прикладну математику і теорію споруд наближеним апаратом, здатним елегантно вирішувати проблеми еластостатики і еластокінетики, такі, наприклад, як обчислення критичного навантаження для стержня змінної жорсткості.

Віктор Львович Кирпичов завершив період формування дисципліни теорії споруд в Росії своєю книгою «Лишние неизвестные в строительной механике» (1903), яка містить всього лише 140 сторінок. Вона пояснює всю теорію статично невизначуваних шпренгельних ферм в надзвичайно простій манері викладу. Таким чином, він і Мюллер-Бреслау можуть вважатися фігурами, які підвели підсумок в класичній теорії споруд.

Як і Дж.В. Релей, В.Л. Кирпичов засновував свою роботу на потенціальній енергії П (енергії деформації) і ввів поняття узагальнених сил F_k і відповідні узагальнені переміщення δ_k.

Ідея про потенціальну функцію належить Лагранжу і була застосована їм ще в 1777 р. до системи матеріальних точок. Лаплас користувався цією функцією для суцільних тіл. Але обидва ці математика не дали цій функції особливої назви. Термін «потенціальна функція» ввів Дж. Гріном. Цьому вченому належать чудові застосування потенціальної функції до вчення про електрику[1] і до вчення про пружні явища. Останньому питанню присвячені два його мемуари, що стосуються теорії світла[2]. У них потенціальна енергія виражена як функція другого ступеня від координат, що зображують пружні зміни.

Для системи з n-мірним ступенем вільності і для особливого випадку, пов'язаного з незалежністю від часу *П* (консервативна механічна система), В.Л. Кирпичов формулює рівняння Лаґранжа:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_k - \frac{\partial П}{\partial \delta_k}\right)d\delta_k = 0. \qquad (12.31)$$

В.Л. Кирпичов отримав рівняння Лаґранжа (9.16), призначене для статики з принципу можливих переміщень шляхом порівнянням коефіцієнтів. Оскільки $d\delta_k \neq 0$, вираз в дужках в (12.31) повинен зникнути, тобто справедлива рівність

$$\frac{\partial П}{\partial \delta_k} = F_k. \qquad (12.32)$$

Рівняння (12.32) - не що інше як перша теорема Кастільяно. Нижче наведена сторінка із книги Кирпичова з рівняннями (12.31) і (12.32), де *U* позначає енергію деформації; грецькі заголовні букви Φ,Ψ,Θ позначають узагальнені сили F_1, F_2, F_3; грецькі рядкові букви Φ,Ψ,Θ позначають узагальнені переміщення $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Згідно з В.Л. Кирпичовим, узагальнені сили – це не тільки сили у вузькому розумінні, але і різні їх поєднання, які також включають, наприклад, моменти. Узагальнені переміщення також є не просто переміщеннями у вузькому сенсі, але є складними переміщеннями, які також включають, наприклад, кути повороту. Для В.Л. Кирпичова все це - особливі випадки узагальнених сил і узагальнених переміщень. У першій половині періоду консолідації теорії споруд (1900-1950 рр.) це привело до методу переміщень.

Паралельно методу переміщень розвивався метод сил, який слідував шляхом не через енергію деформації *П*, але через доповнювальну енергію деформації *П** (*П* = *П** у разі лінійно-пружної поведінки матеріалу) і принцип віртуальних сил. В.Л. Кирпичов розвиває цей підхід до розрахунку статично невизначуваних ферм, використовуючи другу теорему Кастільяно і принцип Менабреа в розділах 6 і 7 своєї книги. І в цьому випадку він засновував свої висновки на концепції узагальнених сил і переміщень. Роблячи це, він припускає рівність між енергією деформації *П* і доповнювальною енергією деформації *П**, позначаючи обидві буквою *U*. Опис з використанням узагальнених сил і переміщень плюс обмеження щодо лінійно-пружної поведінки матеріалу забезпечили роботі Кирпичова граничну ясність і доступність.

---

[1] Див. повне зібрання творів Дж. Гріна: Mathematical Papers of the late George Green; перший мемуар цієї збірки.

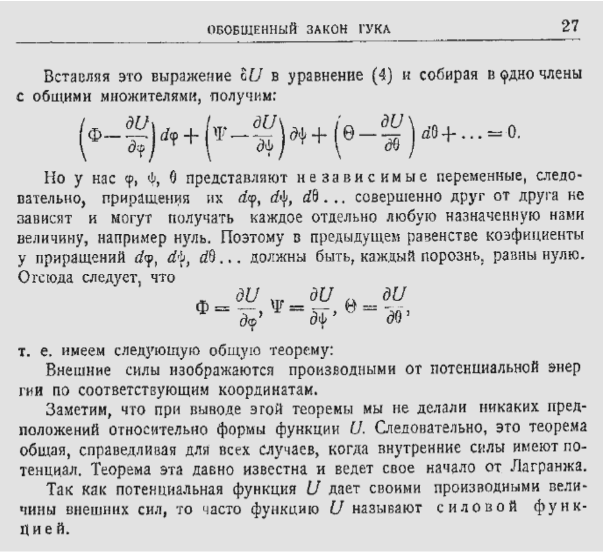
[2] У тому ж повному зібранні мемуари: On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light. On the propagation of Light in crystalised Media.

В.Л. Кирпичев наводить три варіанти доведення теореми Кастільяно і відзначає, що ця теорема була виведена в кінці сімдесятих років XIX ст. і вже тоді була пристосована до розв'язання різних задач будівельної механіки. Але частинний вигляд її, який відноситься до довільного пружного тіла, був наведений ще в книзі [W. Thompson and P.G. Tait, Treatise on Natural Philosophy][1], перше видання якої вийшло у 1867 році. «Мабуть, - пише він, - можна знайти і більш ранні вказівки з цього питання».

В.Л. Кирпичев підкреслює різницю між теоремами Лагранжа і Кастільяно: якщо теорема Лагранжа є загальною теоремою, справедливою при будь-якому вигляді функції потенціальної енергії; треба тільки, щоб така функція існувала, тобто, щоб внутрішні сили мали потенціал (див. сторінку 27 з книги В.Л. Кирпичова), то теорема Кастільяно пов'язана з формою функції потенціальної енергії і справедлива тільки для випадку, коли ця енергія є однорідною функцією другого ступеня (див. теорему Ейлера для однорідних функцій), тобто тільки для пружних систем.

Це неодноразово підкреслював С.П. Тимошенко, і в книзі («Сопротивление материалов» т. I, стр. 304-305, 1945 г.) ним для прикладу геометрично нелінійної задачі згину балки показано, що теорема не виконується.

Справа в тім, що Джордж Грін започаткував теорію пружності в 1839 р. на принципі збереження енергії [Грін, 1839]. Рис. 12.8 ілюструє поняття енергії як центр фізичних, кінематичних і кінетичних співвідношень механіки континууму, які в XIX-му столітті були більш-менш узгоджені з теорією пружності. Грін ввів функцію енергії деформації. Він припустив, що ця функція може бути отримана у вигляді добутків компонентів деформації і тому записав її як суму однорідних функцій цих змінних першого, другого і вищих порядків. Перший з цих членів не може існувати, тому що потенціальна енергія повинна бути істинним мінімумом, коли тіло недеформоване; і оскільки всі деформації є малими, потрібно розглянути тільки другий член. У найпростішому випадку – це однорідна квадратична функція



ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА 27

Вставляя это выражение δU в уравнение (4) и собирая в одно члены с общими множителями, получим:

$$\left(\Phi-\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)d\varphi+\left(\Psi-\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\partial\psi+\left(\Theta-\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)d\theta+\ldots=0.$$

Но у нас φ, ψ, θ представляют *независимые* переменные, следовательно, приращения их $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta\ldots$ совершенно друг от друга не зависят и могут получать каждое отдельно любую назначенную нами величину, например нуль. Поэтому в предыдущем равенстве коэфициенты у приращений $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta\ldots$ должны быть, каждый порознь, равны нулю. Отсюда следует, что

$$\Phi=\frac{\partial U}{\partial \varphi},\ \Psi=\frac{\partial U}{\partial \psi},\ \Theta=\frac{\partial U}{\partial \theta},$$

т. е. имеем следующую общую теорему:

Внешние силы изображаются производными от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

Заметим, что при выводе этой теоремы мы не делали никаких предположений относительно формы функции U. Следовательно, это теорема общая, справедливая для всех случаев, когда внутренние силы имеют потенциал. Теорема эта давно известна и ведет свое начало от Лагранжа.

Так как потенциальная функция U дает своими производными величины внешних сил, то часто функцию U называют *силовой функцией*.

Рівняння Лаґранжа і перша теорема Кастільяно у версії Кирпичова (у верхньому рівнянні є помилка в середньому формулюванні: множник $\partial\psi$ слід читати як $d\psi$)

$$\Pi(\varepsilon)=\Pi=\frac{1}{2}\cdot E\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon, \tag{12.33}$$

---

[1] Part II, p. 678, або с. 208 частини II німецького перекладу.

яка для непружного випадку набуває форми

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi = \frac{1}{2} \cdot f(\varepsilon) \cdot \varepsilon. \qquad (12.34)$$

Рівняння 12.34 містить фізичний закон, який більше не відповідає закону Гука:

$$f(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) \neq E \cdot \varepsilon. \quad (12.35)$$

Використовуючи цей принцип, Грін, отримав рівняння пружності, які в загальному випадку містять 21 константу, а в найпростішому випадку - тільки дві. Доведення існування $\Pi(\varepsilon_{ij})$, що базується на першому і другому фундаментальних законах термодинаміки, було представлено Лордом Кельвіном (1824-1907) в 1855 р.

За десять років до цього Стокс задав питання, чи характеризується загальна пружність 21-ю (мультиконстантна теорія, континуум) або 15-ма константами (раріконстантна теорія, дісконтинуума). Вольдемар Фойгт (1850-1919) шляхом експериментів між 1887 і 1889 рр., був першим, хто довів, що мультиконстантна теорія може бути застосована.

Рис. 12.8 Тетраедр механіки континууму, заснованної на понятті енергії

У суперечках між прихильниками раріконстантної і мультиконстантної теорій сумніву піддавалися основи загальної теорії пружності.

Енергія може бути виражена як функція деформованого стану, але також і як функція напруженого стану (рис. 12.8). Фрідріх Енгессер поставив крапку в суперечці щодо основ теорії конструкцій, ввівши поняття доповнювальної енергії [Engesser, 1889/1]

$$\Pi(\sigma) = \Pi^* = \frac{1}{2} \cdot \varphi(\sigma) \cdot \sigma. \quad (12.36)$$

Доповнювальна енергія (рівняння (12.36)) є двоїстою до енергії деформації (рівняння (12.34)); рівняння (12.36) містить фізичний закон, який більше не відповідає закону Гука:

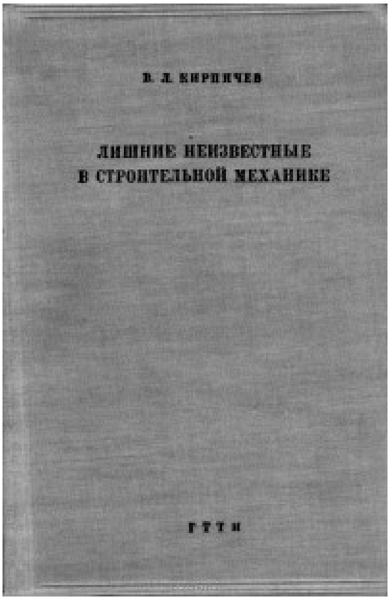
$$\varphi(\sigma) = \varepsilon(\sigma) \neq \frac{\sigma}{E}. \qquad (12.37)$$

Для лінійно-пружного матеріалу, рівняння (12.36) може бути спрощено до

$$\Pi(\sigma) = \Pi^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \sigma. \qquad (12.38)$$

Доповнювальна енергія (рівняння (12.36) або рівняння (12.38)) відповідає області вище лінії діаграми напруження-деформації (рівняння (12.34) або рівняння (12.33)). Для лінійно-пружного випадку рівняння (12.38) є нічим іншим як теоремою Клапейрона (1833).

У 1878 р. італійський інженер Франческо Кротті і незалежно від нього німецький інженер Фрідріх Енгессер сформулювали теорему $\delta_i = \frac{\partial u^{\text{доп}}}{\partial P_i}$ про те, що частинна похідна від доповнювальної енергії, яка є функцією від навантажень, по деякій силі P_i дорівнює відповідному узагальненому переміщенню δ_i. Ця теорема має назву Кротті-Енгессера і може застосовуватись до нелінійних систем. Природно, що у частинному випадку лінійної задачі доповнювальна енергія дорівнює потенціальній енергії пружної деформації і тоді теорема Кротті-Енгессера зводиться до другої теореми Кастільяно.



В. Л. КИРПИЧЕВ

ЛИШНИЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ
В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

ГТТИ

Обкладинка книги В.Л. Кирпичова «Лишние неизвестные в строительной механике»

Окрім теорем Кастільяно В.Л. Кирпичов також вивів теорему взаємності. Структура його теорії статично невизначних ферм, що базується виключно на принципі енергії, концепції узагальнених сил і узагальнених переміщень і рівнянні Лаґранжа в значній мірі привертає увагу завдяки своїй універсальності та лаконічній формі, ясність якої залишалася неперевершеною протягом багатьох років. Наприклад, розділ, присвячений лініям впливу, стає особливо ясним завдяки використанню ним теореми взаємності [Кирпичев, 1934, с. 57], яка в своїй найбільш загальній формі була, звичайно, доведена Релеєм.

Оскільки потенціальна енергія пружних тіл є однорідною функцією змінних, то до неї можна застосувати відому теорему Ейлера про однорідні функції. А саме: якщо скласти повний диференціал цієї функції і в ньому замість диференціалів змінних поставити самі змінні, то в результаті вийде початкова функція, помножена на ступінь однорідності її. У нашому випадку цей множник буде два, і для потенціальної функції U отримаємо:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}\varphi + \frac{\partial U}{\partial \psi}\psi + \frac{\partial U}{\partial \theta}\theta + ... = 2U.$$

Але похідні

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial \psi}, \frac{\partial U}{\partial \theta}, ...$$

являють собою сили Φ, Ψ, Θ, ..., відповідні до змінних $\varphi, \psi, \theta, ...$. Вставляючи ці сили замість похідних в попереднє рівняння, отримаємо:

$$\Phi\varphi + \Psi\psi + \Theta\theta + ... = 2U.$$

«Це рівняння, - пише В.Л. Кирпичов, - в німецьких творах називається теоремою Клапейрона. Воно виражає собою той загальний закон про те, що потенціальна енергія завжди вдвічі менша, ніж робота зовнішніх сил, відповідно до положення рівноваги».

Звідси витікає наступне. Нехай деякі зовнішні сили будуть відразу (миттєво) прикладені до пружної системи в її природному стані. Дійшовши до положення, в якому вони врівноважуються з внутрішніми силами, ці навантаження зроблять роботу вдвічі більшу, ніж накопичена внутрішня енергія. Отже, пружне тіло не зупиниться в цьому положенні, а рух його буде тривати, поки переміщення не отримають величини

$$2\varphi, 2\psi, 2\theta, \ldots$$

Тільки тоді швидкість частин системи обернеться в нуль. Потім почнуться коливання, які поступово погасяться дією різних опорів. Нарешті система прийде в спокій, в положення рівноваги.

Отже, будь-які сили, раптово прикладені до пружної системи, викличуть в перші моменти свого застосування зміни форми, вдвічі більші, ніж ті зміни, які відповідають рівновазі.

Окремі випадки цього загального закону для розтягу, згину і т.п. відомі всім з вчення про опір матеріалів.

Кирпичов досяг загального і послідовного формулювання теорії статично невизначуваних, лінійно-пружних ферм, яка не притаманна ні енергетичній, ні кінематичній доктрині в теорії споруд, і таким чином залишив відкритими двері як для методу сил, так і для методу переміщень. Загальна база під двоїстою структурою теорії споруд, так чітко представлена в книгах В.Л. Кирпичова, передбачає шлях, по якому послідують постійні інновації в теорії споруд першої половини XX ст.

Бенуа Поль Еміль Клапейрон,
фр. Benois Paul Emile Clapeyron
(1799–1864)

Джон Вільям Стретт, барон Релей
англ. John Strutt, 3rd Baron Rayleigh
(1842–1919)

Вальтер Рітц,
нім. Walter Ritz
(1878–1909)

Віктор Львович Кирпичов,
рос. Виктор Львович Кирпичёв
(1845–1913)

Значний вплив на В.Л. Кирпичова мала «Теорія звуку» Дж.В. Релея, і в своєму вступі він рекомендує цю роботу тим своїм читачам, які цікавляться теорією споруд. Саме тому ми повинні бути вдячні В.Л. Кирпичову за те, що він зробив метод Релея відомим в багатьох країнах. Одним з відомих учнів В.Л. Кирпичова був С.П. Тимошенко. Проте, вплив вдалої адаптації В.Л. Кирпичовим методів з «Теорії звуку» Дж.В. Релея для теорії статично невизначуваних систем в часових рамках поступився впливу Берлінської школи будівельної механіки, яка грала домінуючу роль в процесі формування теорії в першій половині консолідаційного періоду теорії споруд.

У 1892 р. О.М. Ляпунов опублікував роботу «Общая задача об устойчивости движения», у якій дав строгу математичну постановку проблем стійкості механічних систем із скінченим числом ступенів свободи. У 1932 р. М.Г. Четаєв сформулював і довів теореми про нестійкість руху. У 1937 р. М.М. Крилов і М.М. Боголюбов видали монографію «Введение в нелинейную механику». Значний внесок у розвиток динамічної стійкості конструкцій зроблений В.В. Болотіним і його учнями.

Лише у 30-х роках минулого століття набули завершеної форми методи розрахунку статично невизначуваних стержневих систем, виділені методи сил, переміщень і змішаний метод, а також різні їхні модифікації. У процес їхнього формування значний внесок зробили В.Л. Кирпичов, М.С. Стрелецький, О.О. Гвоздьов, П.Л. Пастернак, І.М. Рабінович, М.І. Безухов та ін.

12.6. Принципи Лаґранжа і Кастільяно

Якщо окрім додаткової умови $M = EI\kappa$, прийняті ще інші умови, а саме,

$$\kappa = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2},$$

$$w\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}\Big|_{a_2}^{b_2}, \quad w'\Big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} + q = 0,$$

$$M'\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}, \quad M\Big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}\Big|_{a_1}^{b_1},$$

то отримаємо функціонали Лаґранжа і Кастільяно, які залежать лише від однієї змінної w чи M [Баженов, 2014]:

$$\Pi^{\text{Л}}(w) = \frac{1}{2}\int_a^b EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_a^b qw\mathrm{d}x - \\ -\bar{M}'w\Big|_{a_1}^{b_1} + \bar{M}w'\Big|_{a_1}^{b_1}.$$

$$\Pi^{\text{К}}(M) = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x + \bar{w}M'\Big|_{a_2}^{b_2} - \bar{w}'M\Big|_{a_2}^{b_2}.$$

Отже маємо пару двоїстих задач варіаційного числення, які відповідають варіаційним принципам Лаґранжа і Кастільяно:

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(w) = 0$$

при додатковій умові $\delta\Pi^{\text{К}}(M) = 0$.

$$\delta\Pi^{\text{К}}(M) = 0$$

при додатковій умов $\delta\Pi^{\text{Л}}(w) = 0$.

В розгорнутій формі вказані варіаційні задачі мають наступний вигляд:

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(w) = \int_a^b EIw''\delta w''\mathrm{d}x - \int_a^b q\delta w\mathrm{d}x -$$

$$\delta\Pi^{\text{К}}(M) = -\int_a^b \frac{M}{EI}\delta M\mathrm{d}x +$$

$$-\bar{M}'\delta w\Big|_{a_1}^{b_1}+\bar{M}\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1}=0,$$

додаткові умови: $M=EI\kappa$;

$$\kappa=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\in a,b;\ w,w'\Big|_{a_2}^{b_2}=\bar{w},\bar{w}'\Big|_{a_2}^{b_2}$$

являють собою рівняння сумісності деформації і кінематичні граничні умови.

$$+\bar{w}\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2}-\bar{w}'\delta M\Big|_{a_2}^{b_2},$$

додаткові умови: $M=EI\kappa$;

$$\frac{\partial^2M}{\partial x^2}=-q\quad a,\ b;\ M,M'\Big|_{a_1}^{b_1}=\bar{M},\bar{M}'\Big|_{a_1}^{b_1}$$

являють собою рівняння рівноваги і статичні граничні умови.

Після відповідних перетворень варіаційні задачі Лаґранжа і Кастільяно набирають вигляду:

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(w)=\delta_w\Pi_1=-\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q\right)\delta w\mathrm{d}x+$$

$$+(M'-\bar{M}')\delta w\Big|_{a_1}^{b_1}-(M-\bar{M})\delta w'\Big|_{a_1}^{b_1}=0$$

і містить у собі рівняння рівноваги (рівняння Ейлера) і природні (статичні) граничні умови.

$$\delta\Pi^{\text{К}}(M)=\delta_M\Pi_2=-\int_a^b\left(\kappa+\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\delta M\mathrm{d}x+$$

$$+(\bar{w}-w)\delta M'\Big|_{a_2}^{b_2}-(\bar{w}'-w')\delta M\Big|_{a_2}^{b_2}=0$$

і містить у собі рівняння сумісності деформацій (рівняння Ейлера) і природні (кінематичні) граничні умови.

Принципи Лаґранжа і Кастільяно сформулюємо наступним чином.

Принцип Лаґранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лаґранжа стаціонарне (мінімальне) значення. При цьому під можливими розуміються переміщення, які задовольняють рівняння сумісності деформації і рівняння в’язей (кінематичні граничні умови).

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно стаціонарне (максимальне) значення. При цьому під можливими розуміються зусилля, які задовольняють рівнянням рівноваги і статичним граничним умовам.

З історії питання зауважимо, що термін «принцип Лаґранжа» поширений у російськомовній і вітчизняній літературі. В «Аналітичній механіці» (1788) Ж.-Л. Лаґранж усі форми рівнянь абсолютно твердого тіла під дією сил отримує із загальної формули статики. У своїй теоремі, яку Ж.-Л. Лаґранж назвав «властивості рівноваги, які відносяться до максимуму і мінімуму», він розглянув випадок, коли ліва частина його загальної формули статики являє собою повний диференціал деякої функції Π, яка залежить від координат системи (у випадку твердого тіла). У сучасній термінології ця функція Π є потенціальна енергія системи. Умови рівноваги системи, що описується цією функцією, зводяться до рівності нулю її повного першого диференціалу. Тобто для таких систем стани рівноваги співпадають із положеннями, у яких функція Π має мінімум або максимум. Ж.-Л. Лаґранж показує, що стан рівноваги, який відповідає мінімуму функції Π – стійкий, а стан рівноваги, який відповідає максимуму функції Π – нестійкий. Випадок $\Pi=\text{const}$ і випадок мінімаксу він не розглядає. Ж.-Л. Лаґранж із варіаційного рівняння – начала можливих швидкостей (переміщень) сформулював відповідний варіаційний принцип для деякої потенціальної функції, яка набагато пізніше була записана і для деформівних тіл і дістала назву повної потенціальної енергії системи. Відомо, що повна потенціальна енергія пружно деформованого тіла дорівнює роботі сил пружності при переході данного стану системи до стану з нульовою деформацією.

Доведення Ж.-Л. Лаґранжа містило деякі вади, які усунув Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле (1805-1859), і таким чином був сформульований відомий принцип Лаґранжа-Діріхле.

Нагадаємо, що термін «vis viva» (жива сила), був вперше застосований Г.В. Лейбніцем. Термін «енергія» був введений Томасом Юнгом в 1807 р. (у роботі «A Treatise on Natural Philosophy, Lecture VIII) і термін «робота» - Г.-Г. Коріолісом. В.Р. Гамільтон у листі до Тета (P.G.Tait) у 1862 р. писав: «Енергія і Робота у їх старому англійському значенні – це речі мені знайомі. Але у мене лише самі туманні уявлення про сучасне значення цих термінів» [Graves, 1882-1889, Vol. III, p. 150].

У XIX ст. шотландський інженер і фізик Уільям Джон Макуорн Ренкін (1820-1872) ввів поняття «потенціальна енергія», а німецький інженер Фрідріх Енгессер – поняття «доповнювальної потенціальної енергії» [Тимошенко, 1957].

Поняття механічної роботи виникло у тісному зв’язку з вивченням машин. «Я із задоволенням відмічаю цей важливий приклад плідної дії суто технічної проблеми – у данному випадку питання про корисну дію машин – на теоретичні дослідження», пише Ф. Клейн [Клейн, 1937, с. 109].

На заході формули для $\Pi^{\text{Л}}(u)$ і відповідний варіаційний принцип частіше називають варіаційною теоремою Діріхле і Гріна, оскільки вони пов’язані із поняттям пружного потенціалу, введеним у теорію пружності Джорджем Гріном (1793-1841) [Green, 1739] і принципом пружної рівноваги, доведеним П.Г.Л. Діріхле [Dirichlet, 1846]. Згідно з П.Г.Л. Діріхле, якщо прикладені сили є потенціальними, то пружна рівновага є стійкою тоді і тільки тоді, коли повна потенціальна енергія механічної системи П є мінімальною, наприклад, центр ваги знаходиться у найнижчій точці (принцип Торрічеллі). Це – принцип мінімуму потенціальної енергії. Теорема Діріхле про стійкість для системи n твердих тіл була доведена Георгом Хамелем (1877-1954) [Hamel, 1912, c. 485-487].

Наприклад, у випадку центрального розтягу-стиснення функціонал повної потенціальної енергії системи має наступний вигляд [Баженов, 2014, с. 229]:

$$\Pi^{\text{Л}}(x,u,u') = \frac{1}{2}\int_a^b EIu'^2 \mathrm{d}x - \int_a^b q_x u \mathrm{d}x \to \min,$$

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(u) = \frac{\partial \Pi^{\text{Л}}}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial \Pi^{\text{Л}}}{\partial u}\delta u = 0.$$

П.Г.Л. Діріхле проаналізував енергетичний крітерій стійкої рівноваги для систем з нескінченним числом степеней вільності

$$\delta^2\Pi_{DG}\begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix}\begin{matrix} \rightarrow \\ 0 \\ \rightarrow \end{matrix}\begin{Bmatrix} \text{нестійка} \\ \text{байдужа} \\ \text{стійка} \end{Bmatrix}\rightarrow \text{рівновага}$$

В цьому енергетичному критерії $\delta^2\Pi_{DG}$ - друга варіація повної потенціальної енергії має бути проварійована двічі.

Взагалі, у математичній фізиці принцип Діріхле відносять до теорії потенціалу і формулюють таким чином: якщо, наприклад, функція $u(x)$ є розв'язком рівняння Пуассона:

$$\Delta u + f = 0$$

в області $\Omega \in R^n$ з граничною умовою $u = g$ на границі Ω, то $u(x)$ може бути знайдена, як розв'язок варіаційної задачі на мінімум

$$[v(x)] = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - vf\right)\mathrm{d}x$$

серед усіх двічі диференційованих функцій v таких, що $v = g$ на границі Ω.

Дане твердження сформулював (але не довів) П.Г.Л. Діріхле. Карл Веєрштрасс показав, що в деяких ситуаціях принцип Діріхле невірний; згодом умови його застосування уточнили Б. Ріман, А. Пуанкаре, Д Гільберт та інші [Бердичевский, 1983], [Михлин, 1950], [Петрова, 1966].

Наведені вище приклади свідчать, що варіаційна теорема Діріхле і Гріна є інтерпретованою формалізованою теорією в сенсі варіаційного числення. Формалізм варіаційного числення був використаний Геттінгенською школою, очолюваною Феліксом Клейном, для обгрунтування теорії пружності. Клейну вдалося запросити до Геттінгену відомих математиків, наприклад, Давида Гільберта в 1895 р., Германа Мінковськи (1864-1909) в 1902 р., Карла Рунге (1856-1927) в 1904 р., Едмунда Ландау (1877-1938) в 1909 р. Д. Гільберт в 1899 р. довів існування розв'язку варіаційної теореми Діріхле [Hilbert, 1901]. Навесні 1909 р. до Геттінгена приїхав С.П. Тимошенко, де впродовж літнього семестру він прослухав лекції Ф. Клейна з теорії пружності, В. Фогта – з гідродинаміки і Л. Прандтля – з аеродинаміки.

Початком широкого енергетичного напрямку у роз'язанні задач теорії пружності слід вважати момент публікації теореми Клапейрона про дійсну роботу пружних сил (1852). Формула Клапейрона не тільки враховує поступове зростання внутрішніх сил у процесі деформації тіла, але і дає для будь-якого пружного тіла залежність роботи від напружень.

Наступний етап у теорії пружного тіла полягав у відкритті принципу взаємності робіт (О.Л. Коші, 1857; Дж.К. Максвелл, 1864; Е. Бетті, 1872).

Термін «принцип Кастільяно» у західній літературі теж частіше має назву «варіаційної теореми Менабреа і Кастільяно».

Не торкаючись історичних пріоритетів, зазначені терміни для одно-, дво- і тривимірних задач можуть бути названі принципами мінімуму потенціальної енергії і мінімуму (з урахуванням знаку) доповнювальної потенціальної енергії, що підкреслює їх двоїстість [Васидзу, 1987]. Якщо у відповідних формулюваннях присутнє визначення можливих переміщень і зусиль (або напружень), то мінімум може бути визначений як абсолютний.

Таке формулювання принципу Кастільяно тут і надалі пов'язане із збереженням математичної методології Лежандра, Юнга-Фенхеля-Лаґранжа, за якою варіаційна задача Кастільяно розглядається як двоїста до прямої варіаційної задачі Лаґранжа і навпаки. Як уже зазначалось, екстремальні значення функціоналів Лаґранжа і Кастільяно співпадають, коли перший досягає мінімуму, а другий - максимуму. Якщо друга двоїста функція (функціонал) обрана у вигляді $\Pi^{\mathrm{K}}(M)=\int\limits_a^b \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x$, то вона відповідно досягає мінімуму, і це є відомим у механіці принципом найменшої роботи.

За Р. Курантом, Д. Гільбертом [Курант, Гильберт, 1951b] «значення принципу Кастільяно полягає у теоретичному відношенні у тому, що він є дуже важливим прикладом, який підтверджує загальний закон двоїстості варіаційних задач».

Першим звернув увагу на те, що $\Pi^{\text{Л}}(u)$ і $\Pi^{\mathrm{K}}(\sigma)$ у формулах Лаґранжа і Кастільяно в певних постановках є функціоналами, Луїджі Донаті. У своїх роботах [Donati, 1888, 1889, 1894] він чітко роз'яснив зв'язок між цими функціоналами і поняттями пружного потенціалу в термінах теорії пружності і варіаційного числення.

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій дає у вигляді природних умов рівняння рівноваги як рівняння Ейлера $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}+q=0$, а також природні статичні граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах. Для різних типів балок це показано у табл. 12.3.

Вимога тотожної рівності нулю лівої частини з урахуванням принципу незалежності варіацій, дає у вигляді природних умов рівняння сумісності деформацій як рівняння Ейлера $\kappa=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}$, а також природні (кінематичні) граничні умови, яких не вистачало у заданих додаткових умовах (див. табл. 12.3).

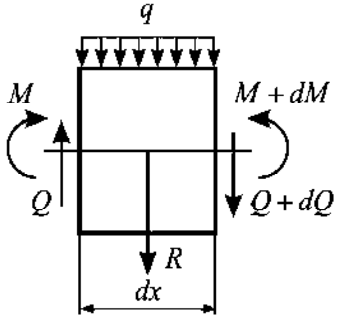
Варіаційне рівняння Лаґранжа

$$M'_b\delta w_b - M'_a\delta w_a - M_b\delta w_b + M_a\delta w_a + \int\limits_a^b\left(-\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}-q\right)\delta w\mathrm{d}x=0,$$

ураховуючи, що під інтегралом стоїть рівнодіюча R,

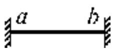
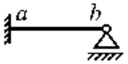
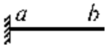
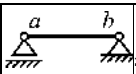
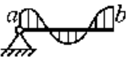
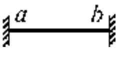
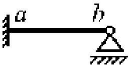
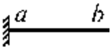
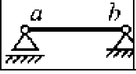
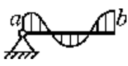
$$R\mathrm{d}x+q\mathrm{d}x+\mathrm{d}Q=0 \;\Rightarrow\; R=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-q=-\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}-q$$

являє собою принцип можливих переміщень, а саме: якщо сума робіт усіх сил, які діють на систему, при будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю, то



система перебуває у рівновазі. При цьому під можливими розуміються переміщення, які описуються гладкими неперервними функціями і задовольняють умовам в'язей. У деяких книгах з будівельної механіки при формулюванні начала можливих переміщень включається додаткова вимога нескінченної малості тих переміщень, на яких підраховується можлива робота. Це істотно тільки для геометрично нелінійної постановки задачі.

Таблиця 12.3

Варіаційне рівняння Лаґранжа							
Задані зовні граничні умови $w, w'\Big\|_{a_2}^{b_2} = 0$	$w_a = 0$ $w'_a = 0$ $w_b = 0$ $w'_b = 0$	$w_a = 0$ $w'_a = 0$ $\mathrm{w}_b = 0$ –	$w_a = 0$ $w'_a = 0$ – –	$w_a = 0$ – $w_b = 0$ –	$w_a = 0$ – – –	– – – –	Природні граничні умови $w, w''\Big\|_{a_2}^{b_2} = 0$
Природні граничні умови $M, M''\Big\|_{a_1}^{b_1} = 0$	– – – –	– – – M_b	– $M_a = 0$ – $M_b = 0$	– – $M_a = 0$ $M_b = 0$	– $M'_b = 0$ $M_a = 0$ $M_b = 0$	$M'_a = 0$ $M'_b = 0$ $M_a = 0$ $M_b = 0$	Задані зовні граничні умови $M, M'''\Big\|_{a_1}^{b_1} = 0$
Нетривіальні розв'язки рівняння рівноваги $EIw^{IV} = 0$					x	$1, x$	
Умови щодо навантажень, за яких існує розв'язок рівняння					$\int_0^l q(x)x dx = 0$	$\int_0^l q(x) dx = 0$	
							Варіаційне рівняння Кастільяно

У ряді літературних джерел у формулюваннях замість слова «робота» використовується термін «можлива робота». При цьому по сенсу викладу під вказаним терміном мається на увазі абстракція, що відрізняється від дійсної роботи тим, що сили, що проводять роботу, можуть відноситися до одного стану системи, а відповідні ним переміщення – до іншого. Разом з тим дається визначення цього поняття в розділі, присвяченому принципу можливих переміщень, як роботи сил на можливому переміщенні, хоча в самому формулюванні вказаного тут принципу термін «можлива робота» не використовується і замість нього застосовано просто слово «робота». Аналогічно останньому дається визначення можливої роботи і в класичному курсі П. Аппеля [Аппель, 1960]. Як правило, у формулюванні принципу можливих переміщень не використовується термін можлива робота і в інших джерелах [Ланцош, 1965], [Лурье, 1970], [Новожилов, 1958] тощо.

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$w_b \delta M'_a - w_a \delta M'_a - w'_b \delta M_b + w'_a \delta M_a + \int_a^b \left(\kappa + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \right) \delta M \mathrm{d}x = 0$$

являє собою принцип можливих зусиль: якщо сума робіт, які здійснюються при будь-яких можливих змінах зусиль дорівнює нулю, то система задовольняє рівняння сумісності деформацій. При цьому під можливими розуміються статично можливі системи зусиль.

У випадку неоднорідних граничних умов

$$w, w'\big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\big|_{a_2}^{b_2} \quad \text{і} \quad M, M'\big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\big|_{a_2}^{b_2}$$

отримаємо відповідно:

Варіаційне рівняння Лаґранжа

$$(M' - \overline{M})\delta w\big|_{a_1}^{b_1} - (M - \overline{M})\delta w'\big|_{a_1}^{b_1} + \\ + \int_{a_1}^{b_1} \left(-\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} - q \right) \delta w \mathrm{d}x = 0.$$

Варіаційне рівняння Кастільяно

$$(w - \bar{w})\delta M'\big|_{a_2}^{b_2} - (w' - \bar{w}')\delta M\big|_{a_2}^{b_2} + \\ + \int_{a_1}^{b_1} \left(\kappa + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \right) \delta M \mathrm{d}x = 0.$$

Таким чином:

у принципі Лаґранжа маємо додаткові умови (обмеження)

$$M = EI\kappa; \ \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \ w, w'\big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\big|_{a_2}^{b_2}$$

і отримані природні умови

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -q; \ M, M'\big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\big|_{a_1}^{b_1}.$$

у принципі Кастільяно маємо додаткові умови (обмеження)

$$M = EI\kappa; \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -q; M, M'\big|_{a_1}^{b_1} = \bar{M}, \bar{M}'\big|_{a_1}^{b_1}$$

і отримані природні умови

$$\kappa = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}; \ w, w'\big|_{a_2}^{b_2} = \bar{w}, \bar{w}'\big|_{a_2}^{b_2}.$$

Тобто додаткові умови однієї варіаційної задачі є природними для іншої і навпаки. Такі задачі утворюють пару варіаційних двоїстих задач. Вони розв'язуються, або шляхом розв'язання кожної варіаційної задачі окремо, або шляхом спільного розв'язування рівнянь природних (додаткових) умов обох задач. Наведені залежності пояснюються формальною спряженістю операторів диференціальних рівнянь рівноваги $\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -q$ і сумісності деформацій $\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI}$, що відображається у формулі Гріна

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} w \mathrm{d}x = M'w\big|_a^b - Mw'\big|_a^b + \int_a^b M \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x,$$

а за фізичним змістом є наслідком теореми Клапейрона і закону збереження енергії.

За допомогою методу множників Лаґранжа можна «поміняти місцями» додаткові і природні умови, тобто із функціонала Лаґранжа отримати функціонал Кастільяно і навпаки. Таке перетворення у варіаційному численні має назву перетворення Фрідріхса. Теорія перетворень функціоналів викладена в [Курант, Гильберт, 1951b]. Зазначимо, що екстремальні значення функціоналів Лаґранжа і Кастільяно, а також усіх функціоналів, які отримані за допомогою множників Лаґранжа співпадають.

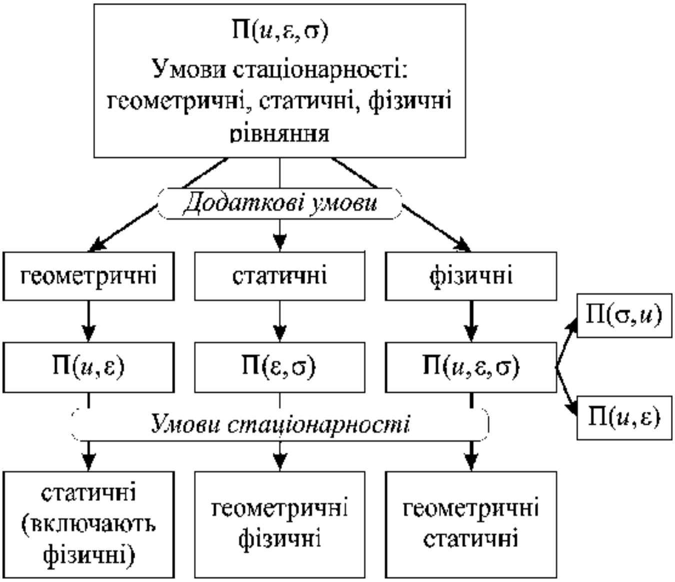
Функціонал Лаґранжа $\Pi = U + A$ називається повною потенціальною енергією системи, що дорівнює сумі потенціальної енергії пружної деформації і роботи зовнішніх сил. При цьому потенціальна енергія пружної деформації U обчислюється як робота внутрішніх сил і вважається додатною, а робота зовнішніх сил A обчислюється як добуток сили на переміщення і вважається від'ємною. Інколи повна потенціальна енергія системи ототожнюється з роботою зовнішніх і внутрішніх сил при переході системи від деформівного стану до первісного. Зазначимо що функціонал (або функція) П може бути отримана як двоїста за Юнгом до доповнювальної потенціальної енергії, тобто роботи внутрішніх сил.

Як вже зазначалося в нарисі 4, повними функціоналами називаються функціонали, для яких варіаційна задача формулюється без додаткових умов і охоплює усі компоненти простору станів. При цьому під основним простором станів розуміють сукупність полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль).

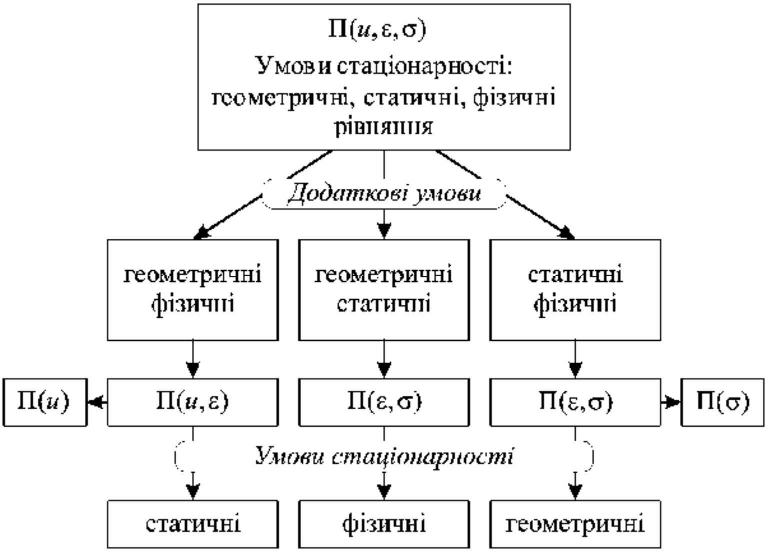
Повний функціонал є найбільш загальною енергетичною характеристикою даної системи, оскільки, з одного боку, з повного функціонала можуть бути отримані усі можливі частинні функціонали у даному просторі, з іншого – його досить для визначення усіх компонентів полів переміщень, деформацій, напружень (зусиль), тобто для повного розв'язання задачі у даному просторі станів.

Частинні функціонали отримуються із повних шляхом введення додаткових умов на деякі компоненти даного простору станів.

Схеми отримання частинних функціоналів із повного[1]:



Використання геометричних, або статичних, або фізичних рівнянь
як додаткових умов для отримання частинних функціоналів із повного



Використання двох груп із геометричних, статичних і фізичних рівнянь
як додаткових умов для отримання частинних функціоналів із повного

---

[1] Тут спадає на думку вираз Л.С. Полака «... в науці є своя естетика і краса логічної стрункості варіаційних принципів механіки, що не може не захоплювати математиків, фізиків, механіків». (із передмови до книги: *К. Ланцош* «Варіаційні принципи механіки»).

Тоді як у функціоналі варіаційної теореми Лаґранжа (Діріхле і Гріна) проводиться варіювання переміщень, у варіаційній теоремі Кастільяно (Менабреа і Кастільяно) до числа тих, що варіюються, входять внутрішні зусилля, або напруження. Іншими словами, варіаційна теорема Менабреа і Кастільяно є функціоналом внутрішніх зусиль або напружень. Відомо, що обґрунтування класичної теорії споруд супроводжувала суперечка, яка стосувалась, головним чином, загальної практичної придатності різних форм варіаційної теореми Менабреа і Кастільяно, наприклад, рівняння взаємності Максвелла-Бетті, принципу можливих змін напруженого стану або другої теореми Кастільяно. Серед інших в цій дискусії брали участь Е. Хеллінгер і Георг Пранге (1885–1941).


Давид Гільберт,
нім. David Hilbert
(1862-1943)


Степан Прокопович
Тимошенко
(1878–1972)


Петро Федорович
Папкович,
рос. Пётр Фёдорович
Папкович
(1887-1946)


Ернст Девід Хеллінгер,
нім. Ernst David
Hellinger
(1883–1950)

У своєму огляді «Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua» («Загальні підходи до механіки суцільного середовища»), який вийшов 1914 р. в Енциклопедії математичних наук, редагованій Клейном і К.Х. Мюллером, Е. Хеллінгер, показав для випадку тривимірних континуумів, як принцип мінімуму потенціальної енергії може спочатку бути перетворений до своєї канонічної форми за допомогою канонічного перетворення аналітичної механіки, причому переміщення і напруження стають невідомими змінними стану. Після цього Е. Хеллінгер отримує варіаційну теорему Менабреа і Кастільяно, користуючись умовами рівноваги як додатковими.

Наступний крок зробив Г. Пранге у своїй дисертації, завершеній в 1915 р. в Геттінгені, і в своїй кваліфікаційній роботі «Екстремум роботи деформації», виконаній в Ганновері наступного року, але, на жаль, виданій повністю тільки в 1999 р [Kurrer, 2008]. У своїй дисертації Г. Пранге дає математичне обґрунтування теорії пружності за допомогою варіаційного числення, використовуючи канонічне перетворення Гамільтона-Якобі відоме з аналітичної механіки. Як змінні переміщення u, так і змінні сили чи напруження σ є невідомими варійованими змінними стану (рис. 12.9) у новій канонічній варіаційній проблемі, що з'явилася після канонічного перетворення.

Працюючи незалежно від Е. Хеллінгера і Г. Пранге, Е. Рейсснер опублікував в 1950 р. свою відому роботу на шести сторінках «Про варіаційну теорему пружності» [Reissner, 1950]. У цій статті він розробляє, хоча і не торкаючись теорії Гамільтона-Якобі, варіаційну теорему, яка подібна до теореми Хеллінгера і Пранге. М.Е. Гуртін назвав цю варіаційну теорему ім'ям Хеллінгера, Пранге і Рейсснера і позначив її символом $\Pi_{H,P,R}$. У просторовому випадку $\Pi_{H,P,R}$ – це функціонал трьох компонент вектора переміщень u і шести компонент тензора напружень σ.

Рис. 12.9

Згадуючи ті часи, Е. Рейсснер писав: «Використовуючи варіаційну теорему для напружень і варіаційну теорему для переміщень, я весь час запитував себе, чи дійсно ми змушені обирати або те, або інше. Першим наслідком цих роздумів було узагальнення варіаційної теореми для напружень, спрямоване на те, щоб зробити цю теорему застосовною до лінійних проблем простого гармонійного руху. Можливість такого узагальнення залежала від одночасного введення варіацій напружень і переміщень, які повинні були бути незалежними, щоб зберегти умови динамічних обмежень. З прийняттям концепції незалежності варіацій напружень і варіацій переміщень, природно виникала думка про можливість формулювання варіаційної теореми з незалежними варіаціями напружень і переміщень». В 1953 р. Е. Рейсснер узагальнив свою варіаційну теорему на пружні континууми з великими переміщеннями.

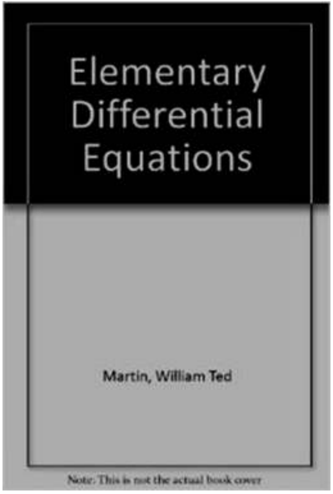
Механіка деформівного твердого тіла описує поведінку пружних континуумів за допомогою

- тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}$,
- вектора переміщень $\mathbf{u}$,
- тензора деформацій ε.

З цих трьох змінних стану тензор напружень σ і вектор переміщень u фігурують в таких варіаційних теоремах:

- Менабреа і Кастільяно $\Pi_{M,C}$ ($\boldsymbol{\sigma}$),
- Лаґранжа, Діріхле і Гріна $\Pi_{D,G}$ ($\mathbf{u}$),

- Хеллінгера, Пранге і Рейсснера $\Pi_{H,P,R}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})$.

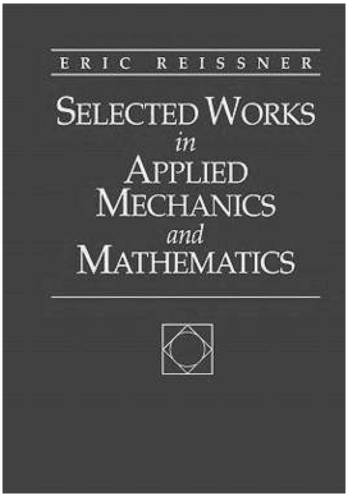


Elementary Differential Equations

Martin, William Ted

Note: This is not the actual book cover

Вступний курс диференціальних рівнянь.
Вільям Тед Мартін, Ерік Рейсснер (1986)



ERIC REISSNER

SELECTED WORKS in APPLIED MECHANICS and MATHEMATICS

Вибрані праці в прикладній механіці і
математиці Е. Рейсснера (1995)

Таким був рівень знань щодо варіаційних теорем в 1950 р. У трьох вчених досить швидко виникло питання, чи можна сформулювати загальну варіаційну теорему, в функціоналі якої стан деформацій фігурував би нарівні зі станами переміщень і напружень. Відповідь була знайдена Б.М. Фрайшем Де Вебеке (Бельгія), Ху Хайчангом (Китай) і Кюсіро Васідзу (Японія), які працювали незалежно один від одного.

Ху Хайчанг,
кит. 胡海昌,
Hú Hǎichāng
(1928–2011)

Бодуен Фрайш де Вебеке,
фр. Baudouin M. Fraeijs de Veubeke
(1917–1976)

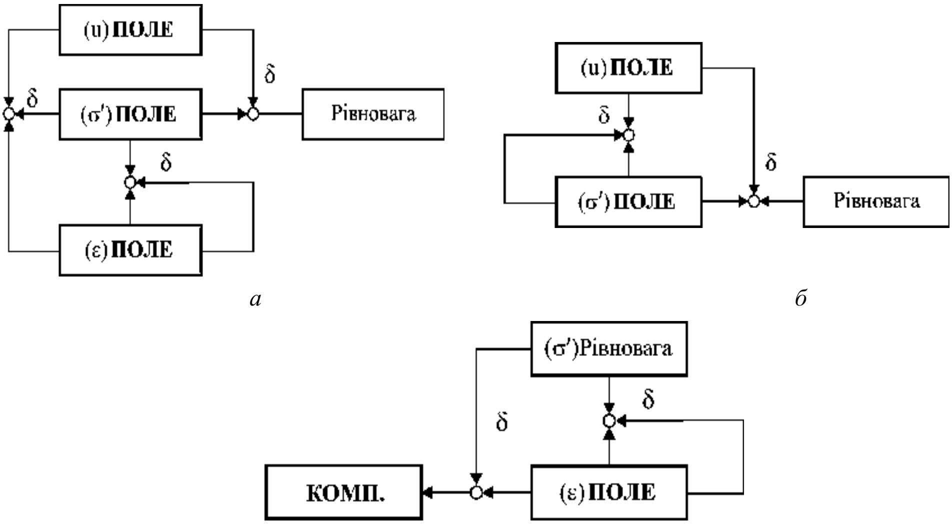
Кюсіро Васідзу
яп. 鷲津久一郎,
англ. Kyuichiro Washizu
(1921–1981)

Ерік Рейсснер,
англ. Max Erich Reissner
(1913–1996)

Е. Рейсснер згадує, як К. Васідзу відвідав його під час свого періоду досліджень в Массачусетському технологічному інституті між 1953 і 1955 роками і пояснив свою варіаційну теорему: «... мій друг Васідзу ... завітав одного разу в мій офіс і сповістив, що у нього є варіаційна теорема з незалежними варіаціями не тільки напружень і переміщень, а також і деформацій, з яких у якості рівнянь Ейлера отримуються не тільки умови рівноваги і співвідношення напруження-деформації, але також і співвідношення переміщення-напруження. Я спочатку заперечив, що оскільки в граничних умовах задачі зустрічаються тільки напруження і переміщення, то природно розглядати співвідношення деформації-напруження як попередні, і ніяк інакше. Проте незабаром я переконався, що теорема «трьох полів», яку запропонували Васідзу і незалежно від нього Ху, була значним кроком вперед, який я сам, на жаль, не зробив». Тому цю загальну варіаційну теорему називають в літературі на честь Ху і Васідзу; вона буде позначатися тут перш за все $\Pi_{H,\,W}(\sigma,\mathrm{u},\varepsilon)$.

Б.М. Фрайш Де Вебеке ще в 1951 р. розробив варіаційну теорему з чотирма варійованими полями або змінними станами. Він назвав цю теорему «*загальним варіаційним принципом*». У його теоремі не тільки напруження, переміщення і деформації варіюються незалежно одне від іншого, але також і поверхневі навантаження **t** (t_i в індексній нотації). На честь Б.М. Фрайша Де Вебеке, К. Васідзу і Х. Ху цей функціонал тут позначається як $\Pi_{F,\,H,\,W}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{t})$; $t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ (n_j = вектор нормалі до поверхні, σ_{ij} = тензор напружень).

На рис. 12.10,*а* показаний процес варіювання за загальною варіаційною теоремою Б.М. Фрайша де Вебеке, на рис. 12.10,*б* - процес варіювання по варіаційній теоремі Хеллінгера, Пранге і Рейсснера, а на рис. 12.10,*в* ще одна варіаційна теорема, представлена Б.М. Фрайшем де Вебеке, в якій варіюються напруження **σ** і деформації **ε**.



а *б*

в

Рис. 12.10

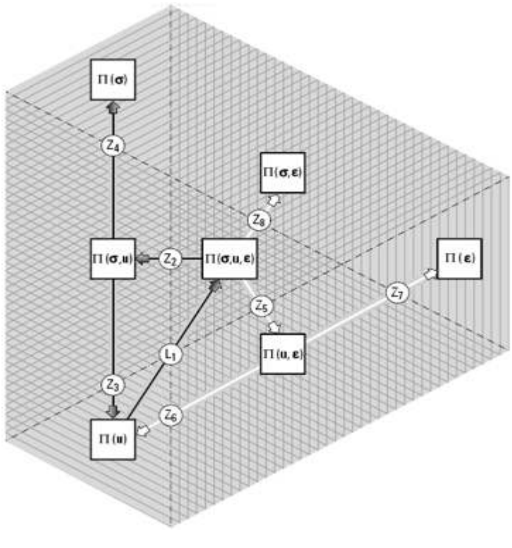


Рис. 12.11

Конспект лекції Клауса Кнотхе по методу скінченних елементів в проектних розрахунках, яку він читав у Аерокосмічному відділі Берлінського технічного університету, містить систематичне і дуже привабливе викладення семи варіаційних теорем. Цей конспект також містить діаграму, в якій блискуче ілюстровано співвідношення між сімома варіаційними теоремами - за винятком $\Pi_{F,H,W}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{t})$ (рис. 12.11).

На цій діаграмі

- вертикальне штрихування відповідає варіації змінної поля або стану ε (деформації): $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon})$;

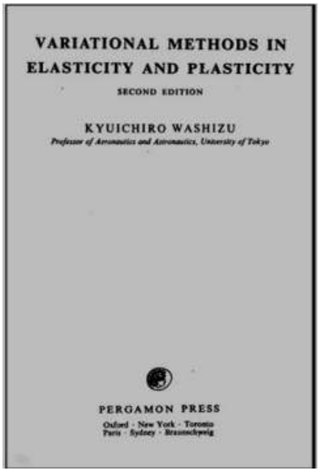
- діагональне штрихування зверху зліва вниз направо представляє змінну поля або стану u (переміщення), тобто варіаційну теорему Лаґранжа, Діріхле і Гріна: $\Pi_{D,G}(\mathbf{u}) \equiv \Pi(\mathbf{u})$;

- діагональне штрихування знизу зліва вгору направо представляє змінну поля або стану σ (напруження), тобто варіаційну теорему Менабреа і Кастільяно: $\Pi_{M,C}(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \Pi(\boldsymbol{\sigma})$;

- гібридні варіаційні теореми лежать в областях перетину штрихувань: варіаційна теорема Хеллінгера, Пранге і Рейсснера $\Pi_{H,P,R}(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \equiv \Pi(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u})$ – там, де перетинаються діагональні штрихування, теорема Фрайша де Вебеке, Васідзу та Ху $\Pi_{F,H,W}(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \Pi(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u},\ \boldsymbol{\varepsilon})$ – там, де перетинаються всі типи штрихування, додаткова варіаційна теорема Фрайша де Вебеке $\Pi_{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \Pi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})$ – там, де перетинаються лінії, що йдуть знизу зліва вгору.

Для пружних тіл, скріплених в окремих точках, лініях, площинах, тобто для багато-контактних систем, також є можливою побудова повного і частинного функціоналів.

При цьому становить інтерес функціонал граничних умов для багатоконтактної задачі. Можна показати, що класичні методи будівельної механіки (методи сил, переміщень, змішаний), система функціоналів для будівельної механіки і різні варіанти методу скінченних елементів виходять із функціонала граничних умов багатоконтактної задачі. Дійсно, розіб’ємо систему (континуальну або стержневу) на елементи, поєднання яких будемо виконувати в окремих точках. Приймаємо за додаткові умови виконання статичних, геометричних і фізичних рівнянь всередині області кожного елемента. Якщо задача є лінійною, то для цього можна побудувати матриці жорсткості або піддатливості скінченних елементів. Розв’язок задачі отримується за допомогою функціонала граничних умов, із якого витікають як природні граничні умови алгебраїчні рівняння класичної будівельної механіки. Якщо форма, розміри спільних елементів і зв'язки між ними прийняти такими, які мають місце в класичних підходах будівельної механіки, то ці підходи не будуть відрізнятись.

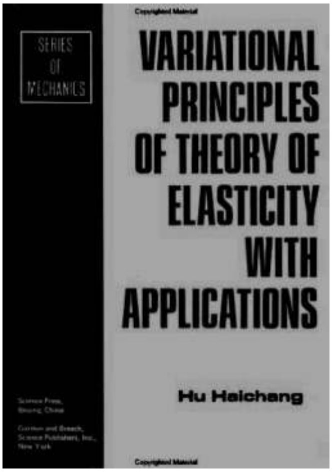


VARIATIONAL METHODS IN
ELASTICITY AND PLASTICITY
SECOND EDITION

KYUICHIRO WASHIZU
Professor of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo

PERGAMON PRESS
Oxford · New York · Toronto
Paris · Sydney · Braunschweig

Варіаційні методи в пружності і пластичності. К.Васідзу, 1975



SERIES OF MECHANICS

VARIATIONAL PRINCIPLES OF THEORY OF ELASTICITY WITH APPLICATIONS

Hu Haichang

Варіаційні принципи теорії пружності. Ху Хайчанг, 1984

Метод скінченних елементів. К.Васідзу, 1987

У будівельній механіці вирази для потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії є додатно визначеними квадратичними формами. Вони є двоїстими за Юнгом і пов'язані між собою перетворенням Лежандра, а їх відповідні значення співпадають [Баженов, 2013]. Перетворення Лежандра є частинним випадком нерівності Юнга і у даному випадку за фізичним змістом являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил і відповідає теоремі Клапейрона. Постановки прямих і двоїстих у розумінні Лежандра, Юнга-Фенхеля, Лаґранжа варіаційних задач реалізуються у вигляді основних варіаційних принципів – Лаґранжа і Кастільяно, теорем Лаґранжа і Кастільяно і приводять до систем алгебраїчних рівнянь, матриці яких (матриці Гессе) складаються з других похідних відповідно від потенціальної енергії пружної деформації (матриця жорсткості) і доповнювальної потенціальної енергії (матриця податливості). Зазначені матриці є додатно визначеними і задовольняють критерії Сильвестра, усі їхні мінори додатно визначені [Беленький, 1964]. До того ж матриці взаємно обернені. Ці міркування розповсюджуються й на функціонали.

Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) – відомий англійський математик. Основні роботи відносяться до алгебри, теорії інваріантів, теорії матриць, математичної фізики, теоретичної і прикладної кінематики. Розвинув теорію канонічних форм. Дж.Дж. Сильвестр назвав якобіаном функціональний визначник на честь праць Якобі з алгебри і теорії виключення.

12.7. Теорема Клапейрона. Теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли. Формула Папковича

> *Отримана залежність, яка представляється на перший погляд досить штучною, насправді дуже зручна як для доведення ряду загальних теорем теорії пружності, так і для оцінки цих теорем у ряді решти основних залежностей теорії пружності.*
>
> П.Ф. Папкович

Теорему Клапейрона можна записати у вигляді [Баженов, 2014]:

$$2U = \iiint\limits_V \left[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{xy} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Таким чином отримаємо

$$\iiint\limits_V (Xu + Yv + Zw)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_S \left(P_{xv}u + P_{yv}v + P_{zv}w\right)\mathrm{d}S = 2U,$$

або у матричному вигляді

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \mathbf{g}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{S_1} \mathbf{P}^T{}_S\mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}^T\mathbf{P}_S\,\mathrm{d}S\,.$$

Тобто для дійсного стану лінійно пружної системи, у якому задовольняються рівняння рівноваги, сумісності деформацій, фізичної сторони задачі та граничні умови, подвійна потенціальна енергія пружної деформації дорівнює роботі зовнішніх сил. Це положення становить теорему Клапейрона.

Ураховуючи, що $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}$, а $\mathbf{g}^T = -(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T$ вираз для теореми Клапейрона

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = -\iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{S_1} \mathbf{P}_S^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}^T\mathbf{P}_S\,\mathrm{d}S$$

являє собою теорему про дивергенцію і у наведеному вигляді дозволяє переносити операцію диференціювання з вектора $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$ на вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

і навпаки, що часто використовується для отримання різних варіаційних постановок задач теорії пружності [Розин, 1998].

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил в матричному вигляді виражається наступним чином

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \mathbf{g}^T\mathbf{u}\mathrm{d}V + \iint\limits_{S_1} \mathbf{u}\mathbf{P}_S\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}_S\mathbf{P}\mathrm{d}S\,, \qquad (12.39)$$

що по суті являє собою теорему про дивергенцію.

Взагалі, в будівельній механіці та теорії пружності досить часто використовуються теореми, які зв'язують об'ємні і поверхневі інтеграли. Основні з них наведені нижче.

- *Теорема про дивергенцію*

$$\int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

- *Теорема про ротор*

$$\int\limits_V \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

- *Теорема про градієнт*

$$\int\limits_V \nabla\Phi(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\Phi(\mathbf{r}).$$

- *Теореми Гріна*

$$\int\limits_F \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi \mathrm{d}V + \int\limits_F \Psi\nabla^2\Phi \mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\Psi\nabla\Phi) = \int\limits_S \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

$$\int\limits_F (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\,\mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi) = \int\limits_S \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

- *Частинні випадки*

$$\int\limits_V \nabla^2\Phi \mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \nabla\Phi = \int\limits_S \frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S \quad \text{(теорема Ґаусса)},$$

$$\int\limits_V |\nabla\Phi|^2 \cdot \mathrm{d}V + \int\limits_V \Phi\nabla^2\Phi \mathrm{d}V = \int\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \int\limits_S \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

Для отримання виразу (12.39) можна використати наступне загальне інтегральне співвідношення, яке по суті являє собою теорему Клапейрона:

$$\iiint\limits_V \mathbf{a}^T(\mathbf{A}\mathbf{b})\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{a}^T(\mathbf{A}_S\mathbf{b})\mathrm{d}S - \iiint\limits_V (\mathbf{A}^T\mathbf{a})\mathbf{b}\mathrm{d}V, \qquad (12.40)$$

де $\mathbf{a}(x,y,z) = \{a_1, a_2, a_3\}^T$ – довільний вектор з трьома компонентами, які є функціями координат; $\mathbf{b}(x,y,z) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}^T$ – довільний вектор з шістьма компонентами, які також є функціями координат.

При виведенні багатьох загальних положень будівельної механіки та теорії пружності корисною виявляється формула, яку, виходячи з виразу для роботи зовнішніх сил, отримав П.Ф. Папкович і яка носить його ім'я:

$$A_{3\mathrm{C}} = \iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T\mathbf{u}\mathrm{d}V + \iiint\limits_V (\mathbf{A}^T\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon})^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V + \iint\limits_S (\mathbf{P}_S - \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}_S\mathrm{d}S + \iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V. \quad (12.41)$$

Зауважимо, що в формулі (12.41) використовуються елементи чотирьох довільних станів, причому робота зовнішніх сил, яка відповідає першому довільно обраному напруженому стану і здійснює роботу на переміщеннях другого довільного напруженого стану, поєднується, деякою мірою штучно, з компонентами напружень третього та компонентами деформацій четвертого довільного напруженого стану.

П.Ф. Папковичем зазначено, що отримана залежність, яка представляється на перший погляд досить штучною, насправді дуже зручна як для доведення ряду загальних теорем теорії пружності, так і для оцінки цих теорем у ряді решти основних залежностей теорії пружності. Всі ті загальні теореми теорії пружності, які ми мали на увазі тут розглянути, можна вивести безпосередньо з рівності (12.41). Для цього потрібно лише привести чотири напружені стани, що є у формулі (12.41) довільними напруженими станами, кожного разу в певне співвідношення один з одним.

12.8. Постановка двоїстих варіаційних задач.Функціонали Ху-Васідзу, Рейсснера, Лагранжа, Кастільяно, Гамільтона

> *Коли яке-небудь явище можна описати як окремий випадок якого-небудь загального, застосовного до інших явищ принципу, то кажуть, що це явище отримало пояснення.*
>
> Дж. Максвелл

12.8.1. Загальний варіаційний принцип

Співвідношення

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \mathbf{g}^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{S_1} \mathbf{P}_S^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S\,\mathrm{d}S$$

являє собою рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил. З урахуванням формули П.Ф. Папковича воно може бути записана у вигляді:

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V -$$

$$-\iint\limits_{S_1} \mathbf{P}^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{P}\,\mathrm{d}S = 0, \qquad (12.42)$$

або

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_1} \mathbf{P}^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}\,\mathrm{d}S. \qquad (12.43)$$

Якщо для одного напружено-деформованого стану виконуються умови:

рівноваги $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \in v;$

деформацій $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} \quad \in V, S;$

фізичних співвідношень $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \in V,\ S;$

граничні умови $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2; \ \mathbf{P} = \mathbf{P}_S \in S_1,$

то цей стан буде дійсним і задовольнятиме теоремі Клапейрона [Баженов, 2014].

Необхідну умову екстремуму цього функціонала $\delta\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ можна отримати задаючи $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u},\ \boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Відповідне варіаційне рівняння має вигляд:

$$\iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_V (\boldsymbol{\varepsilon}\text{ - }\mathbf{A}^T\mathbf{u})\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{P}\text{ - }\mathbf{P}_S)\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{u}\text{ - }\mathbf{u}_S)\delta\mathbf{P}\,\mathrm{d}S=0.$$

Питома потенціальна енергія деформації і доповнювальна питома потенціальна енергія пов'язані залежністю $2U=U_0+U_0^{\text{доп}}$, а варіація цієї величини дорівнює

$$2\delta U=\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial u_0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\partial u^{\text{доп}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\delta\boldsymbol{\sigma}.$$

З урахуванням цього загальне варіаційне рівняння запишемо у вигляді:

$$\iiint\limits_V\left(\boldsymbol{\sigma}-\frac{\partial u_0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\partial u_0}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}-A^T\mathbf{u}\right)\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V+$$

$$+\iiint\limits_V\left(A\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}\right)\delta\mathbf{u}+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{P}-\mathbf{P}_S)\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)\delta\mathbf{P}\,\mathrm{d}S=0.$$

Загальний варіаційний принцип $\delta\Pi^{\text{заг}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})=0$. Додаткові умови відсутні.

Рівняння Ейлера дають рівняння крайової задачі теорії пружності:

у переміщеннях	*у переміщеннях і напруженнях*
$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}$	$\left.\begin{matrix}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}=\mathbf{0}\\ \mathbf{A}^T\mathbf{u}\text{ - }\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}\end{matrix}\right\}\in V$
$\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}+\mathbf{g}=\mathbf{0}\ \in V$	
$\mathbf{A}_S\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{P}_S\ \in S_1$	$\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}_S\ \in S_1$
$\mathbf{u}=\mathbf{u}_S\in S_2.$	$\mathbf{u}=\mathbf{u}_S\ \in S_2.$

Рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил може бути переписана у вигляді

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=\iiint\limits_V\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_V(\mathrm{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_V(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathrm{A}^T\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V+$$

$$+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{P}-\mathbf{P}_S)^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_1}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T\mathbf{P}\,\mathrm{d}S=0,$$

або

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=\Pi_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})-\Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})\,,$$

де через Π_1 і Π_2 позначені наступні функціонали:

$$\Pi_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_V\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u}\text{ - }\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\mathbf{g}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}\mathbf{P}_S\mathbf{u}\,\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_2}(\mathbf{u}\text{ - }\mathbf{u}_S)^T\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S,$$

$$\Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_V\mathbf{u}^T(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_1}\mathbf{u}^T(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\text{-}\mathbf{P})\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}\mathbf{u}_S^T\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S.$$

При будь-яких $\boldsymbol{\sigma}$ і $\mathbf{u}$ значення функціоналів Π_1 і Π_2 дорівнюють одне одному, в чому легко пересвідчитись, наприклад, перетворюючи за допомогою формули

(12.40) інтеграл $\iiint\limits_V \mathbf{u}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V$, який входить до складу Π_2. Отже, функціонал $\Pi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$, набуває нульового значення при будь-яких статично можливих $\boldsymbol{\sigma}$ і геометрично можливих $\mathbf{u}$.

Відрізнити дійсний НДС дозволяють постановки варіаційних задач на основі функціоналів Π_1 і Π_2, які утворюють пару двоїстих задач варіаційного числення, коли попередні умови однієї задачі є природними умовами іншої:

$\delta\Pi_1 = 0$ при попередній умові $\delta\Pi_2 = 0$.	$\delta\Pi_2 = 0$ при попередній умові $\delta\Pi_1 = 0$.

12.8.2. Функціонали Ху-Васідзу

> *... Проте незабаром я переконався, що теорема «трьох полів», яку запропонували Васідзу і незалежно від нього Ху, була значним кроком вперед, який я сам, на жаль, не зробив.*
>
> Е. Рейсснер

У разі, коли варіюються всі три змінні $\Pi_1 = \Pi_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$, $\Pi_2 = \Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$, отримаємо таку пару двоїстих задач варіаційного числення:

$\delta\Pi_1 = \delta_\sigma\Pi_1 + \delta_\varepsilon\Pi_1 + \delta_u\Pi_1 = 0$	$\delta\Pi_2 = \delta_\sigma\Pi_2 + \delta_\varepsilon\Pi_2 + \delta_u\Pi_2 = 0$

Виконуючи варіювання і використовуючи можливість міняти місцями операції варіювання та диференціювання, послідовно отримуємо

$\delta_\sigma\Pi_1 = -\iiint\limits_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S \delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S,$	$\delta_\sigma\Pi_2 = -\iiint\limits_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V (\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{S_1} (\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_1} \mathbf{u}_S^T (\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}S,$
$\delta_\varepsilon\Pi_1 = \iiint\limits_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V,$	$\delta_\varepsilon\Pi_2 = \iiint\limits_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V,$
$\delta_u\Pi_1 = \iiint\limits_V (\mathbf{A}\delta\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_1} \mathbf{P}_S^T \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_2} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{P}\,\mathrm{d}S,$	$\delta_u\Pi_2 = -\iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})^T \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{S_1} (\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{P}_S)^T \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S,$

і варіаційні рівняння у вигляді:

$-\iiint\limits_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{u})^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S +$	$-\iiint\limits_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{u}\,\mathrm{d}V +$

$$+\iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V-\iiint_V(\mathbf{A}\delta\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iiint_V \mathbf{g}^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\iint_{S_1}\mathbf{P}_S^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S-\iint_{S_2}\delta\mathbf{u}^T\mathbf{P}\,\mathrm{d}S=0.$$

$$+\iint_{S_1}\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}\,\mathrm{d}S+\iiint_V\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V+$$
$$+\iint_{S_2}\mathbf{u}_S^T\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S+\iiint_V(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+$$
$$+\iint_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S=0.$$

Додаткові умови відсутні, і отже, маємо задачу на абсолютний екстремум.

Функціонали $\Pi_1(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$ і $\Pi_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$ називають відповідно першою і другою формою функціонала Ху-Васідзу в задачах теорії пружності і позначають $\Pi_1^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$, $\Pi_2^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})$.

Варто зауважити, що в результаті використання інтегральних тотожностей

$$\iiint_V(\mathbf{A}^T\delta\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V=-\iiint_V(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\iint_S(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma})^T\delta\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S\,,$$

$$-\iiint_V(\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V=\iiint_V(\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V+\iint_S(\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S\,,$$

частинні варіації $\delta_u\Pi_1$ та $\delta_\sigma\Pi_2$ перетворюються відповідно на

$$\delta_u\Pi_1=-\iiint_V(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+$$
$$+\iint_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S\,,\quad(12.3)$$

$$\delta_\sigma\Pi_2=\iiint_V(\mathbf{A}^T\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon})^T\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iint_{S_2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S,\quad(12.4)$$

а варіаційні рівняння $\delta\Pi_1^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=0$ та $\delta\Pi_2^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=0$ набувають ідентичного вигляду:

$$\delta\Pi_1^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=-\iiint_V(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iint_{S_2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S+\iiint_V\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iiint_V(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\iint_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\overline{\mathbf{P}}_S)^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S=0,$$

$$\delta\Pi_2^{\text{ХВ}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{u})=\iiint_V(\mathbf{A}^T\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon})^T\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iint_{S_2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S+\iiint_V\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V-$$
$$-\iiint_V(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\iint_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S=0,$$

який свідчить про еквівалентність варіаційної постановки задачі повній системі рівнянь теорії пружності.

12.8.3. Варіаційні задачі Рейсснера

> *Використовуючи варіаційну теорему для напружень і варіаційну теорему для переміщень, я весь час запитував себе, чи дійсно ми змушені обирати або те, або інше … З прийняттям концепції незалежності варіацій напружень і варіацій переміщень, природно виникала думка про можливість формулювання варіаційної теореми з незалежними варіаціями напружень і переміщень.*
>
> Е. Рейсснер

Перший із так званих змішаних функціоналів і відповідний йому варіаційний принцип був побудований Еріком Рейсснером (1913–1996) [Reissner, 1950], хоч як цілком справедливо відзначає сам Е. Рейсснер [Reissner, 1996, p. 328)] у математиці (у класичному варіаційному численні) аналітичний принцип був відомий раніше Ернсту Хеллінгеру (1883–1950) [Hellinger, 1914] як канонічна форма вихідної задачі. У зв'язку з цим принцип Рейсснера інколи називають принципом Хеллінгера-Рейсснера. Однак при всій історичній справедливості такої подвійної назви, саме завдячуючи роботам Е. Рейсснера цей змішаний варіаційний принцип увійшов до варіаційних постановок задач.

Якщо приймається додаткова умова $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, отримуємо відповідно першу і другу форму функціонала Рейсснера:

$$\Pi_1^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V +$$

$$+\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u})\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V -$$

$$-\iint\limits_{S_1} \mathbf{P}_S\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_2} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_S)^T \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S$$

$$\Pi_2^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V -$$

$$-\iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V +$$

$$+\iint\limits_{S_1} (\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} \mathbf{u}_S^T\mathbf{P}\,\mathrm{d}S$$

і відповідні варіаційні рівняння:

$$\delta\Pi_1^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = \delta_\sigma\Pi_1^{\mathrm{P}} + \delta_{\mathrm{u}}\Pi_1^{\mathrm{P}} = 0,$$

де

$$\delta_\sigma\Pi_1^{\mathrm{P}} = -\iiint\limits_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V -$$

$$-\iint\limits_{S_2} \left(\mathbf{u}-\mathbf{u}_S\right)^T \mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S,$$

$$\delta_u\Pi_1^{\mathrm{P}} = \iiint\limits_V (\mathbf{A}^T\delta\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{g}^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V -$$

$$\delta\Pi_2^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) = \delta_\sigma\Pi_2^{\mathrm{P}} + \delta_{\mathrm{u}}\Pi_2^{\mathrm{P}} = 0,$$

де

$$\delta_\sigma\Pi_2^{\mathrm{P}} = -\iiint\limits_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma})^T\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \iiint\limits_V \mathbf{u}^T(\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma})^T\,\mathrm{d}V +$$

$$+\iint\limits_{S_1} (\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} (\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S,$$

$$\delta_u\Pi_2^{\mathrm{P}} = -\iiint\limits_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V +$$

$$-\iint\limits_{S_1}\mathbf{P}_S^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_2}\delta\mathbf{u}^T\mathbf{P}\,\mathrm{d}S\,.$$

$$+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S.$$

Після підстановки частинних варіацій отримуємо варіаційні рівняння в цілому

$$\begin{gathered}-\iiint\limits_{V}(\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\,\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\\-\iint\limits_{S_2}(\mathbf{u}\text{-}\mathbf{u}_S)^T\,\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S+\iiint\limits_{V}(\mathbf{A}^T\delta\mathbf{u})^T\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\\-\iiint\limits_{V}\mathbf{g}^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}\mathbf{P}_S^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S-\iint\limits_{S_2}\delta\mathbf{u}^T\mathbf{P}\,\mathrm{d}S=0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\iiint\limits_{V}(\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma})^T\,\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_{V}\mathbf{u}^T\,(\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma})^T\,\mathrm{d}V+\\+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}(\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}_S\,\mathrm{d}S-\\-\iiint\limits_{V}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S=0.\end{gathered}$$

Якщо скористатись виразами для частинних варіації $\delta_u\Pi_1$ (12.3) та $\delta_\sigma\Pi_2$ (12.4), то варіаційні рівняння $\delta\Pi_1^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})=0$ та $\delta\Pi_2^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})=0$ знову набудуть ідентичного вигляду:

$$\begin{gathered}\delta\Pi_1^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})=-\iiint\limits_{V}(\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\,\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\\-\iint\limits_{S_2}(\mathbf{u}\text{-}\mathbf{u}_S)^T\,\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S-\iiint\limits_{V}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\\+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S=0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\delta\Pi_2^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})=-\iiint\limits_{V}(\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{A}^T\mathbf{u})^T\,\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V-\\-\iint\limits_{S_2}(\mathbf{u}\text{-}\mathbf{u}_S)^T\,\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}S-\iiint\limits_{V}(\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g})^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\\+\iint\limits_{S_1}(\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{P}_S)^T\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S=0.\end{gathered}$$

12.8.4. Функціонали Лаґранжа і Кастільяно

> *У механіці принцип Кастільяно має особливо важливе значення, оскільки в ряді спеціальних випадків практично простіше користуватися цим принципом, ніж принципом мінімуму потенціальної енергії.*
>
> Р. Курант, Д. Гільберт

Якщо окрім попередньої умови $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$, прийняті ще інші умови, а саме,

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{A}^T\mathbf{u}\quad\in V,S\,;\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_S\in S_2,$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{g}=\mathbf{0}\in V,\qquad \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}_S\in S_1,$$

то отримаємо функціонали Лаґранжа і Кастільяно, які залежать лише від однієї змінної $\mathbf{u}$ або $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{gathered}\Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}(\mathrm{A}^T\mathbf{u})^T\,\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\\-\iiint\limits_{V}\mathbf{u}^T\mathbf{g}\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}\mathbf{u}^T\,\mathbf{P}_S\,\mathrm{d}S.\end{gathered}$$

$$\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma})=-\frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_2}\mathbf{u}_S^T\mathbf{P}\,\mathrm{d}S.$$

Отже маємо пару двоїстих задач варіаційного числення, які відповідають варіаційним принципам Лаґранжа і Кастільяно:

$$\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

при додатковій умові $\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

$$\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

при додатковій умові $\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

В розгорнутій формі вказані варіаційні задачі мають наступний вигляд:

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u}) = \iiint_V (\mathbf{A}^T\delta\mathbf{u})^T\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{u}\,\mathrm{d}V -$$

$$-\iiint_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{g}\,\mathrm{d}V - \iint_{S_1} \delta\mathbf{u}^T\mathbf{P}_S\,\mathrm{d}S,$$

додаткові умови:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon};$$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} \in V, S; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2$$

являють собою рівняння сумісності деформації і кінематичні граничні умови.

$$\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = -\iiint_V (\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V +$$

$$+\iint_{S_2} \mathbf{u}_S^T(\mathbf{A}_S\delta\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}S = 0,$$

додаткові умови:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon};$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \in V, \quad \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \in S_1$$

являють собою рівняння рівноваги і статичні граничні умови.

Після відповідних перетворень варіаційні задачі Лаґранжа і Кастільяно набирають вигляду:

$$\delta\Pi^{\text{Л}}(\mathbf{u}) = \iiint_V (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g})\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V +$$

$$+\iint_{S_1} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_S)\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S = 0$$

і містить у собі рівняння рівноваги (рівняння Ейлера) і природні (статичні) граничні умови.

$$\delta\Pi^{\text{К}}(\boldsymbol{\sigma}) = -\iiint_V (\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}^T\mathbf{u})\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V +$$

$$+\iint_{S_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S)\delta\mathbf{P}\,\mathrm{d}S = 0$$

і містить у собі рівняння сумісності деформацій (рівняння Ейлера) і природні (кінематичні) граничні умови

Відповідні цим рівнянням варіаційні постановки задач є принципами Лаґранжа і Кастільяно. Зазначимо, що К. Васідзу уникає термінів «принцип Лаґранжа» і «принцип Кастільяно», називаючи їх відповідно «принцип мінімуму потенціальної енергії» і «принцип мінімуму доповнювальної енергії» [Васидзу, 1987], підкреслюючи їх двоїсту форму.

Принцип Лаґранжа

З усіх можливих систем переміщень дійсні переміщення надають функціоналу Лаґранжа стаціоарне (мінімальне) значення. При цьому під можливими розуміються переміщення, які задовольняють рівняння сумісності деформацій і рівняння в'язей (кінематичні граничні умови).

Принцип Кастільяно

З усіх можливих систем зусиль дійсні зусилля надають функціоналу Кастільяно стаціонарне (максимальне) значення. При цьому під можливими розуміються зусилля, які задовольняють рівняння рівноваги і статичні граничні умови.

Рівняння Ейлера являють собою рівняння рівноваги

$$\mathbf{A\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S\,,$$

які разом із додатковими умовами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} \quad \in V, S\,,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S \in S_2\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \in V,$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності

Рівняння Ейлера являють собою рівняння сумісності деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} \text{ - } \mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_S\,,$$

які разом із додатковими умовами

$$\mathbf{A\sigma} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \in V,$$

$$\mathbf{A}_S\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}_S \quad \in S_1,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \in V,$$

дають повну систему рівнянь крайової задачі теорії пружності.

12.9. Принцип Гамільтона

> *Гамільтон - це Лагранж вашої країни.*
>
> К. Якобі

12.9.1. Принцип Гамільтона в механіці деформівного твердого тіла

Нехай пружне тіло, показане на рис. 12.1, знаходиться в стані руху. Згідно з принципом Д'Аламбера, додавши до діючого навантаження сили інерції $-\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, -\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, -\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, можна розглядати тіло в кожний даний момент часу в стані рівноваги. Застосовуючи до цього тіла принцип віртуальної роботи, отримаємо:

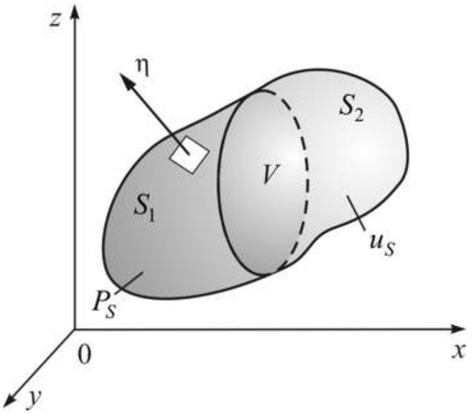


Рис. 12.12

$$\iiint\limits_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\mathrm{d}V +$$

$$\iint\limits_S \left(P_{xv}\delta u + P_{yv}\delta v + P_{zv}\delta w\right)\mathrm{d}S -$$

$$-\iiint\limits_V \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)\mathrm{d}V -$$

$$-\iiint\limits_V \left[\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\right]\mathrm{d}V = 0. \qquad (12.44)$$

Зазначимо, що тепер $u, v, w, X, Y, \ldots$ є функціями не тільки координат x, y, z, але і часу t. Винесемо в усіх інтегралах окрім третього, знак варіації за знаки інтегралів і за квадратну дужку і змінимо усюди знаки на обернені. Тоді в дужках залишиться вираз повної потенціальної енергії системи, і отримаємо:

$$\delta U + \iiint\limits_V \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)\mathrm{d}V = 0\,. \qquad (12.45)$$

Уявімо тепер, поряд з дійсною траєкторією руху, деяку близьку до неї траєкторію, яка перетинається з дійсною в моменти часу t_0 і t_1 (рис. 12.13). Це означає, що ми варіюємо компоненти переміщень $u, v, w,$ підпорядковуючи варіації умовам

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \text{ при } t = t_0 \text{ і } t = t_1. \tag{12.46}$$

Інтегруючи (12.45) по часу в межах від t_0 до t_1, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \mathrm{d}V \right] \mathrm{d}t = 0. \tag{12.47}$$

Другий інтеграл, інтегруючи частинами, можна переписати так:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \mathrm{d}V \right] \mathrm{d}t = = \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) \mathrm{d}V \right]_{t_0}^{t_1} -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) \mathrm{d}V \right] \mathrm{d}t.$$

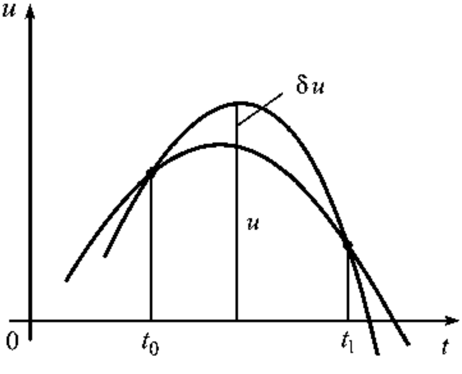


Рис. 12.13

Перший об'ємний інтеграл правої частини з урахуванням умови (12.46) перетворюється на нуль. Другий інтеграл є не що інше, як інтеграл по часу варіації кінетичної енергії. Дійсно, кінетична енергія T дорівнює:

$$T = \iiint_V \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \mathrm{d}V,$$

а її варіацією буде:

$$\delta T = \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) \mathrm{d}V.$$

Тому

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) \mathrm{d}V \right] \mathrm{d}t.$$

Підставляючи цей результат в (12.47) і змінюючи всі знаки на обернені, отримаємо:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) \, \mathrm{d}t = 0. \tag{12.48}$$

Іншими словами, на ділянці дійсного руху системи впродовж проміжку часу $t_0 - t_1$ інтеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,\mathrm{d}t$$

приймає екстремальне значення. В цьому і полягає *принцип Гамільтона*, або *принцип екстремуму дії*. Якщо розв'язується наближено задача про коливання пружного тіла, то принцип Гамільтона є чудовим критерієм для найкращого наближення шуканих функцій до їх дійсного значення.

Зазначимо, насамкінець, що коли на пружну систему діють зовнішні неконсервативні сили, то принцип Гамільтона записується в наступному вигляді

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta A\,\mathrm{d}t = 0\,, \tag{12.49}$$

де через A позначена робота неконсервативних сил.

12.9.2. Принцип Гамільтона в будівельній механіці стержневих систем

Принцип Гамільтона виражається одним і тим же рівнянням (12.49) як для тривимірних, так і для дво- чи одновимірних динамічних систем. Універсальний запис (12.49) не залежить також і від того, чи розглядається дискретна система зі скінченною кількістю ступенів свободи, чи система з розподіленими параметрами, кількість ступенів свободи в якій є нескінченною. Більш того, за допомогою принципу Гамільтона та так званих прямих методів можна досить просто звести задачу до скінченної системи диференціальних рівнянь [Баженов та ін., 2012, Баженов, 2014].

Розглянемо коливання шарнірно опертої балки, що має розподілену масу $m(x)$ та згинну жорсткість $EI(x)$, під дією розподіленого навантаження $q(x,t)$ (рис. 12.14).

Під дією навантаження система деформується і в ній виникають моменти $M(x,t)$. Коливання балки описуються функцією прогинів $w(x,t)$. Побудуємо рівняння коливань для даної системи.

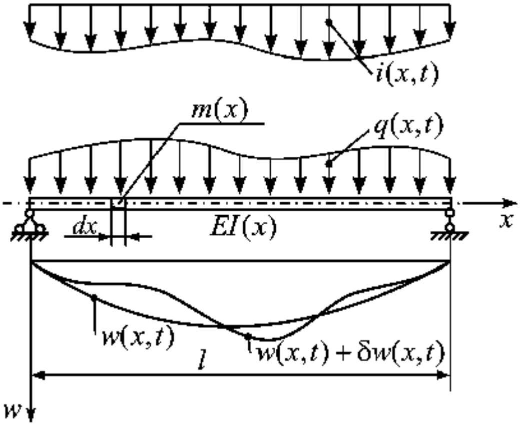


Рис. 12.14

Кінетична енергія балки

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\big(\dot{w}(x,t)\big)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m_1\big(\dot{w}(l_1,t)\big)^2\,\mathrm{d}x, \tag{12.50}$$

де символ $(\cdot)$ позначає операцію диференціювання по t.

Потенціальна енергія системи (потенціальна енергія згинної деформації) дорівнює

$$U(t)=\frac{1}{2}\int_0^l EI(x)(w''(x,t))^2\,\mathrm{d}x, \qquad (12.51)$$

де символ (′) позначає операцію диференціювання по x.

Робота неконсервативних сил характеризується співвідношенням

$$A(t)=\int_0^l q(x,t)w(x,t)\,\mathrm{d}x. \qquad (12.52)$$

Після підстановки (12.50), (12.51), (12.52) у (12.49) та виконання операцій варіювання одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l m(x)\dot{w}(x,t)\delta\dot{w}(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_0^l EJ(x)w''(x,t)\delta w''(x,t)\,\mathrm{d}x+\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=0. \qquad (12.53)$$

Виходячи з рівняння (12.53) за допомогою методу Рітца будуємо скінченну систему рівнянь, що описують коливання балки. Для цього розглянемо сімейство лінійно незалежних базисних функцій $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$, що задовольняють геометричні граничні умови

$$\varphi_i(0)=\varphi_i(l)=0, \quad i=1,2,...,n. \qquad (12.54)$$

Подамо функцію переміщення $w(x,t)$ у вигляді

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\varphi_i(x), \qquad (12.55)$$

де $y_i(t)$ – узагальнені координати, які є незалежними функціями часу.

Подамо варіацію переміщень $\delta w(x,t)$ у вигляді

$$\delta w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi_i(x), \qquad (12.56)$$

де $\delta y_i(t)$ – довільні незалежні варіації узагальнених координат.

Використовуючи (12.55), розписуємо варіації всіх функцій у виразі (12.53):

$$\begin{gathered}\delta w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi_i(x), \quad \delta\dot{w}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\delta\dot{y}_i(t)\varphi_i(x),\\ \delta w'(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi_i'(x),\ \delta w''(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi_i''(x).\end{gathered} \qquad (12.57)$$

Зазначимо, що

$$\delta y_i(t_1)=\delta y_i(t_2)=0. \qquad (12.58)$$

З урахуванням (12.55) і (12.57) вираз (12.53) переписується так:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l m(x)\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{y}_j(t)\varphi_j(x)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta\dot{y}_i(t)\varphi_i(x)\right)\mathrm{d}x-\right.$$

$$-\int_0^l EI(x)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j(t)\varphi''_j(x)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi''_i(x)\right)\mathrm{d}x+$$

$$\left.+\int_0^l q(x,t)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta\dot{y}_i\varphi_i(x)\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=0. \qquad (12.59)$$

Введемо:

- матрицю мас

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$m_{ij}=\int_0^l m(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x\,; \qquad (12.60)$$

- матрицю жорсткості

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$k_{ij}=\int_0^l EI(x)\varphi''_i(x)\varphi''_j(x)\,\mathrm{d}x\,; \qquad (12.61)$$

- вектор узагальнених навантажень

$$\mathbf{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),\ldots,q_n(t))^T,$$

де

$$q_i=\int_0^l q(x,t)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x\,; \qquad (12.62)$$

Використовуючи введене позначення (12.60) та виконуючи інтегрування частинами, записуємо таку послідовність рівностей:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^l m(x)\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{y}_j(t)\varphi_j(x)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta\dot{y}_i(t)\varphi_i(x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\dot{y}_j\delta\dot{y}_j\,\mathrm{d}t=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\dot{y}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta y_i(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\int_{t_1}^{t_2}\delta y_j\delta\dot{y}_i\,\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\ddot{y}_j(t)\right)\delta y_i\,\mathrm{d}t. \quad (12.63)$$

Використовуючи позначення (12.61), (12.62), записуємо такі вирази:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}EI(x)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j(t)\varphi_j''(x)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi_i''(x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}k_{ij}y_j(t)\right)\delta y_i\,\mathrm{d}t, \quad (12.64)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}q(x,t)\left(\sum_{i=1}^{n}\delta y_i(t)\varphi_i(x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}q_i\delta y_i(t)\right)\mathrm{d}t. \quad (12.65)$$

З урахуванням (12.63), (12.64), (12.65) рівняння (12.53) записується у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left[-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\ddot{y}_j-\sum_{j=1}^{n}k_{ij}y_j+q_i\right]\delta y_i(t)\,\mathrm{d}t=0. \quad (12.66)$$

Введемо:

- вектор узагальнених сил інерції

$$\mathbf{f}_I=-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}, \quad (12.67)$$

- вектор узагальнених пружних сил

$$\mathbf{f}_s=\mathbf{K}\mathbf{y}. \quad (12.68)$$

В нових позначеннях рівняння (12.66) записується у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathbf{f}_I(t)-\mathbf{f}_s(t)+\mathbf{q}(t)\right)\cdot\delta\mathbf{y}(t)\mathrm{d}t=0. \quad (12.69)$$

Звідки, зважаючи на довільність компонент вектора $\delta\mathbf{y}$, за основною лемою варіаційного числення одержуємо систему рівнянь

$$\mathbf{f}_I(t)-\mathbf{f}_s(t)+\mathbf{q}(t)=\mathbf{0}. \quad (12.70)$$

З урахуванням (12.67) і (12.68) система (12.70) набуває вигляду

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}+\mathbf{K}\mathbf{y}=\mathbf{q}. \quad (12.71)$$

Таким чином, виходячи з принципу Гамільтона та використовуючи метод Рітца, ми одержали систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка є дискретною моделлю задачі про коливання розподіленої стержневої системи. Зазначимо, що найчастіше в складних задачах будівельної механіки реалізація варіаційних принципів, і зокрема, принципу Гамільтона ґрунтується на застосуванні такого відомого різновиду метода Рітца, як метод скінченних елементів.

НАРИС 13

ДВОЇСТА ПРИРОДА ЗАДАЧ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Будівельна механіка - це мистецтво моделювати матеріали, роботу яких ми не розуміємо, в геометричних формах, які ми не можемо точно проаналізувати, під дією сил, які нам невідомі, причому робити це так, щоб ні у кого не виникало ніяких сумнівів.

Цит. за книгою Рейтмана М.И. «Залог прочности»

Комп'ютер формує теорію.

Дж. Аргіріс

Вступ

Історично в процесі розвитку механіка і, зокрема, будівельна механіка були пов’язані з геометрією. Адже реальним об’єктам завжди передували геометричні уявлення, схеми і побудови. Цікаво, що «… сам Архімед, - пише Плутарх, - вважав спорудження машин заняттям, аж ніяк не заслуговуючим ні праці, ні уваги; більшість з них з’явилась на світ так би мовити мимохідь, у вигляді геометричних розваг і то лише тому, що цар Гієрон із честолюбства переконав Архімеда хоч ненадовго відволіктись від теоретичних міркувань і звернутись до реальних речей, у якійсь мірі матеріалізувати свою думку, поєднати її з повсякденними потребами … Знаменитому і багатьма улюбленому мистецтву побудови механічних знарядь поклали початок Евдокс і Архіт, які намагалися розв’язати ті питання, доведення яких шляхом лише одних міркувань і креслень було важким; такою є задача про знаходження двох середніх пропорційних, для розв’язання якої обидва застосували механічні приладдя, будуючи шукані лінії на основі дуг і сегментів. Але оскільки Платон був обурений, дорікаючи їм у тому, що вони гублять гідність геометрії, механіка повністю відокремились від геометрії і, ставши однією із воєнних наук, довгий час зовсім не займала філософів» [Плутарх, 1961].

Діалектичний зв’язок механіки і геометрії підтверджує і відомий вислів І. Ньютона: «Таким чином геометрія виникла у геометричній практиці і є не що інше, як розділ загальної механіки, яка точно викладає і доводить до мистецтва процес виміру. Але, оскільки, фізичні властивості використовуються головним чином у тілах, які рухаються, то буває, що під геометрією зазвичай мають на увазі величину, під механікою – рух. У цьому сенсі раціональна механіка є наукою рухів, які виникли в результаті дії довільних сил і сил, які необхідні для довільних рухів, точно викладеною і доведеною».

Історично чітко відслідковується зв’язок між геометрією і статикою, або за термінологією механіки – між статичною і геометричною сторонами задачі.

У своїй новаторській роботі «Аналітична механіка», Ж.-Л. Лаґранж заснував всю механіку, а значить і статику, на єдиному принципі: принципі віртуальних швидкостей. Ж.-Л. Лаґранж тому визнав не тільки еквівалентність трьох принципів статики

- принцип важеля;
- принцип віртуальних переміщень;
- паралелограм сил,

але також і ясно показав, що принцип можливих переміщень може бути математично перетворений в принцип рівноваги.

Статика, в значенні рівноваги тіла, на рівні теоретичної механіки стала логічно завершеною. І це створило передумови для історичного розвитку теорії споруд в період формування дисципліни.

Ядром теорії, яка є підґрунтям кінематичного погляду на статику, заснованого Аристотелем і отримавшого завершений вигляд завдяки Ж.-Л. Лаґранжу, є принцип можливих переміщень. Цей принцип успішно застосовувався до простих механізмів, таких як важіль, блок або похила площина. Леонардо да Вінчі, наприклад, розглядав кам’яну арку як механізм. Проте, він не обчислював розпір арки за допомогою принципу можливих переміщень, а замість цього запропонував спосіб його експериментального визначення.

Перетворення будівельних конструкцій на механізми для їх подальшого механічного аналізу було характерним для кінематичного погляду на статику. Наслідки того, що механізм насправді знаходиться в рівновазі, можуть бути визначені непрямим шляхом за допомогою аналізу моделі у відхиленому положенні, як це зазвичай роблять при застосуванні кінематичного підходу.

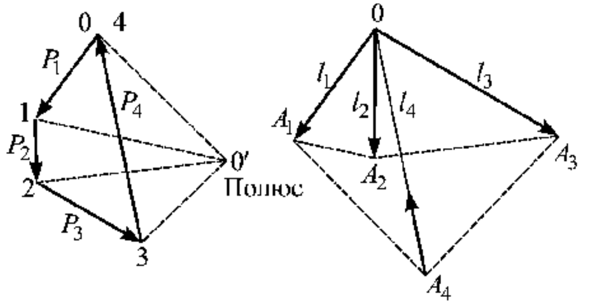
Кінематичне представлення статики	Векторне представлення статики
Представники:	*Представники:*
Аристотель, Герон, Вітрувій, Табіт ібн Курра, Неморарій, Леонардо Да Вінчі, Тарталья, Кардано, Лаґранж, Мор, Ланд, Мюллер-Бреслау	*Архімед, Герон, Папп, Табіт ібн Курра, Гвідобальдо дель Монте, Стевін, Галілео Галілей, Роберваль, Варіньон, Клапейрон, Мюллер-Бреслау*

Рис. 13.1. Кінематичне і геометричне представлення статики

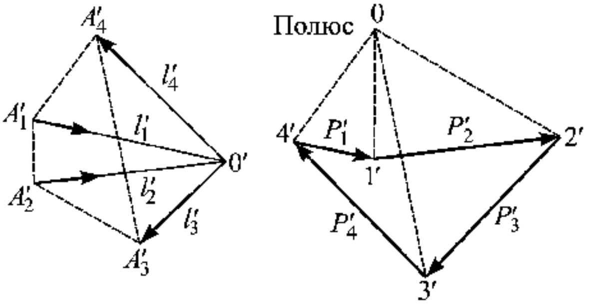
Кінематичний погляд на статику [Kurrer, 2008] (рис. 13.1, зліва), який був компонентом, що поєднав аристотелівську теорему про рух і натуральну філософію, було відкинуто свого часу Галілеєм та іншими ученими. При цьому набагато більшого значення набув геометричний підхід до механіки, заснований Архімедом. Тут ми знову повинні згадати «Діалог» Галілея. Консольна балка, на якій він продемонстрував руйнування при згині, стала метафорою геометричного представлення статики.

Тоді як кінематичне представлення статики, як чисто теоретична ідея в значенні Платона, мало високий соціальний престиж зі стародавніх часів, геометричний погляд на статику (рис. 13.1, праворуч) відносився до архітектури і розцінювався на цій підставі як «нижче мистецтво». Геометричне представлення статики розвинулося на основі евклідової геометрії і елементарних практичних вимог до споруд, де рівновага була природною умовою, яка не могла бути усунута без зовнішніх пошкоджень. Фундаментальне поняття стійкості дозволило геометричному представленню статики набути переважаючого положення в теорії споруд під час періоду її формування (1825–1900). Проте такі видатні інженери-будівельники, як О. Мор, Роберт Ланд (1857-1899), Г. Мюллер-Бреслау та інші зробили істотний внесок у кінематичний погляд на статику, розвиток якого також не переривався. Відмінності між кінематичним і геометричним представленнями статики, дискусії, що стимулювали та супроводжували розвиток теорії споруд, сформували найважливіші її елементи.

З історією будівельної механіки і теорії споруд тісно пов’язане поняття двоїстості. На стадії становлення це стосувалось, у першу чергу, методів графічного аналізу, які ґрунтувались на проективній геометрії.



силовий багатокутник мотузковий багатокутник



взаємний мотузковий багатокутник взаємний силовий багатокутник

Рис. 13.2. Дуальність мотузкового багатокутника і силового багатокутника для плоскої системи сил за Кульманом

Наведені на рис. 13.2 мотузковий багатокутник і багатокутник сил є взаємозамінними, оскільки немає значення, який з багатокутників обирається як силовий, а який як пов’язаний із ним мотузковий. К. Кульман називає такі фігури взаємними. Працюючи незалежно, Дж.К. Максвелл довів ще в 1864 р., що у випадку незбіжної системи сил такі дві фігури є взаємними тільки, коли силовий багатокутник може розглядатись як проекція багатогранника; при цьому інша фігура також є проекцією багатогранника. На рис. 13.2 дві фігури можуть інтерпретуватися як проекції чотирьохгранних пірамід з їх вершинами в 0 і 0′. Знання цих математичних співвідношень, також відомих як двоїстість мотузкового багатокутника і силового багатокутника, дозволило Кульману визначити функції навантаження тільки для арок еліптичної, параболічної і гіперболічної форми. Таким чином, евристична функція, заснована на проективній геометрії, залишилася ілюстративним обмеженим поняттям науково-технічної теорії графічної статики [Kurrer, 2008].

Загальновідомо, що умови рівноваги, закон поведінки матеріалу і кінематичні співвідношення дають 15 рівнянь або диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно 15 невідомих скалярних функцій трьох змінних, а саме:

- трьох переміщень,
- шести деформацій,
- шести напружень.

Логічне ядро теорії пружності характеризується цією триєдиною структурою. При вирішенні задач теорії пружності використовуються два підходи: виключення напружень і виключення переміщень.

Якщо, у разі повної лінійності, однорідності і ізотропності тіла, деформації і напруження виключені з системи рівнянь, векторне диференціальне рівняння приймає вигляд:

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{(1-2\cdot\nu)}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \frac{2\cdot(1+\nu)}{E}\mathbf{g} = 0 .$$

Ця система трьох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно вектора переміщень $\mathbf{u}$ при відомих об'ємних силах $\mathbf{g}$ і двох константах матеріалу E (модуль пружності) і ν (коефіцієнт Пуассона) плюс геометричні граничні умови була названа на честь Г. Ламе і Л. Нав'є. Об'єднавши рівняння і крайові умови, отримаємо метод розв'язання диференціальних рівнянь в переміщеннях Ламе-Нав'є, який названо терміном «метод переміщень» математичної теорії пружності.

Другий шлях полягає у виключенні переміщень і деформацій і переході - знову для випадку повної лінійності, однорідності і ізотропності тіла – до тензорного диференціального рівняння, названого на честь Е. Бельтрамі і Дж.Г. Мічелла:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} = -\left[\operatorname{grad}\mathbf{g} + \operatorname{grad}^T\mathbf{g} + \frac{\nu}{(1-\nu)}\cdot(\operatorname{div}\mathbf{g})\cdot I\right].$$

Зважаючи на силові крайові умови, компоненти тензора напружень σ_{ij} (s - сума діагональних компонент тензора напружень σ_{ij}, I - одиничний тензор) можуть бути визначені з цієї системи шести диференціальних рівнянь в частинних похідних. Підходи, що приводять до розв'язку диференціальних рівнянь Бельтрамі-Мічелла в напруженнях, названі «*методом сил*» математичної теорії пружності.

У літературі перший підхід, що використовує диференціальні рівняння в переміщеннях Ламе-Нав'є і геометричні крайові умови (умови, що визначають переміщення на поверхні тіла) названий першою крайовою задачею, а другий підхід, що використовує диференціальні рівняння Бельтрамі-Мічелла в напруженнях і статичні крайові умови (умови, що визначають сили на поверхні тіла) називають другою крайовою задачею теорії пружності. Можливий також третій підхід для розв'язання задач теорії пружності, коли на одній частині поверхні тіла S_1 задані напруження, а на іншій частині S_2 - переміщення.

Еуженіо Бельтрамі (1835–1900) – італійський математик, відомий своїми працями з диференціальної геометрії і математичної фізики. Починаючи з 1871 р. займався дослідженнями в галузі аналітичних функцій і механіки.

Джон Генрі Мічелл (1863–1940) – австралійський математик і механік. Роботи у галузі математики, фізики, гідравліки й теорії пружності. Встановив у теорії пружності диференціальні залежності між компонентами напружень (1899). Дав розв'язок двовимірної задачі теорії пружності (1899).

13.1. Форми виразу потенціальної енергії. Частинні похідні від потенціальної енергії

Потенціальна енергія стержневої системи, навантаженої силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, виражається формулою [Рабинович, 1954]

$$U(P,\Delta) = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \ldots + P_n\Delta_n), \qquad (13.1)$$

де через Δ_i позначено сумарне переміщення точки прикладення сили P_i за напрямком цієї сили.

У свою чергу, сумарні переміщення виражаються через одиничні (тобто через переміщення по тому ж напряму, що викликаються прикладеними порізно силами $P_1=1$, $P_2=1$, ..., $P_n=1$) таким чином:

$$\Delta_i = P_1\delta_{i1} + P_2\delta_{i2} + \ldots + P_n\delta_{in}. \qquad (13.2)$$

Якщо ми підставимо вирази Δ_i у формулу (13.1), то отримаємо вираз для доповнювальної потенціальної енергії

$$U^{\text{доп}}(P)=\frac{1}{2}(\delta_{11}P_1^2+\delta_{22}P_2^2+\ldots+\delta_{nn}P_n^2)+(\delta_{12}P_1P_2+\delta_{13}P_1P_3+\ldots+\delta_{23}P_2P_3+\ldots+\delta_{n-1n}P_{n-1}P_n)$$

або коротше

$$U^{\text{доп}}(P)=\frac{1}{2}\sum\delta_{ii}P_i^{\,2}+\sum\delta_{ik}P_iP_k\,, \qquad (13.3)$$

причому в другій сумі $i \neq k$. Права частина формули (13.3) є однорідним алгебраїчним багаточленом другого степеня відносно зовнішніх сил. До складу його входять з деякими коефіцієнтами квадрати сил та їх попарні добутки. Такі багаточлени носять назву квадратичних форм, тому можна сказати, що потенціальна енергія лінійно деформівного тіла завжди може бути представлена у вигляді квадратичної форми від зовнішніх сил.

До складу зовнішніх сил можна також включити реакції таких в’язей, відкидання яких не порушує геометричної незмінності і нерухомості системи.

Потенціальна енергія завжди додатна, отже, квадратична форма (13.3) має таку властивість, що ні при яких значеннях змінних $P_1, P_2, \ldots, P_n$ вона не може стати від’ємною. Такі квадратичні форми називаються *додатно визначеними.*

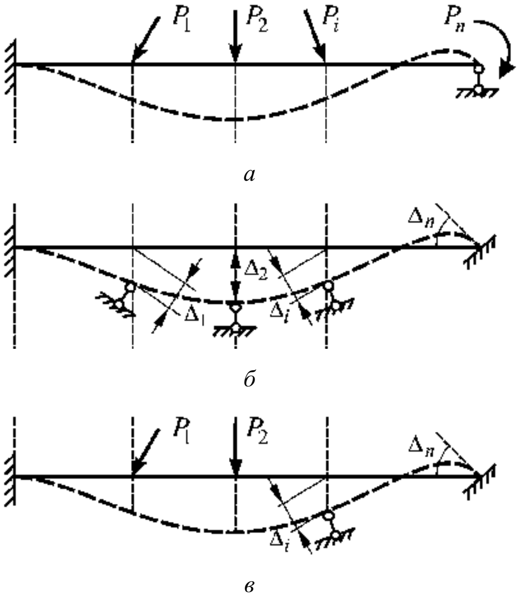


Рис. 13.3

Замість того, щоб вважати незалежними змінними зовнішні сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$, можна прийняти за незалежні змінні відповідні цим силам сумарні переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Ці дві різні можливості проілюстровано на простому прикладі (рис. 13.3). На рис. 13.3,*а* незалежними змінними є сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$; ними викликається деформація балки. На рис. 13.3,*б*, навпаки, незалежні змінні є переміщення $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$. Досягається це установкою відповідних опорних стержнів. Опорні реакції, що виникають в них, збігаються з силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, але вже є функціями заданих переміщень.

Для того, щоб представити потенціальну енергію як функцію переміщень $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ виразимо сили P_i через ці переміщення. Для цього треба написати *n* рівнянь вигляду (13.2) і розв'язати їх відносно величин P_i. Нам зараз немає потреби здійснювати цю операцію, лише відзначимо, що вона можлива і що розв'язком будуть *n* формул такого вигляду:

$$P_i = a_{i1}\Delta_1 + a_{i2}\Delta_2 + \ldots + a_{in}\ \Delta_n. \tag{13.4}$$

Якщо ми в цій формулі покладемо $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \ = \Delta_n = 0$, то отримаємо $P_i = a_{i1}$. Звідси витікає, що коефіцієнт a_{i1} виражає собою величину тієї реакції, яка виникне у *i*-й в'язі, коли по напрямку *i*-ї в'язі відбудеться переміщення рівне одиниці, тоді як решта $n-1$ в'язей залишаться нерухомими. Позначимо таку реакцію через r_{i1}. Тоді $a_{i1} = r_{i1}$ і взагалі $a_{ik} = r_{ik}$. Звідси автоматично витікає властивість взаємності коефіцієнтів a_{ik}, тобто $a_{ik} = a_{ki}$.

Отже:

$$P_i = r_{i1}\Delta_1 + r_{i2}\Delta_2 + \ldots + r_{in}\ \Delta_n, \tag{13.5}$$

тоді, згідно з формулою (13.2)

$$U(\Delta) = \frac{1}{2}\sum r_{ii}\Delta_i^2 + \sum r_{ik}\Delta_i\Delta_k,\ i \neq k. \tag{13.6}$$

Такою є потенціальна енергія пружної деформації.

Третю форму потенціальної енергії отримаємо, якщо за незалежні змінні оберемо частково сили, частково переміщення. Хай для якихось *m* точок дані сили $P_1, P_2, \ldots, P_m$, що діють в них, а для інших $n-m$ точок – переміщення $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_n$. Приймемо ці величини за незалежні змінні. Для цього потрібно уявити собі, що в точках $m+1$, $m+2, \ldots, n$ поміщені в'язі (наприклад, опорні стержні) і що останні перемістилися на задані величини $\Delta_{m+1}, \ldots, \Delta_n$. Роль сил $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ гратимуть реакції цих в'язей, а роль сил $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – зовнішні сили (рис. 13.3, *в*).

Залежні *m* переміщень і $n-m$ сил можна виразити через обрані незалежні змінні формулами вигляду

$$\left.\begin{aligned} P_i\ (\text{при } i > m) &= \sum_{k=1}^{k=m} r'_{ik}P_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} r_{ik}\Delta_k; \\ \Delta_i\ (\text{при } i \leq m) &= \sum_{k=1}^{k=m} \delta_{ik}P_k + \sum_{k=m+1}^{k=n} \delta'_{ik}\Delta_k. \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Тут через δ_{ik}, δ'_{ik}, r_{ik}, r'_{ik} позначені переміщення і реакції, що спричинені дією в точці *i* одиничних незалежних змінних, тобто $P_k = 1$ або $\Delta_k = 1$.

Звідси легко отримати вираз для потенціальної енергії:

$$U(P,\Delta)=\frac{1}{2}\sum P_i\Delta_i=\frac{1}{2}\sum_1^m\delta_{ii}P_i^2+\sum_1^m\delta_{ik}P_iP_k+\frac{1}{2}\sum_{m+1}^n r_{ii}\Delta_i^2+\sum_{m+1}^n r_{ik}\Delta_i\Delta_k,\ i\neq k. \quad (13.8)$$

Ця формула для потенціальної енергії називається *змішаною.*

З цієї формули витікає, що *якщо система, закріплена в точках* $m+1, m+2, \ldots, n$, *піддається сумісній дії сил* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *і переміщень* $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_n$, то потенціальна енергія дорівнює сумі енергій, які вийшли б при роздільній дії цих сил, з одного боку, і переміщень, з іншого боку. Члени, що виражають взаємну роботу цих двох чинників, відсутні.

Це легко зрозуміти, якщо уявити собі, що спочатку відбулися переміщення $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_n$, а потім з'явилися сили $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Коли відбувається процес деформації системи цими силами, то названі в'язі вже не отримують додаткових переміщень, а тому їх реакції змінюють тільки свою величину, але не здійснюють додаткової роботи. Отриманий висновок можна записати так:

$$U(P,\Delta)=U^{\text{доп}}(P)+U(\Delta). \quad (13.9)$$

Вважатимемо всі сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$ незалежними змінними. Продиференціюємо за цієї умови обидві частини формули (13.2) по одній із сил, наприклад, по P_1 і отримаємо

$$\frac{\partial\Delta_i}{\partial P_1}=\delta_{i1}=\delta_{1i}. \quad (13.10)$$

Продиференціювавши ж після цього по тій же змінній формулу (13.1) і скориставшись співвідношенням (13.10), знайдемо

$$\frac{\partial U(P,\Delta)}{\partial P_1}=\frac{1}{2}\left(\Delta_1+P_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial P_1}+P_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial P_1}+\ldots+P_n\frac{\partial\Delta_n}{\partial P_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Delta_1+P_1\delta_{11}+P_2\delta_{12}+\ldots+P_n\delta_{1n}\right)=\frac{1}{2}\left(\Delta_1+\Delta_1\right)=\Delta_1. \quad (13.11)$$

Той же результат ми могли б отримати, продиференціювавши безпосередньо формулу (13.3). Отже, за вказаної умови частинна похідна від потенціальної енергії по одній з сил дорівнює переміщенню точки прикладення цієї сили за напрямком останньої. Ця теорема відома під назвою теореми Кастільяно.

Якщо в точці, переміщення якої ми шукаємо, немає зовнішньої сили, то її треба прикласти, літерно позначити, потім скласти вираз потенціальної енергії і продиференціювати його по цій силі. Виконавши ці операції, ми отримаємо вираз для шуканого переміщення, і в ньому залишиться тільки прирівняти введену нами силу нулю.

Друга похідна також має простий фізичний сенс: з формул (13.10) і (13.11) виходить, що

$$\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}(P)}{\partial P_i^2}=\delta_{ii}. \quad (13.12)$$

Звідси видно, що друга похідна по силі завжди додатна. Далі:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_k} = \delta_{ik} . \qquad (13.13)$$

Інколи в будівельній механіці доводиться вирішувати обернену задачу: по даних сумарних переміщеннях $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ знайти відповідні сили $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Така задача зустрічається, наприклад, тоді, коли силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$ служать реакції зайвих опорних стержнів, викликані переміщеннями $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ цих стержнів. У цих випадках представляє інтерес наступна властивість потенціальної енергії, встановлена ще Ж.-Л. Лаґранжем: якщо переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ розглядаються як незалежні змінні, то частинна похідна від потенціальної енергії по будь-якому з цих переміщень дорівнює відповідній силі, тобто

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_i} = P_i . \qquad (13.14)$$

Доведення можна провести аналогічно доведенню теореми Кастільяно.

Розглянемо окремий випадок, коли в системі в певних точках задані вимушені переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, після чого ці точки були закріплені. Роль зовнішніх сил відіграють при цьому реакції $P_1, P_2, \ldots, P_n$ відповідних в'язей, тому з формули (13.14) отримуємо

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_i} = R_i , \qquad (13.15)$$

а з формули (13.6)

$$\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial \Delta_i^2} = r_{ii} . \qquad (13.16)$$

Якщо ми звернемося до змішаного виразу потенціальної енергії, то відмітимо, що воно допускає диференціювання по змінним обох типів. Продиференціюємо формулу (13.9) по одній з незалежних змінних сил $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Вираз $U(\Delta)$ не залежить від цих сил, тому похідна від потенціальної енергії виходить такою, наче потенціальна енергія є функцією тільки від сил:

$$\frac{\partial U(P,\Delta)}{\partial P_i} = \frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial P_i} = \Delta_i . \qquad (13.17)$$

Частинна похідна від потенціальної енергії, вираженої в змішаній формі, по одній із заданих незалежних сил P_i дорівнює сумарному переміщенню Δ_i за напрямком цієї сили, отриманому за умови, що точки прикладення сил $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_n$ нерухомі.

Аналогічним чином

$$\frac{\partial U(P,\Delta)}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial U(\Delta)}{\partial \Delta_i} = R_i , \qquad (13.18)$$

тобто частинна похідна від того ж виразу по одному із заданих незалежних переміщень Δ_i дорівнює реакції відповідної i-ї в'язі, яка виникла б при заданих незалежних переміщеннях $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots, \Delta_{m+n}$, якби зовнішні сили $P_1, P_2, \ldots, P_m$ були відсутні.

Із формули (13.6) отримуємо

$$\frac{\partial^2 U(\Delta)}{\partial\Delta_i \partial\Delta_k} = r_{ik}\,. \tag{13.19}$$

Наведені залежності можуть бути отримані і із загальних міркувань.

Як відомо [Баженов, 2014], теорема Ейлера про однорідні функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виміру k свідчить, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Якщо $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$ і $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

Нерівність Юнга

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Перетворення Лежандра

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Теорема Лаґранжа	*Теорема Кастільяно*
$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$	$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$

Якщо функція є квадратичною формою, то $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, де $\mathbf{A}$ – матриця квадратичної форми. Оскільки $\mathbf{A}$ – симетрична матриця, то $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. За теоремою Ейлера $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2f(\mathbf{x})$, або $\mathbf{p}^T \mathbf{x} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. Звідки $\mathbf{p}^T = 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{x}^T = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}$. Тоді

$$H(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}\,.$$

Таким чином значення квадратичної форми $f(\mathbf{x})$ і її перетворення Лежандра $H(\mathbf{p})$ у відповідних точках співпадають

$$f(\mathbf{x}) = H(\mathbf{p}).$$

Перетворення Лежандра у випадку функції потенціальної енергії пружної деформації $U(\Delta)$ і доповнювальної потенціальної енергії $U^{\text{доп}}(P)$ має вигляд

$$\mathbf{P}^T = \{P_1, P_2, \ \ldots \ , P_n\}; \ \mathbf{\Delta}^T = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \ , \Delta_n\}.$$

Потенціальна енергія пружної деформації

$$U(\mathbf{\Delta})=\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}.$$

Доповнювальна потенціальна енергія

$$U^{\text{доп}}(\mathbf{P})=\frac{1}{2}\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}.$$

Нерівність Юнга має вигляд

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}+\frac{1}{2}\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{p}\ge\mathbf{P}^T\mathbf{\Delta}.$$

Рівність робіт внутрішніх і зовнішніх сил являє собою перетворення Лежандра

$$\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}+\frac{1}{2}\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}=\mathbf{P}^T\mathbf{\Delta}.$$

При цьому повинні бути виконані умови рівноваги, сумісності деформацій і граничні умови.

Умова, що перетворює нерівність Юнга у рівність

$$\mathbf{P}=\mathbf{K}\mathbf{\Delta},\ \text{або}\ \mathbf{\Delta}=\mathbf{D}\mathbf{P}.$$

При цьому матриці $\mathbf{K}$ і $\mathbf{D}$, які являють собою відповідно матриці жорсткості і піддатливості є взаємно оберненими $\mathbf{KD}=\mathbf{E}$. Ці матриці є матрицями других похідних (матрицями Гессе) від потенціальної енергії пружної деформації і доповнювальної потенціальної енергії, їх коефіцієнти дорівнюють:

$$k_{ij}=\frac{\partial^2 U(\mathbf{\Delta})}{\partial\Delta_i\partial\Delta_j};\qquad \delta_{ij}=\frac{\partial^2 U^{\text{доп}}(\mathbf{P})}{\partial P_i\partial P_j}.$$

Згідно з *теоремою Донкіна*, якщо дві двоїсті за Юнгом функції потенціальної енергії $U(\mathbf{\Delta})$ і $U^{\text{доп}}(\mathbf{P})$ залежать від одного і того ж параметра або групи параметрів, які не є активними, тобто не беруть участі у перетворенні Лежандра (η), то має місце залежність

$$\frac{\partial U(\mathbf{\Delta})}{\partial\eta}=-\frac{\partial U^{\text{доп}}(\mathbf{P})}{\partial\eta}.$$

Наприклад,

$$U(\Delta)=\frac{1}{2}k\Delta^2,\qquad U^{\text{доп}}(P)=\frac{1}{2}\frac{P^2}{k},$$

$$\frac{\partial U(\Delta)}{\partial k}=\frac{1}{2}\Delta^2,\qquad \frac{\partial U^{\text{доп}}(P)}{\partial k}=-\frac{1}{2}\frac{P^2}{k^2}=-\frac{1}{2}\Delta^2.$$

Відповідні екстремальні задачі для перетворення Лежандра дають двоїсті за Лаґранжем постановки екстремальних задач (принципи Лаґранжа і Кастільяно).

Пряма задача	*Двоїста задача*
$\left\{\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}^T\mathbf{K}\mathbf{\Delta}-\overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{\Delta}\right\}\to\min$,	$\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P}+\overline{\mathbf{\Delta}}^T\mathbf{P}\right\}\to\max$,
за умови $\mathbf{\Delta}=\overline{\mathbf{\Delta}}$.	за умови $\mathbf{P}=\overline{\mathbf{P}}$.

13.2. До історії методу сил[1] і методу переміщень

Величезне значення принципу можливих переміщень для механіки твердого тіла і системи твердих тіл було цілком оцінене після появи «Аналітичної механіки» Лаґранжа (1788).

Початком широкого енергетичного напряму в розробці питань теорії пружності і розрахунку статично невизначуваних систем слід вважати момент публікації теореми Клапейрона про дійсну роботу пружних сил (1852).

Наступний знаменний етап в теорії пружного тіла полягав у відкритті принципу взаємності робіт.

Вперше принцип взаємності був виведений у суто алгебраїчному вигляді О.Л. Коші, який в 1857 р. довів наступну властивість всякої однорідної квадратичної функції декількох змінних, якщо

$$y_1 = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \theta_1),\ y_2 = F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \theta_2),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1}\alpha_2 + \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1}\beta_2 + \dots = \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_2}\alpha_1 + \frac{\partial y_2}{\partial \beta_2}\beta_1 + \dots$$

Але, якщо ми розумітимемо під y_1 і y_2 потенціальні енергії, відповідні двом станам навантажень, а саме $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \theta_1)$ і $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \theta_2)$, то написані вище частинні похідні по силам виражатимуть собою відповідні переміщення, а теорема взаємності робіт стане лише окремим випадком теореми Коші. Проте сам О.Л. Коші, хоча і був вельми близький до питань теорії пружності, не зробив такого висновку зі своєї теореми. Зазначимо про очевидний зв'язок наведеної теореми з відомою теоремою Ейлера для однорідних функцій (1779).

Властивість взаємності, що відноситься до пружного тіла, була відкрита в 1864 р. Дж.К. Максвеллом у формі теореми про взаємність переміщень:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

У тій же роботі Дж.К. Максвелл довів для ферми наступну лему: якщо при дії сили «одиниця», прикладеної між двома вузлами *B* і *C*, в деякому стержні s виходить зусилля $S = p$, то при заданому подовженні цього стержня $\Delta s = 1$ подовження відрізка *BC* буде також рівне p. Застосовуючи сучасні позначення, можна сказати, що для такої системи при $P = 1$ виходить співвідношення

$$r_{1P} = -\delta'_{P1}.$$

Доведення принципу взаємності робіт для будь-якого пружного тіла було дано в 1872 р. Е. Бетті. Він розглядав два стани тіла, що знаходиться під сумісною дією поверхневих і об'ємних сил, і виразивши роботу через напруження і переміщення, показав, що множники, що відносяться до обох станів, входять у вираз віртуальних робіт симетрично. При цьому він брав до уваги також роботу сил інерції. Зі своєї теореми він зробив ряд важливих для теорії пружності висновків.

---

[1] Докладний історичний нарис розвитку спеціальних прийомів методу сил наведений в книзі: Рабинович И.М. «Методы расчета рам» [Рабинович, 1934, с. 10-25].

Майже одночасно з Е. Бетті, але пізніше за нього на один - два роки, Релей опублікував ряд робіт, присвячених питанням взаємності.

Релей виходив з міркувань, значно більш загальних і, в той же час, простіших, ніж у Е. Бетті. У своїх перших статтях він не дійшов до самого кінця і замість того, щоб довести взаємність робіт, обмежився доказом взаємності переміщень і реакцій.

У 1873 р. він довів, що якщо періодична сила гармонійного типу із заданою амплітудою і періодом діє на систему в точці *A*, то амплітуда і фаза переміщень іншої точки *B* будуть такі ж, як вийшли б в точці *A*, якби сила діяла в точці *B*. Наступного року він зробив з цієї теореми висновок статичного характеру, припустивши, що період сили дуже великий, а ефект розсіювання, а також сил інерції - дуже малий. Тоді у будь-який момент тіло матиме таку конфігурацію, яку воно мало б при дії тих же сил, що залишаються незмінними. Звідси він отримав три статичні співвідношення, які в наших позначеннях запишуться так:

$$\delta_{12} = \delta_{21}\,;\; r_{12} = r_{21} \text{ і } \delta'_{P2} = -r_{2P}\,.$$

Друге з цих рівнянь, за словами Релея, розповсюджується також на коливання систем. Не дивлячись на це, він в 1875 р. окремо довів теорему взаємності переміщень для балки будь-якого змінного перерізу, опертої на кінцях. Тільки у 1877 р. в першому виданні своєї книги по теорії звуку він дав закон взаємності робіт у формі співвідношення

$$\Psi_1\psi_1'+\Psi_2\psi_2'+\ldots=\Psi_1'\psi_1+\Psi_2'\psi_2+\ldots\ ,$$

де через Ψ позначені узагальнені сили, а через ψ - узагальнені переміщення.

Чисто алгебраїчне, а тому загальне трактування принципу взаємності було знову сформульоване в 1927 р. П.Л. Пастернаком. Він розглядає взаємність як властивість, яка притаманна всякій системі *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, що має симетричну матрицю (тобто симетрію коефіцієнтів). Хай система має вигляд

$$\begin{gathered}
a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n = c_1;\\
a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n = c_2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \ldots + a_{nn}Y_n = c_n,
\end{gathered}$$

де $a_{ik} = a_{ki}$.

Якщо замінити праві частини рівнянь $c_1, c_2, \ldots, c_n$ новими $c_1', c_2', \ldots, c_n'$, а корені нової системи позначити через $Y_1', Y_2', \ldots, Y_n'$, тоді завжди задовольнятиметься наступне співвідношення

$$Y_1 c_1' + Y_2 c_2' + \ldots + Y_n c_n' = Y_1' c_1 + Y_2' c_2 + \ldots + Y_n' c_n\,.$$

Принцип взаємності робіт є тільки частинною ілюстрацією цієї загальної алгебраїчної теореми, якщо під Y_i і Y_i' розуміти дві сукупності сил (або переміщень), а під c_i і c_i' - відповідні їм сумарні переміщення (або сили). Але для того, щоб скористатися таким методом міркувань, необхідно наперед довести взаємність коефіцієнтів, тобто довести теорему $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ або $r_{ik} = r_{ki}$.

Вже після того, як принцип взаємності став відомий і отримав застосування, з'явилася книга К.А. Кастільяно. Вона була опублікована італійською в 1875 р. і французькою в 1879 р. Проте його книга також присвячена загальним властивостям пружного тіла і подібно до названих робіт заснована на властивостях потенціальної енергії деформацій.

І.М. Рабінович [Рабинович, 1954, том 2], характеризуючи розвиток механіки в другій половині XIX століття, зазначав, що не можна не дивуватись тій силі, з якою пробиваються до життя наукові ідеї, коли потреба в них цілком назріла. Ідея енергетичного методу вивчення пружного тіла, методу, який різноманітними способами використовує властивості роботи деформацій, - ось що об'єднує роботи усіх названих авторів, які незалежно один від одного в цю найважливішу для будівельної механіки епоху заклали основи сучасної теорії статично невизначуваних систем.

Що стосується принципу найменшої роботи, то він проголошувався як універсальний, всеосяжний закон природи П.Л. Мопертюї ще в XVIII ст., але не міг бути строго доведений. У XIX ст. (1858 р.) його висунув в більш обмеженому формулюванні Л.Ф. Менабреа, доведення якого було також недостатньо строгим. Кастільяно дав більш задовільне доведення, справедливе для лінійно деформівних систем.

Енергетичні ідеї, що збагатили будівельну механіку, знайшли блискуче трактування в праці В.Л. Кирпичова «Лишние неизвестные в строительной механике», що вийшла в 1903 р. Всі твори В.Л. Кирпичова були неабиякими по ясності, наочності і в той же час загальності викладення. У названій праці він дав стислий, але вичерпний виклад суті принципу взаємності робіт, теорем про похідні потенціальної енергії і про мінімум роботи деформації. Застосування цих принципів він проілюстрував прикладами. Невелика за об'ємом, але багата за змістом праця В.Л. Кирпичова вводила читачів в коло передових для тодішнього часу ідей будівельної механіки і суттєво вплинула на розвиток цієї науки.

У подальшому системне викладення цих принципів в курсі, призначеному для вищої школи, було дано в більш сучасному вигляді М.М. Філоненко-Бородичем [Филоненко-Бородич, 1932]. Однією з перших робіт, присвячених дослідженню властивостей потенціальної енергії, було дослідження П. Бехтєрєва, що вийшло в 1925 р. [Бехтерев, 1925] Грунтуючись на властивості потенціальної енергії завжди зберігати додатність, Бехтєрєв вивів ряд цікавих нерівностей між константами, які пов'язують напруження і деформації анізотропного пружного тіла. Деякі властивості потенціальної енергії, що мають значення для задач стійкості і динаміки споруд (наприклад, енергетичні властивості складених систем, що утворюються скріпленням двох основних систем), вказані Я.Л. Нудельманом [Нудельман , 1949]. Я.М. Ріппенбейн [Риппенбейн, 1927] розширив вираз роботи зовнішніх і внутрішніх сил, ввівши в розгляд новий вид навантажень: «пари *n-го* порядку», що мають розмірність $кг{\cdot}м^n$.

Принципу взаємності робіт О.А. Уманський [Уманский, 1935, стор. 39] дав формулювання, що випливає з розширеного уявлення про два «стани» системи:

передбачається, що разом із зовнішніми силами задані певні кінцеві деформації. Наприклад, в деяких перерізах задані розриви в пружній лінії або в її похідній. При складанні виразу взаємної роботи кожна сила і місцева деформація одного стану множиться на відповідне переміщення або відповідну внутрішню силу іншого стану.

Теореми енергетичного характеру отримали відомий розвиток також в іншому напрямі: у розповсюдженні їх на тіло, що деформується нелінійно. Перша спроба в цьому напрямі була зроблена В.Е. Новодворським (1889-1933). Наступна значна робота належить М.І. Безухову.

Метод розв'язання статично невизначуваних задач, при якому за невідомі беруться зусилля в зайвих в'язях (метод сил), виник давно. В усякому разі в неявному вигляді він фігурував при розрахунку нерозрізних балок вже в 1808 р. Канонічні рівняння методу сил вперше в літературі були надані Дж.К. Максвеллом в 1864 р. Він вивів ці рівняння для статично невизначуваної ферми, користуючись принципом можливих переміщень і розглядаючи послідовно можливу роботу сил $X_1 = 1,\ X_2 = 1, \dots$ на дійсних переміщеннях системи.

Подальший розвиток ці рівняння отримали в 70-х і 80-х роках XIX ст. в працях О. Мора і ряду інших авторів. Як вже зазначалось, ознайомленню широких інженерних кіл із загальною теорією розрахунку статично невизначуваних стержневих систем в кінці XIX і на початку XX століть багато сприяв своїм блискучим і часто оригінальним викладанням В.Л. Кирпичов.

Спеціальні прийоми методу сил, призначені для подолання труднощів розрахунку статично невизначуваних систем з великим числом невідомих, почали розроблятися досить давно. Першим результатом таких досліджень було виведення рівняння трьох моментів для нерозрізної балки.

Ідея перетворення на нуль коефіцієнтів деяких канонічних рівнянь за допомогою введення нескінченно жорстких стержнів і перенесення на них зайвих невідомих вперше знайшла своє застосування в 1881 р. (О. Мор), ідея використання групових невідомих з'явилася в 1892 р. (Г. Мюллер-Бреслау). Як найбільш просте групування спочатку застосовувалося поєднання зайвих невідомих в симетричні і зворотно симетричні групи, потім з'явилися складніші групи невідомих, утворені за принципом лінійного однорідного перетворення із застосуванням довільних коефіцієнтів.

У XX ст. розрахунок статично невизначуваних рам розроблявся багатьма авторами. Спочатку основна задача полягала в розрахунку рам з паралельними горизонтальними поясами і вертикальними стійками (безроскісні ферми, як їх тоді називали). Лише згодом, коли рамні каркаси різних видів почали широко застосовуватися в промисловому і цивільному будівництві, ця тема була розширена.

Одна з перших робіт належить професорові Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Л.Ф. Ніколаї [Николаи, 1904]. Наступне вагоме дослідження належить Г.П. Передерію [Передерий, 1906]. Він вивів основні формули для рами, що має вид прямокутного замкнутого контуру, при різних співвідношеннях жорсткості стержнів і потім розповсюдив їх на багатоярусні безрозкісні однопанельні рами з паралельними поясами.

У 1909 р. вийшла оригінальна книга І.С. Подольського [Подольский, 1909], в якій було подано простий наближений розрахунок безрозкісних рам з паралельними і непаралельними поясами на нерухоме і рухоме навантаження.

У 1913 р. з'явилася праця М.С. Стрелецького, присвячена методам розрахунку таких самих рам з паралельними поясами і вузловим навантаженням.

В цей же час вийшла книга, що займає особливе місце в літературі, присвяченій теорії розрахунку статично невизначуваних стержневих систем, - книга В.В. Башинського [Башинский, 1913]. У ній розрахунок будь-якої рамної системи починається з того, що для кожного прямого стержня пишеться рівняння пружної лінії, як алгебраїчний багаточлен; степінь останнього на 4 одиниці вище за степінь кривої, що виражає інтенсивність навантаження. Коефіцієнти багаточленів визначаються потім з системи рівнянь, що виражають нерозривність деформацій в місцях перетину стержнів і умови закріплення на опорах. Книга В.В. Башинського мала корисний ідейний вплив на подальший розвиток теорії пружної лінії. Початком нового етапу в теорії рам можна вважати появу в 1921 р. книги М.С. Стрелецького, присвяченої розрахунку складних статично невизначуваних систем [Стрелецкий, 1921].

Перші ідеї методу переміщень зустрічаються в літературі лише як натяки, неясні ще самим авторам. Так, наприклад, Е. Вінклер в 1862 р. для розрахунку нерозрізної балки вивів формули, в яких згинальні моменти в стержні виражені як функції від кутів повороту його кінців і від повороту стержня, але він не дійшов до розуміння того, що цей метод можна узагальнити, і в подальшому викладенні він постарався звільнитися від цих змінних, виразивши їх через моменти. Ж.А.Ш. Бресс пішов дещо далі і в 1865 р. вивів для нерозрізної балки рівняння трьох кутів. Проте він тут же відмітив: «нам здається зайвим розвивати далі ці міркування, практичне використання яких буде дуже обмеженим». Як бачимо, він відмовився від розвитку ідей, які могли привести його до відкриття методу переміщень, і не помітив їх цінності.

Окрім зазначених робіт Е. Вінклера (1862) і Ж.А.Ш. Бресса (1865) слід згадати виконані раніше дослідження Д.І. Журавського [Бернштейн, 1967] з розрахунку ферм. Він вважав, що ділянка поясу ферми між двома «перерізами розділу вантажів» (за термінологією Д.І. Журавського) знаходяться у таких же самих умовах, як стержень, защемлений з обох нерухомих кінців, по довжині якого прикладені осьові сили. Ця задача, яка стала класичною, статично невизначувана і Д.І. Журавський розв'язує її за допомогою методу деформацій.

В узагальнюючій статті одного з авторів цієї книги А.В. Перельмутера «К столетию метода перемещений» [Перельмутер, 2014] зазначено, що у другій половині 19-го століття метод сил визначав обличчя класичної будівельної механіки. Сьогодні цю роль виконує метод переміщень — один з найважливіших оплотів сучасної будівельної механіки, який лежить в основі практично всіх розрахункових комп'ютерних програм. Внутрішня структура цього методу виявилася такою, що ідеально підходить для формалізованого підходу, орієнтованого на програмну реалізацію. Метод переміщень для розрахунку рам розробив в 1914 р. Аксель Бендінксен [Bendixsen, 1914].


Дмитро Іванович Журавський,
рос. Дмитрий Иванович Журавский
(1821 — 1891)


Жак Антуан Шарль Бресс,
фр. Jacques Antoine Charles Bresse
(1822 – 1883)


Еміль Вінклер,
нім. Emil Winkler
(1835 - 1888)


Михайло Митрофа́нович Філоне́нко-Броди́ч
рос. Михаил Митрофа́нович Філоне́нко-Броди́ч
(1885 — 1962)

Сім років потому професор данський інженер Копенгагенського технічного університету Асгер Остенфельд представив рівняння для зсувів в тій же самій формі, що і рівняння для методу сил, які були тоді вже відомі. А. Остенфельд відмовився від кінематичного підходу А. Бендіксена і поклав в основу міркувань рівняння рівноваги вузлів, в які ввів реакції стержнів, що сходяться у вузлі, на одиничний поворот вузла. Заздалегідь вивчені реакції окремих стержневих елементів системи були, на думку А. Остенфельда, тими «цеглинами», які дозволяють не починати аналіз кожного разу із самого початку і, як ясно тепер, стали прообразами сучасних скінченних елементів. А. Остенфельд ввів сам термін «метод переміщень» і вказав на його формальну двоїстість з методом сил [Ostenfeld, 1921].

В 1927 р. практично одночасно Людвіг Манн [Mann, 1927] і О.О. Гвоздьов [Гвоздев, 1927], виходячи з класичних рівнянь другого роду в аналітичній механіці Лаґранжа, надали методу переміщень остаточну форму, що збереглася до цього дня. Зокрема в книзі О.О. Гвоздьова дана чітка характеристика основної системи методу переміщень, викладені властивості коефіцієнтів системи канонічних рівнянь і розглянуті питання, пов’язані з групуванням невідомих.

Що стосується природи двоїстості рівнянь методу сил і методу переміщень, то вона була детально розкрита в книзі Кирпичова [Кирпичев, 1903], в якій наводилися обґрунтування і методу сил і методу переміщень. Друге видання цієї чудової книги [Кирпичев, 1934] вийшло через 21 рік після смерті її автора.

Потрібно відзначити, що основна робота А. Бендиксена [Bendixsen, 1914] виникла не на порожньому місці, і дослідження його попередників вже містили деякі елементи методу переміщень. В першу чергу тут доречно згадати роботу Альфреда Клебша, який в своєму курсі теорії пружності (на відміну від сучасних курсів він містив і теорію стержневих систем) писав: «… будемо розглядати переміщення вузлів як заздалегідь відомі параметри, визначати від них пружні сили, з якими стержні реагують у своїх кутах, і нарешті, встановимо умови рівноваги для зовнішніх і пружних сил, які діють у вузлах; ці рівняння тоді дозволять обчислити переміщення» [Clebsch, 1862]. На жаль, тоді в 1862 році ця ідея не була підхоплена, і для її практичного використання знадобилося ще сорок років.

У вісімдесятих роках 19-го століття увагу дослідників привернула проблема «вторинних напружень», що виникають внаслідок неідеальності шарнірних з'єднань у вузлах ферм. Теорія вторинних напружень, розвинена в роботах Генріха Мандерли [Manderla, 1880], Еміля Вінклера [Winkler, 1872], Фрідріха Енгессера [Engesser, 1879], ввела в аналіз в якості додаткових змінних кути повороту вузлів ферми. Її завершення в роботах Отто Мора [Mohr, 1892, 1893] стало трампліном для розробки методу переміщень.

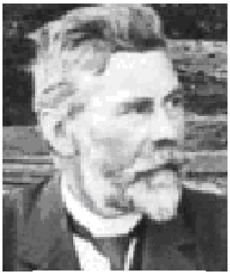
Варто також згадати книгу Є.О. Патона [Патон, 1901], присвячену розрахунку ферм з жорсткими вузлами. У ній надано огляд всіх опублікованих до того часу способів розрахунку і за допомогою одного з них проведено широке дослідження, що мало на меті знайти відносний приріст напружень, які виникають у фермах завдяки жорсткості вузлів. Всі методи, наведені в книзі Є.О. Патона, є, по суті, різними варіантами методу переміщень

У 1907 р. Н.В. Некрасов опублікував книгу [Некрасов, 1907], в якій наведена схема точного розв’язання задачі, вільна від спрощуючих допущень, що приймалися його попередниками. Для розв’язку системи рівнянь з великою кількістю невідомих, яка неминуче виникає при такому розв’язанні, автор запропонував користуватися способом Ґаусса, який застосовується при урівноваженні помилок за методом найменших квадратів. У 1909 р. С.І. Белзецький [Белзецкий, 1909] запропонував більш просте, але наближене розв’язання задачі. Воно представлене в загальній формі, яка може бути використана для будь-якої ферми. Число невідомих кутів повороту у нього вийшло рівним *k* -2, де *k* - число вузлів ферми. Слід відмітити теоретичне і експериментальне дослідження К.М. Дубяги [Дубяга, 1914], який також дав критичний огляд літератури.

Після робіт Л. Манна і О.О. Гвоздьова метод переміщень розвивався в наступних напрямках:

- був детальніше проаналізований зв’язок методу сил і методу переміщень, в 1934 р. Г. Крук [Kruck, 1934] запропонував варіант методу зі складною основною системою, коли в якості «будівельного матеріалу» використовувалися не окремі стержні, а стержневі підсистеми, тобто по суті, були закладені ідейні підвалини методу суперелементів;
- двоїста природа основних методів будівельної механіки вивчалася в роботах П.Л. Пастернака [Pasternak, 1922] і А. Хертвіга [Hertwig, 1933], а А. Шлеуснер аналізував їх зв’язок з варіаційними підходами [Schleusner, 1933];
- Е. Флігель розширив область застосування методу переміщень на задачі стійкості [Fliegel, 1938], а В. Колоушек — на задачі динаміки [Kolousek, 1941].

Помітною віхою в розвитку методу переміщень стала робота Ю.М. Ріппенбейна [Риппенбейн, 1933]. Вочевидь, він перший застосував метод переміщень до просторових стержневих систем. Пізніше в монографії Д.В. Вайнберга і В.Г. Чудновського [Вайнберг, Чудновский, 1948] просторова задача методу переміщень була представлена в тензорній формі, яка пізніше була успішно використана в теорії пружності і в теорії оболонок і послужила одним з шляхів інтеграції будівельної механіки і теорії суцільних середовищ.



Асгер Сковгаард Остенфельд, дат. Asger Skovgaard Ostenfeld (1866-1931)

Олексій Олексійович Гвоздьов, рос. Алексей Алексеевич Гвоздёв (1897–1986)

Людвіг Манн, нім. Ludwig Mann (1871-1959)

Август Хертвіг, нім. August Hertwig (1872-1955)

Наступним принциповим кроком в розвитку методу переміщень був перехід до матричного формулювання, розвинений в 50-х роках Дж. Аргіріс [Argyris, 1954, 1957], що по суті в подальшому зумовило перехід до методу скінченних елементів - безумовному переможцеві цієї історичної гонки.

Три найважливіші події наукової революції в будівельній механіці відбулися протягом XX ст. - матричне переформулювання алгебри обчислень в будівельній механіці [Argyris, 1954], винахід поняття «скінченний елемент» [Turner et al., 1956] і прямий метод жорсткостей, що представляє подальший розвиток методу переміщень [Turner, 1959]. Вони прорвалися через ланцюги класичних фундаментальних дисциплін технічних наук і радикальним способом змінили розрахункові технології у ряді нових галузей.

Євген Оскарович Патон (1870–1953)

Ісаак Мойсеєвич Рабінович, рос. Исаак Моисеевич Рабинович (1886–1977)

Володимир Колоушек, чеш. Vladimir Kloušek (1909-1976)

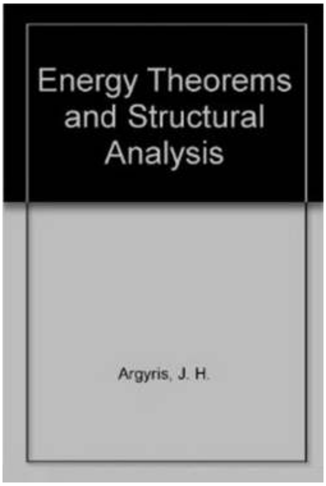
Давид Веніамінович Вайнберг (1905–1973)

В подальшому метод переміщень отримав всебічний розвиток. Були розвинені поняття про прості і групові реакції, спричинені пружними переміщеннями, температурою і навантаженням, і виведені формули для них; представлені в канонічній формі і в розгорнутому вигляді рівняння цього методу; розроблені способи спрощення рівнянь і використання симетрії. Розроблений комбінований спосіб розрахунку рам. О.О. Гвоздьов запропонував змішаний метод, що є синтезом методу сил і методу переміщень. Метод переміщень отримав закінчену форму класичного методу. У його розробці брали участь О.О. Гвоздьов, П.Л. Пастернак, В.Н. Жемочкін, М.І. Безухов, І.М. Рабінович, А.В. Рабцевич та інші.

13.3. Матричне формулювання. Аргіріс

Розробка методу переміщень та пов'язане з цим виявлення двоїстої природи теорії споруд забезпечило найпотужніше просування знань у цій фундаментальній будівельній теоретичній дисципліні під час її консолідації. Загальна теорема роботи (рівність робіт зовнішніх і внутрішніх сил), яку з успіхом застосовував О. Мор починаючи з 1874 р. для розкісних систем, має двоїсту структуру: принцип можливих змін напруженого стану (основа методу сил) і принцип можливих переміщень (основа методу переміщень, рис. 13.4) [Kurrer, 2008].

Рис. 13.4



Дж. Аргіріс.
Енергетичні теореми і розрахунок конструкцій (1960)

У теорії статично невизначуваних систем і практиці розрахунку конструкцій метод сил, що базується на принципі можливих змін напруженого стану, швидко став домінувати в прямій або опосередкованій формі теорем Кастільяно (друга теорема Кастільяно). Це було зумовлено загальною тенденцією до формалізації аналізу споруд, яка знайшла своє втілення у δ-символах. Хоча О. Мор і його студент Роберт Ланд визнавали фундаментальну роль принципу можливих переміщень, цей метод залишався на другому плані. Одна з причин полягала, звісно, в тому, що формулюванням на основі умов рівноваги надавали перевагу, як більш знайомим для інженерів. Тим не менш, δ – символи, близько зв'язані з методом сил, передбачили метод переміщень в формальних термінах і сприяли його висуненню на передній план.

Зауважимо, що метод переміщень, іноді згадується як рівняння пружності 2 типу. Л. Манн вперше використав принцип можливих переміщень для визначення зусиль у в'язях. Формальний розвиток методу переміщень йшов за методом сил. Двоїста природа стала очевидною вже в 1902 р., коли вийшла вже згадувана книга В.Л. Кирпичова «Лишние неизвестные в строительной механике». У ній В.Л. Кирпичов розвивав теоретичні основи як методу сил, так і методу переміщень. Друге видання цієї зовні невибагливої, але дуже змістовної роботи вийшло через 21 рік після смерті її автора.

На жаль, книга В.Л. Кирпичова так і не вийшла ані англійською, ані французькою, ані німецькою мовами. На заході вона була проігнорована внаслідок незнання російської мови. Тільки після запуску першого штучного супутника (1957) почалося поступове визнання на заході наукового прогресу, досягнутого в Росії. Одним із прикладів цього визнання було видання книги І.М. Рабіновича «Строительная механика в СССР 1917–1957» англійською в перекладі Дж. Херрманна. У цій роботі І.М. Рабінович окрім іншого робить огляд найважливіших публікацій за 40 років по методу сил і методу переміщень. Видатною в цьому відношенні є монографія О.О. Гвоздьова, датована 1927 р., оскільки в ній вперше в російськомовній технічній літературі був в повному обсязі представлений метод переміщень.

До 1933 р. Я.М. Ріппенбейном була закладена основа тривимірного методу переміщень, який через три роки Б.М. Горбунов і Ю.В. Кротов представили за допомогою тензорної алгебри у формі «моторної символіки» Ріхарда фон Мізеса.

Слідуючи за поняттям «мотора», введеного Е. Штуді в 1903 р., математик Ріхард фон Мізес розвинув математичну допомогу механікам у формі «моторної символіки».

Штуді, Едуард (1862–1930) – німецький математик, геометр. Приймав участь у розвитку символічних позначень у теорії інваріантів.

Рі́хард Е́длер фон Мі́зес (1883–1953) – математик і механік австрійського походження. Народився у м. Лемберг, Австро-Угорщина (тепер Львів, Україна). Основні роботи присвячені аеродинаміці, прикладній механіці, механіці рідин, аеронавтиці, статистиці і теорії ймовірностей. Досліджував стійкість циліндричних оболонок, ввів «моторну символіку».

Продовження формалізації методу переміщень було зроблене Д.В. Вайнбергом і В.Г. Чудновським. У монографії, яка вийшла в 1948 р., було представлено тривимірний метод переміщень в тензорній формі. У цій роботі відображена також важливість обчислювальних аспектів теорії розрахунку споруд.

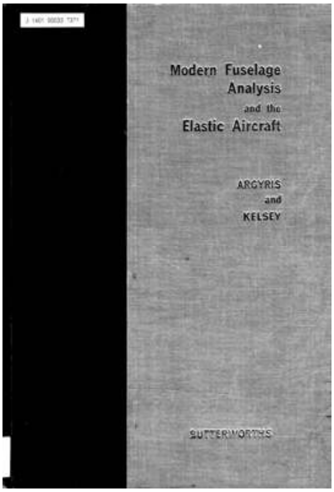
У 1938 р. вийшла робота Арно Шлеуснера, в якій за допомогою апарату варіаційного числення ясно показана концептуальна розбіжність між принципом можливих змін напруженого стану і принципом можливих переміщень при малих переміщеннях.

Роботи Г. Пранге (1919 р.) завершили перше використання формалізованої теорії в усій будівельній механіці на основі варіаційного числення. Друге застосування формалізованої теорії у механіці споруд було досягнуте Дж.Х. Аргірісом на основі матричної алгебри. Обидві теорії мають двоїсту природу. МСЕ – це сплав будівельної механіки і обчислювальної математики при переході від фази інновації до фази розповсюдження у середині 1970-х рр.

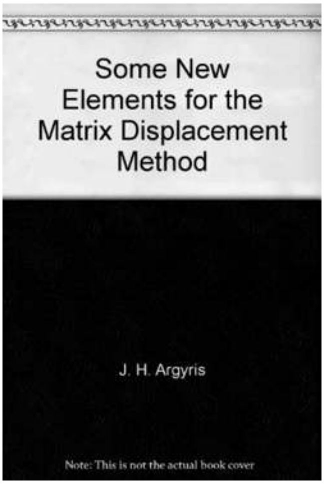
Зміст почуття Йогана Вольфганга фон Гете (1749-1832), яке він відчував по відношенню до Іммануїла Канта (1721-1804) і яке описане у розмові з молодим Артуром Шопенгауером (1788-1860), може бути застосований до обох робіт: «Коли я читав Канта, в мене було відчуття, наче я ступаю у виблискуючу кімнату». Дж. Аргіріс був прочитаний, а Г. Пранге значною мірою ні. Набагато пізніше у 1942 р. А. Шлеуснер, Маргуер, Хамель, Граммель, Клоттер запропонували видати кваліфікаційну роботу Г. Пранге, але зробити це не вдалося. І тільки у 1999 р. ця робота, що містила спробу обґрунтувати теорію пружності за допомогою варіаційних методів, була видана.

Перші ідеї використання матриць в аналізі споруд були виражені Едуардом Штуді ще в 1903 р.

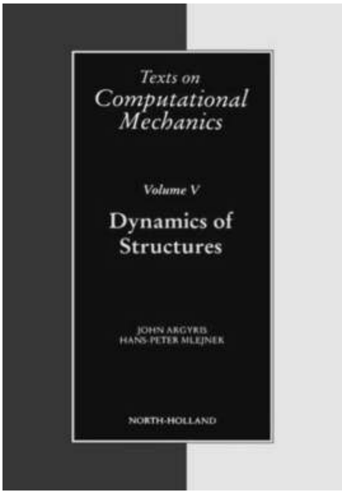
У 1957 р. Джон (Іоанніс) Хаджі Аргіріс представив матричне формулювання теорії статично невизначуваних систем і сформулював теорію розрахунку споруд в матричному вигляді. Описуючи спонукальні мотиви своєї роботи, Дж. Аргіріс відмічав, що жоден із звичайних статичних методів не може ефективно застосовуватися для визначення полів напружень і матриці податливості сильно статично невизначуваних систем сучасних авіаконструкцій. Подібні труднощі мають місце і в інших додатках статики. Корисними в деяких випадках можуть виявитися ітераційні методи, але в цілому вони занадто трудомісткі для розрахунку несучих авіаконструкцій мембранного і оболонкового типу. Здолати ці труднощі виявилося можливим за допомогою матричного формулювання статики, орієнтованого на використання комп'ютерної техніки.


Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft
ARGYRIS and KELSEY
BUTTERWORTHS

Сучасний розрахунок і пружність фюзеляжу літака. Дж. Аргіріс, С. Келсі (1963)


Some New Elements for the Matrix Displacement Method
J. H. Argyris
Note: This is not the actual book cover

Деякі нові елементи матричного методу переміщень. Дж. Аргіріс (1968)


Texts on Computational Mechanics
Volume V
Dynamics of Structures
JOHN ARGYRIS
HANS-PETER MLEJNEK
NORTH-HOLLAND

Динаміка конструкцій. Дж. Аргіріс, Х.-П. Млежнек (1991)

Матричне формулювання не лише дозволяє робити обчислення найбільш ясним способом, але є також ідеальною формою запису для цифрових комп'ютерів. Викладки матричної теорії настільки прозорі і зрозумілі, що нові, практично цінні співвідношення, котрі за звичайного запису були б неможливими і важко осяжними, тепер вдається отримати дуже легко.


Іоанніс (Джон) Хаджі Аргіріс, грецьк. Ιωάννης Αργύρης (1913–2004)


Борис Миколайович Горбунов (1901–1944)

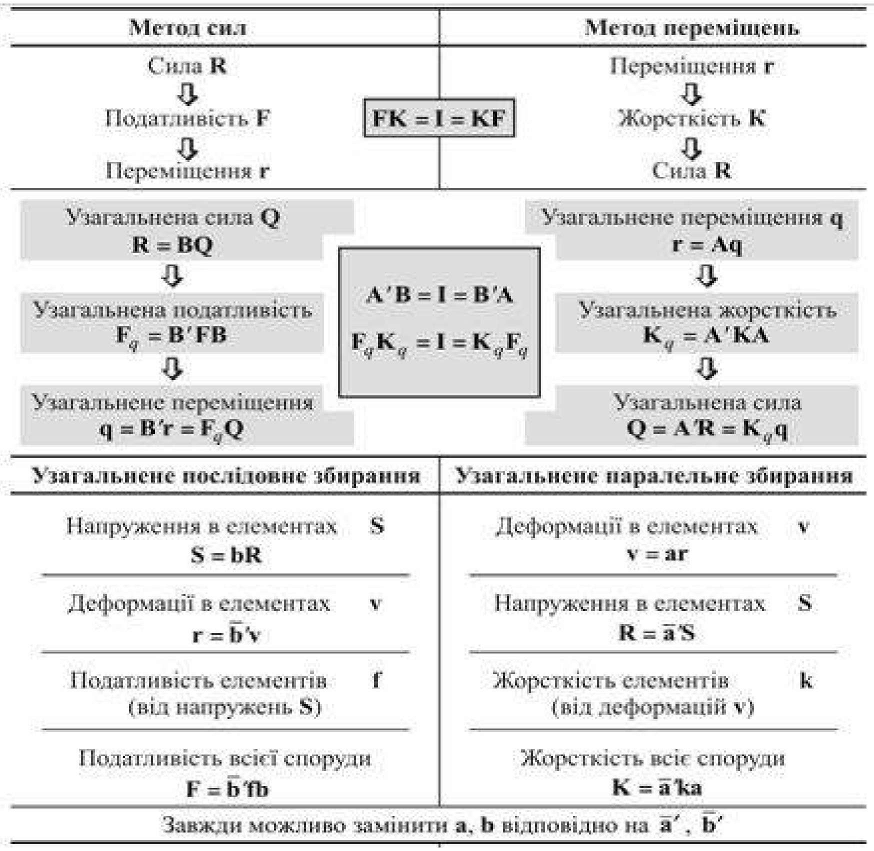

Ріхард Едлер фон Мізес, нім. Richard Edler von Mises (1883–1953)


Едуард Штуді, нім. Eduard Study (1862–1930)

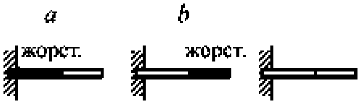
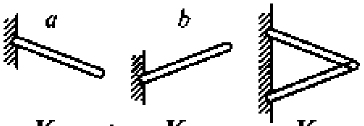
Для розрахунку конструкції тепер необхідні лише три основні прості матриці плюс вектор-стовпець навантаження. Крім того, аналіз в матричній формі дозволяє також впоратися з нелінійно-пружними і динамічними задачами. Дж. Аргіріс сформував словник практичних термінів:

Метод сил	↔	*Метод переміщень*
Сили	↔	Переміщення
Напруження	↔	Деформації
Внутрішні сили	↔	Переміщення вузлів
Податливість = Переміщення: Сила	↔	Жорсткість = Сила: Переміщення
Метод одиничного навантаження	↔	Метод одиничного переміщення
Статично визначувана система	↔	Кінематично визначувана система
Статично невизначувана система	↔	Кінематично невизначувана система
Матриця податливості	↔	Матриця жорсткості
Узагальнені сили	↔	Узагальнені переміщення
…	↔	…

Після цього йому вже неважко було показати в матричному формулюванні двоїсту природу теорії споруд:



Метод сил		**Метод переміщень**
Сила **R** ⇩ Податливість **F** ⇩ Переміщення **r**	$\boxed{\mathbf{FK} = \mathbf{I} = \mathbf{KF}}$	Переміщення **r** ⇩ Жорсткість **K** ⇩ Сила **R**
Узагальнена сила **Q** $\mathbf{R} = \mathbf{BQ}$ ⇩ Узагальнена податливість $\mathbf{F}_q = \mathbf{B}'\mathbf{FB}$ ⇩ Узагальнене переміщення $\mathbf{q} = \mathbf{B}'\mathbf{r} = \mathbf{F}_q\mathbf{Q}$	$\mathbf{A}'\mathbf{B} = \mathbf{I} = \mathbf{B}'\mathbf{A}$ $\mathbf{F}_q\mathbf{K}_q = \mathbf{I} = \mathbf{K}_q\mathbf{F}_q$	Узагальнене переміщення **q** $\mathbf{r} = \mathbf{Aq}$ ⇩ Узагальнена жорсткість $\mathbf{K}_q = \mathbf{A}'\mathbf{KA}$ ⇩ Узагальнена сила $\mathbf{Q} = \mathbf{A}'\mathbf{R} = \mathbf{K}_q\mathbf{q}$
Узагальнене послідовне збирання		**Узагальнене паралельне збирання**
Напруження в елементах **S** $\mathbf{S} = \mathbf{bR}$		Деформації в елементах **v** $\mathbf{v} = \mathbf{ar}$
Деформації в елементах **v** $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{b}}'\mathbf{v}$		Напруження в елементах **S** $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{a}}'\mathbf{S}$
Податливість елементів **f** (від напружень **S**)		Жорсткість елементів **k** (від деформацій **v**)
Податливість всієї споруди $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{b}}'\mathbf{fb}$		Жорсткість всіє споруди $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{a}}'\mathbf{ka}$
Завжди можливо замінити **a**, **b** відповідно на $\bar{\mathbf{a}}'$, $\bar{\mathbf{b}}'$		

Додавання податливостей **(Спеціальне послідовне збирання)**	**Додавання жорсткостей** **(Спеціальне паралельне збирання)**
 $\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = \mathbf{F}$	 $\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b = \mathbf{K}$

Дж. Аргіріс таким чином досяг успіху в перетворенні аналізу споруд у закінчену формалізовану теорію; він підвів підсумки серії своїх піонерних статей в 1960 р. в спільній з С. Келсі монографії «Енергетичні теореми і розрахунок конструкцій» [Argyris, Kelsey, 1960]. Описуючи історію створення методу скінченних елементів, Р.В. Клаф дуже справедливо оцінив цю монографію як найбільш важливу роботу, коли-небудь написану по теорії аналізу споруд (див. есе Дж. Аргіріса «Комп’ютер формує теорію» [Argyris, 1965]).

Отже, підсумовуючи і певною мірою повторюючи вищесказане, можна простежити послідовність математичних відкриттів, які є основоположними для розвитку загальних засад будівельної механіки, хоча і мають інколи досить абстрактний характер.

На перше місце, мабуть, слід поставити теорему Ейлера про однорідні функції, з якою за певних умов виявляється тісно пов’язаним перетворення Лежандра. Далі, цілком формальне диференціювання рівності, що виражає перетворення Лежандра, приводить до виразів, які у випадку, коли мова йде про однорідні функції другого ступеня, можна тлумачити як теореми Лагранжа і Кастільяно. Коли йдеться про однорідні функції інших ступенів, то диференціювання перетворення Лежандра дає вирази теорем Лагранжа і Енгессера-Кротті. В обох випадках згаданим функціям в механіці відповідають потенціальна енергія і доповнювальна потенціальна енергія.

Зазначимо, що в лінійно деформівному тілі між роботою зовнішніх сил і накопиченою енергією пружної деформації існує залежність, яку встановлює теорема Клапейрона. З теореми Клапейрона неважко отримати такі загальні теореми будівельної механіки, як теорема Бетті про взаємність робіт, теорема Максвелла про взаємність переміщень, теорема Релея про взаємність реакцій тощо.

Теорема Ейлера	
Перетворення Лежандра	
Теореми Лагранжа, Кастільяно, Енгессера-Кротті	
Потенціальна енергія деформації	Доповнювальна потенціальна енергія
Теорема Клапейрона	
Принципи	
Лагранжа	Кастільяно
Метод переміщень	Метод сил

Коли деформування підпорядковане більш складному закону, необхідно чітко розмежовувати потенціальну енергію деформації і доповнювальну потенціальну енергію, запис суми яких в розгорнутому вигляді також можна тлумачити як перетворення Лежандра. Відповідні екстремальні задачі, які фігурують в цьому перетворенні, дають двоїсті принципи – принцип Лагранжа і принцип Кастільяно.

Насамкінець відмітимо безпосередній зв'язок між теоремою Лагранжа і методом переміщень та теоремою Кастільяно і методом сил.

Література

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. - Красноярск, 1973. – 190 с.
2. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М., 1978. – 287с.
3. *Абрикосов А.А.* Академик Л.Д. Ландау: краткая биография и обзор научных работ. — М.: Наука, 1965. — 46 с.
4. *Александров А.В.* Метод перемещений для расчета плитно-балочных конструкций // Труды МИИТ. 1963. вып. 174.
5. *Александров А.В., Шапошников Н.Н.* Об использовании дискретной модели при расчете пластинок с применением цифровых автоматических машин // Труды МИИТ. вып. 194. - М.: МИИТ, 1966.
6. *Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А.* Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭЦВМ. — М.: Стройиздат, 1976. —ч.1, 248 с., ч.2, 238 с.
7. *Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.:Стройиздат, 1983.
8. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности. – М., 1990.
9. *Александров А.М.* Расчет пологих оболочек вращения методом прямых. // Строительная механика и расчет сооружений. №1.1968. - С. 11-14.
10. *Александров П.С.* (ред.) Проблемы Гильберта. - М.: Наука, 1969. - 240 с.
11. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М., 1979.
12. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1/2. - М.: Мир, 1990.
13. *Андронов А.А.* Иван Алексеевич Вышнеградский // Люди русской науки. Т. II - М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. - С. 931-941.
14. *Аппель П.* Руководство теоретической (рациональной) механики, том 1. – М., 1911.
15. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. I. Перевод с 5-го французского издания И.Г. Малкина. – М.: Физматгиз, 1960.
16. *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. - СПб., Т. I, 1859. - 639 с., Т. II, 1860. - 338 с., Т.III, 1861. - 233 с.
17. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук - первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов - М.: Наука, 1989. - 96 с.
18. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989.
19. *Асмус В.Ф.* Декарт. - М.: Высшая школа, 2006. - 335 с.
20. *Ахиезер Н.И.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. - 248 с.
21. *Бабенко А.Є., Бобир М.І., Бойко С.Л., Боронко О.О.* Теорія пружності. Ч.1. – К.: «Основа», 2009. – 244 с.
22. *Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И.* Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. – К.: Высшая школа, 1989. – 399 с.
23. *Баженов В.А.* Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. - К.: Каравела, 2014. – 877 с.
24. *Баженов В.А., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В.* Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії - К.: Каравела, 2016. - 428 с.

25. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов — М.: Физматлит, 2008 — 352 с.
26. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы – М.: Мир, 1982. – 584 с.
27. *Базаров И.П.* Термодинамика. – С.-П., Лань, 2010. – 377 с. Стр 175
28. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. – М.: Наука, 1986. – 298с.
29. *Баничук Н.В., Ишлинский А.Ю.* Исследования Л. Эйлера по механике деформирования твердого тела и их дальнейшее развитие // Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1986. —. С. 150 — 177.
30. *Башинский Н.Н.* Новый метод расчета балок и жестких рамных систем. - Киев, 1913; 2-е изд., М., 1930.
31. *Безухов Н.И.* Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Госстройиздат, 1965. – 320 с.
32. *Безухов Н.И., Лужин О.В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
33. *Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В.* Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987. – 263 с.
34. *Белелюбский Н.А.* Курс строительной механики. Вып. 1. Ч. 1: Теория сопротивления материалов. — 228 с. Ч. 2. Устойчивость сооружений. — 102 с. Прибавления к курсу строительной механики. — 40 с. СПб., 1885.
35. *Белелюбский Н.А.* Iohann Bauschinger. Биографические очерки. — С.-Пб.: издание Собрания инженеров путей сообщения, 1894. — 9 с.
36. *Беленький И.М.* Введение в аналитическую механику. – М., 1964. – 324 с.
37. *Белзецкий С.И.* Теория ферм, Известия С.-Петербургского политехнического института, т. XI и XII. 1909.
38. *Белкин В.П.* Знаменитый кораблестроитель и выдающийся ученый И.Г. Бубнов. // Проблемы строительной механики корабля: К столетию со дня рождения И.Г. Бубнова. — Л.: Судостроение, 1973. - С. 3 - 27.
39. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч. I. Малые деформации — 596с. Ч. II. — Конечные деформации. — 431 с. — М.: Наука, 1984.
40. *Белл Э.Т.* Творцы математики. — М.: Просвещение, 1979. — 256 с
41. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. - М.: Наука, 1984.
42. *Белоцерковский О.М.* Вычислительная механика. Современные проблемы и результаты. - М.: Наука, 1994.
43. *Белхост Б.* Огюстен Коши. — М.: Наука, 1997. — 174 с. — ISBN 5-02-014723-0.
44. *Белькинд Л.Д.* Андре-Мари Ампер. М.: Наука, 1968.
45. *Беляев Н.М.* Дмитрий Иванович Журавский. // Люди русской науки. — М.: ОГИЗ ГИТТЛ, Т. II, 1948. — С. 906 — 913.
46. *Бердичевский В.Л., Мисюра В.А.* О двойственном вариационном принципе в геометрически нелинейной теории упругости. – ПММ, 1979, т. 43, вып. 2.
47. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. - 448 с.
48. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 2005, ISBN 978-5-9221-0576-7.

49. *Бермант.* Курс математического анализа. Т II, изд. 8-е. – Гостехиздат, 1956. – 358 с.
50. *Бернулли И.* Избранные сочинения по механике. Под ред. и с примечаниями В.П. Егоршина. – М.-Л., 1937.
51. *Бернштейн С.А.* Очерки по истории строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.
52. *Бернштейн М.С.* Расчет конструкций с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1947. – 448 с.
53. *Бессараб М.Я.* Ландау: Страницы жизни. — 2-е изд. — М.: Моск.рабочий, 1978. — 232 с.: ил. (1-е издание — 1971).
54. *Бехтерев П.* Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы, ч. I, изд. автора. 1925.
55. Биографический словарь деятелей естествознания и техники. — М.: Большая советская энциклопедия. Т.1, 1958 — 548 с. Т. II, 1959. — 467 с.
56. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. Пер. с англ. Солнцевой Ю.К. под редакцией Эльсгольца Л.Э. М.: ИЛ, 1950. – 347 с.
57. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. - 232 с.
58. *Бобынин В.В.* Огюстен Луи Коши // Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. Журнал чистой и прикладной математики, астрономии и физики, издаваемый В. В. Бобыниным, приват-доцентом императорского Московского университета, — 1887. — Том третий. Год третий, № 1, 1-я четверть года — С. 79 — 96, — № 2, 2-я четверть года. — С. 128 — 192.
59. *Боголюбов А.Н.* Математики и механики. Биографический справочник. – К.: Наук. думка, 1983. - 639 с.
60. *Боголюбов А.Н.* Геометрия и механика в творчестве Ж.В. Понселе // Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1986. - С. 178-191.
61. *Боголюбов А.Н.* Роберт Гук (1635-1703). – М.: Наука, 1987. – 240 с.
62. *Боголюбов А.Н.* Жан Виктор Понселе. - М.: Наука 1988. - 224 с.
63. *Боголюбов А.Н.* Огюстен Коши и его вклад в механику, и физику. Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1988 — С. 179 — 199.
64. *Боголюбов А.Н., Канделаки Т.Л.* Леонид Самуилович Лейбензон. 1879—1951. — М.: Наука, 1991. — 288 с.
65. *Богуславский Н.Б.* Пятидесятилетие инженерной и ученой деятельности Н.А. Белелюбского. // Известия Собрания инженеров путей сообщения, 1917, № 6, - с.8
66. *Борзов И.* Памяти Сен-Венана. — СПб.: 1888. — 19 с.
67. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Биографический словарь деятелей в области математики. — Киев: Радянська школа, 1979. — 607 с.
68. *Босаков С.В.* Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости. Учебное пособие. – Минск, 2000. – 142с.
69. *Босс В*. Интуиция и математика. - М.:Айрис-пресс, 2003. - 192 с.
70. *Бубнов И.Г.* Отзыв на работу С.П. Тимошенко, представленную на премию Д.И. Журавского. - С.-П.: изд-во Института инженеров путей сообщений, 1913.
71. *Бубнов И.Г.* Строительная механика корабля. — СПб.: Издание морского министерства, Ч. 1, 1912. — 330 с., Ч. 2, 1914. — 309 с.
72. *Бутенко Ю.И. и др.* Строительная механика. – К.: Выща школа, 1989. - 367 с.

73. *Бюлер В.* Гаусс. Биографическое исследование. — М.: Наука, 1989. — 208 с. — ISBN 5-02-013919-Х.
74. *Вазари Дж.* Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих. - М.: Терра, 1993-1994.
75. *Вайнберг Д.В., Чудновский В.Г.* Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений — К.: Гостехиздат Украины, 1948.
76. *Вайнберг Д.В.* Напряженное состояние составных дисков и пластин. Ответственный редактор Белянский Ф.П. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – 420 с.
77. *Вайнберг Д.В., Синявский А.Л.* Расчет оболочек. – К.: Госстройиздат УССР, 1961.
78. *Вайнберг Д.В., Геращенко В.М., Ройтфарб И.З., Синявский А.Л.* Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом. В сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 1. – К.: Будівельник, 1965. - С. 23-32.
79. Вайнберг Д.В., Ворошко П.П., Синявский А.Л. Численное решение пространственной задачи теории упругости // Расчет пространственных конструкций. Выпуск XII — М.: Стройиздат, 1969 — С. 4-26.
80. *Вайнберг Д.В., Сахаров А.С. Киричевский В.В.* Вывод матрицы жёсткостных характеристик дискретного элемента произвольной формы // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1971. Вып. 14. - С. 37-44.
81. *Вайнберг М.М., Треногий В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.:Наука, 1969. – 527 с.
82. *Вакуленко А.А., Михайлов Г.К.* Клиффорд Трусделл и современная история механики. Вопросы истории естествознания и техники, 2000, № 3.
83. *Валле-Пуссен.* Курс анализа бесконечно малых. - ОНТИ, 1933.
84. *Варвак П.М.* Развитие и приложением метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной т еории упругости в конечных разностях — Киев: Изд-во АН УССР, 1949 (ч. 1), 1952 (ч. 2)
85. *Варвак П.М.* Новые методы решения задач сопротивления материалов. – К., 1977. – 160 с.
86. *Варвак П.М., Варвак Л.П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М., 1977. - 154 с.
87. *Варвак П.М. и др.* Метод конечных элементов. – К., 1981. – 438 с.
88. Вариационные принципы механики: Сб. статей / Под ред. Л.С. Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.
89. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. - 542 с.
90. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
91. *Веселовский И.Н.* Очерки по истории теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1974.
92. *Виппер Ю.Ф.* Семейство математиков Бернулли. - М., 1875.
93. *Власов В.З.* Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность, 1932, № 11. – С. 33–37; № 12. – С. 21–26.
94. *Власов В.З.* Применение метода начальных функций к расчету толстых плит. // Сб. «Исследования по теории сооружений». 1961. Вып. 10. - С. 189-207.
95. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и её приложение в технике. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 784 с.

96. *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. - М.: Физматгиз, 1959. - 568 с.
97. *Власов В.З., ЛеонтьевН.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ГИТТЛ, 1960. – 491 с.
98. *Вовкушевский А.В.* О решении уравнений метода конечних элементов в задачах теории упругости // Известия ВНИИГ им. Веленеева. т. 1 10, 1976.
99. *Вовкушевский А.В.* О вычислении напряжений при решении задач теории упругости методом конечных элементов // Известия ВНИИГ.- Т. 133. - Л.: Энергия, 1979. - С. 18-22.
100. *Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. – М.: Энергия, 1981. – 136 с.
101. *Вольмир А.С.* Очерк жизни и деятельности И. Г. Бубнова // И. Г Бубнов. Труды по теории пластин. — М.: Гостехиздат, 1953. — С. 309 — 373.
102. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
103. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
104. *Воронина М.М.* Габриэль Ламе. — Л.: Наука, 1987. — 197 с.
105. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Лаплас. — М.: Наука, 1985. — 288 с.
106. Воспоминания о П.Ф. Папковиче. — Л.: Наука, 1984. — 277 с.
107. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. 8-е изд. – М.: Наука, 1966. – 872 с.
108. *Галеркин Б.Г.* Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин // Вестник инженеров, 1915, №19 — С. 897-908.
109. *Галёркин Б.Г.* Тонкие плиты. – 1933. - 371 с.
110. *Галеркин Б.Г.* Биографический очерк // Б. Г. Галеркин. Собрание сочинений. Т. I. — М.: Издательство Академии наук СССР. -1952 г. — С. 5 — 8.
111. *Галилео Галилей.* Сочинения, т. I, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Русский перевод С.Н. Долгова. Серия «Классики естествознания». - М.-Л.: Гос. тех.-теор. изд., 1934. – 695 с.
112. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Казань: КГУ, 1975. – 325 с.
113. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М., 1966. - 300 с.
114. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М., 1967. - 576 с.
115. *Гаусс К.Ф.* (1952) Избранные труды по земному магнетизму.(М., Изд-во АН СССР).
116. *Гвоздев А.А.* Общий метод расчета статически неопределимых систем. Теория и примеры ее применения к расчету рамных конструкций — М.: МИИТ, 1927.
117. *Гвоздев А.А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. – М.: Стройиздат, 1949. - 280 с.
118. *Геккелер И.В.* Статика упругого тела. – 1934. - 287 с.
119. *Гельфанд И.М., Фомин СВ.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
120. *Гербель Н.* Д.И. Журавский // Гимназия высших наук и лицей князя Безбородко. — СПб.: 1881. — С. 390 — 398.
121. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: АН СССР, 1959. – 386 с.
122. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. — издание третье, расширенное. — М.: МЦНМО, 2001. — 465 с.
123. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
124. *Гнеденко Б.В.* Михаил Васильевич Остроградский. – М.: ГИТТЛ, 1952.

125. *Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б.* Михаил Васильевич Остроградский. 1801—1961. - М.: изд-во АН СССР, 1963.
126. *Голубев В.В.* Николай Егорович Жуковский. Биографический очерк // Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений. Т. I. — М. — Л. ОНТИ НКТП СССР, 1937. — С. 45 - 55.
127. *Голдстейн Г.*«Классическая механика». - М.: Гостехиздат, 1957.
128. *Гольденблат И.И.* Экстремальные и вариационные принципы в теории сооружений "Строительная механика в СССР" (1917-1957). – М.: Гостехиздат, 1957. - 300 с.
129. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
130. *Гольдштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 350 с.
131. *Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А.* Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та,1980. – 208 с.
132. *Городецкий А.С., Гильман Г.Б.* О стержневых расчетных схемах тонкостенных железобетонных конструкций //Строительство и архитектура. 1964. №10.
133. *Григолюк Э.И.* С.П. Тимошенко и его работы в области устойчивости деформируемых систем // С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 731 — 800.
134. *Григолюк Э.И.* С.П. Тимошенко и его труды по проблемам механики твердого деформируемого тела и расчету инженерных сооружений. // С. П. Тимошенко. Статические и динамические проблемы теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1975. — С. 515 — 558.
135. *Григолюк Э.И.* Степан Прокофьевич Тимошенко (1878 — 1972). // МГУ. Институт механики. Научные труды № 47. — М.: Издательств Московского университета, 1977. — 59 с.
136. *Григолюк Э.И.* Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. – М., 1996. – 58 с.
137. *ГриголюкЭ.И.* С.П. Тимошенко. Жизнь и судьба. – М.: изд. МАИ, 2002. - 402 с.
138. *Григорьян А.Т.* Очерки истории механики в России. — М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. — 291 с.
139. *Григорьян А.Т.* Михаил Васильевич Остроградский. - М.: изд-во АН СССР, 1964.
140. *Григорьян А.Т., Розенфельд Б.А.* Теория винтов и неэвклидова механика. История механики с конца XVIII века до середины XX века. – М.: Наука, 1972. – с. 343.
141. *Григорьян А.Т.* Механика от античности до наших дней. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
142. *Григорьян А.Т.* Очерк развития механики в СССР. — М.: Русский язык, 1979. — 277 с.
143. *Григорьян А.Т., Ковалев Б.Д.* Даниил Бернулли. — М.: Наука 1981. — 318 с.
144. *Григорьян А.Т., Фрадлин Б.Н.* История механики твердого тела. — М.: Наука, 1982. — 293 с.
145. *Гришкова Н.П., Георгиевская В.В.* Александр Николаевич Динник. — Киев: Издательство АН УССР, 1956. — 51 с.
146. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Перший директор інституту механіки ім. С.П. Тимошенка Національної Академії наук України///Прикладна механіка. — 1998, 34, №10.
147. *Гуковский М.А.* Механика Леонардо да Винчи. — М.; Л.: Издательство Академии наук СССР, 1947. — 815 с.
148. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем, – Львів: Вища школа, 1982 -255 с.

149. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л.* Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. – М.: Высшая школа, 1989. - 378 с.
150. *Гуляев В.И., Гоцуляк Е.А., Денхтярюк Е.С., Лизунов П.П.* Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. – Львів: Вища школа, 1983. – 288 с.
151. *Гюйгенс X.* Трактат о свете. Пер. рос. під ред. В. Фредерікса, ГТТИ, М.-Л., 1935.
152. *Д'Аламбер Ж..* Динамика. – М.: Гостехиздат, 1950.
153. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986. - 607 с.
154. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1953. т. 88. №4 С. 601-602.
155. *Декарт Р.* Геометрия. З додатком вибраних робіт П. Ферма і листування Декарта. − М.−Л.: ГОНТИ, 1938.
156. *Дельвиг А.И.* Мои воспоминания. Т. I, 1813 — 1842 гг. — СПб.: 1913. — С. 129 — 131.
157. *Демьянов В.П.* Рыцарь точного знания (П. Л. Чебышёв). — М. : Знание, 1991. — 192 с. — (Творцы науки и техники). — ISBN 5-07-000060-8.
158. *Джанелидзе Г.Ю.* Принцип Сен-Венана (К столетию принципа). // Труды Ленинградского политехнического института им М. И. Калинина. — 1958. — № 192. — С. 7 — 20.
159. *Джанелидзе Г.Ю.* Жизнь и научная деятельность Б. Сен-Венана // Б. Сен-Венан. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 9 — 14.
160. *Длугач М.И.* Розрахункова модель методу сіток // Прикладна мехашка, 1956. Т. II. Вып. 3.
161. *Длугач М.И.* Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости — Киев: Наукова думка, 1964
162. *Домбровская Е.А.* Николай Егорович Жуковский. 1847—1921 гг. Воспоминания и материалы к биографии. — М. — Л.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1939. — 247 с.
163. *Дорофеева А.В.* Развитие варационного исчисления, как исчисления вариаций. – «Историко-матем. иссл.», вып. XIV, М. – Физматгиз, 1961. – С. 101-181.
164. *Дорощук Г.П., Трач В.М.* Будівельна механіка з елементами інформаційних технологій/Підручник. – Рівне: НУВГП, 2005. - 566 с.
165. *Дорфман Я.Г.* Лавуазье. Серия: Современные проблемы физики. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 434 с.
166. *Дубяга К.М.* Расчеты и испытания раскосных ферм с жесткими соединениями в узлах. - Сп.-б., 1914.
167. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Мир, 1981. – 383 с.
168. *Дюэм П.* Развитие механики. 1903.
169. *Дятловицкий Л.И.* Напряжения в гравитационных плотинах на нескальных основаниях — Киев: Изд-во АН УССР, 1959.
170. *Евграфов Г.К.* Журавский Дмитрий Иванович (1821-1891) // Ученые и изобретатели железнодорожного транспорта. — М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство. Сборник статей, 1956. — С. 51 — 60.
171. *Евзеров И.Д.* Сходимость МКЭ в случае не принадлежащих энергетическому пространству базисных функций // Вычисления с разреженными матрицами. — Новосибирск: ВЦСО АН СССР. 198Г. —С. 54-61.

172. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 336 с.
173. *Жозеф Луи Лагранж.* Сборник статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: изд. АН СССР, 1937. - 140 с.
174. *Жуковский Н.Е.* Ученые труды М.В. Остроградского по механике. Собр. соч., т. VII/. – М.-Л., 1950.
175. *Журавский Д.И.* О мостах раскосной системы Гау. - Спб., 1855.
176. *Журавский Д.И.* П.И. Собко // Гимназия высших наук и лицей князя Безбородко. — С.-Пб.: 1881. — С. 457 — 460.
177. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Вариационное исчисление в целом. – М.: Иностранная литература, 1947. - 148 с.
178. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. - 541 с.
179. *Зилев В.Б.* Теоремы о взаимности в динамике конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – №5, 2006. – С. 10-15.
180. *Золотов А.Б., Белый М.В., Булгаков В.Е.* Полуитерационный метод решения пространственных краевых задач расчета сооружений. // Строительная механика и расчет сооружений. 1985, №6 — С. 38-40.
181. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики — М.: Изд-во АСВ. 2004. — 200 с.
182. *Зубов Л.М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости. – ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
183. *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. — ПММ, 1971, т. 35.
184. *Идельсон Н.И.* О механике Лагранжа. В сб. «Жозеф Луи Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л. Изд-во АН СССР, 1937. с.45.
185. *Идельсон Н.И.* Этюды по истории небесной механики. – М., Наука, 1975.
186. *Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М.* Численные методы решения задач строительной механики. – Минск, 1990. - 349 с.
187. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: изд. АН СССР, 1963. - 271 с.
188. Институт механики АН УССР. – К.: Наукова думка, 1978.
189. Институт механики им. С.П. Тимошенко. – К.: А.С.К., 1998.
190. *Иоффе А.Л., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
191. *Исаханов Г.В., Гранат С.Я., Мельниченко Г.И., Шишов О.В.* Строительная механика. Расчет стержневых систем на ЭВМ.- К.: Вища школа, 1990. - 230 с.
192. История механики с древнейших времен до конца XVIII века. / Под редакцией *А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского.* – М.: Наука, 1971. – 298 с.
193. История механики с конца XVIII века до середины XX века. / Под редакцией *А.Т. Григорьяна, И.Б. Погребысского.* – М.: Наука, 1972. – 414 с.
194. *Ишлинский А.Ю.* О вкладе В.Г. Шухова в проектирование и расчет строительных конструкций // В. Г. Шухов, Избранные труды. Строительная механика. — М.: Наука, 1977. — С. 4-9.
195. *Ишлинский А.Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. — М.: Наука, 1985. — 623 с.
196. Історія Академії наук України, 1918-1933. — Київ: Наукова думка, 1994.
197. *Калмыков П.В., Носов А.Н.* К 80-летию со дня рождения А.К. Верещагина // Строительная механика и расчет сооружений. — 1977. — № 2. — С. 58 — 59.

198. *Канторович Л.В.* Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. //ДАН СССР, 1934.
199. *Канторович Л.В. и Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л., 1962. - 708 с.
200. *Карно Л.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. - М.-Л.: Объединенное научно-техническое изд-во, 1936. - 328 с.
201. *Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD.– М.: Издательство АСВ, 2004.– 592 с. [2-е изд., исправленное и дополненное. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2007.– 600 с., 3-е изд., стереотипное. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2008, 600 с., 4-е изд., переработанное и дополненное. – М.: Издательство СКАД СОФТ, Изд-во АСВ, 2009 – 656 с.].
202. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1967. – 778 с.
203. *Качанов Л.М.* Вариационные принципы для упругопластических сред. – ПММ, т. 6, в. 2–3, 1942.
204. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 421 с.
205. *Келдыш М.В.* Леонид Самуилович Лейбензон // Л. С. Лейбензон. Собрание трудов. — М.: Издательство Академии наук СССР. — 1951. — Т. I. Теория упругости. — С. 5 — 7.
206. *Кеплер И.* Новая стереометрия винных бочек. – М.-Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1935.
207. *Кирпичев В.Л.* Иван Алексеевич Вышнеградский как профессор и ученый // Вестник общества технологов. — 1895. — № 6. — С. 95 — 100.
208. *Кирпичев В.Л.* Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. К.: Изд-во Кульженка, 1903.
209. *Кирпичев В.Л.* Харлампий Сергеевич Головин (некролог) // Инженерный журнал. — 1904. — № 4. — С. 1 — 13.
210. *Кирпичев В.Л.* Оптическое изучение упругих деформаций. — СПб.: 1913. — 96 с.
211. *Кирпичев В.Л.* Об усталости металлов в связи с их кристаллическим строением. // Вестник общества технологов. — 1914, — № 2. — С. 26-31.
212. *Кирпичев В.Л.* Собрание сочинений. Т. 1. Петроград, ППИ, 1917.
213. *Кирпичев В.Л.* Сопротивление материалов. Учение о прочности построек и машин. — М.: Государственное издательство, 1923. — 4.1. — 399 с. — Ч. II. — 497 с.
214. *Кирпичев В.Л.* Основания графической статики. — М.: ГТТИ, 1933. — 227 с.
215. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. – 2-е, посмертное. – М.: Гостехтеориздат, 1933. - 270 с.
216. *Кирпичев В.Л.* Лишние неизвестные в строительной механике. — М-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 140 с.
217. *Кирпичев В.Л.* Лишние неизвестные в строительной механике: расчет статически-неопределимых систем. – Москва, 1934.
218. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. ГИТТЛ, М, Л., 1951, 360 с.
219. *Кирхгоф Г.* Механика. – М.: АН СССР, 1962. – 402 с.
220. *Киселев В.А.* Строительная механика: Специальный курс. – М.:Стройиздат,1980. – 616 с.
221. *Киселев В.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1986. - 520 с.
222. *Кислоокий В.Н., Цыхановский В.К.* Нелинейное деформирование облегченных пространственных конструкций // Прикл. механика. – 1997. – Т.33, № 8. – С.49–56.
223. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М., Мир, 1965.

224. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.
225. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 432 с.
226. *Кліменко В.З.* Розв'язання невидимого конфлікту в будівельних конструкціях. Від інтуїтивного і умоглядного до наукового підходу. Навчальний посібник. - К.: Видавництво «Сталь», 2006. - 108 с.
227. *Кляус Е.М.* Джемс Клерк Максвелл // Джемс Клерк Максвелл. Статьи и речи. — М.: Наука, 1968. — С. 339 — 368.
228. *Коваленко О.Ф.* Вариационные принципы механики для систем с односторонними связями // Исследования по строит. конструкциям. – Томск, 1972. – С. 132–143.
229. *Колосов Г.В.* О поверхностях, демонстрирующих распределение срезывающих усилий в точке сплошного деформируемого тела. // Прикладная математика и механика. — 1933. — Т. 1. — Вып. 1.
230. *Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П.* Прикладная механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 349 с.
231. *Копелевич Ю.Х., Ожигова Е.П.* Научные академии стран Западной Европы и Северной Америки. — Л.: Наука, 1989. — 413 с.
232. Коперник. Галилей. Кеплер. Лаплас и Эйлер. Кетле: Биографические повествования / Сост. *Н.Ф. Болдырева.* — Челябинск: Урал, 1997. — 452 с. — (Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека Ф. Павленкова). — ISBN 5-88294-071-0.
233. *Копысов С.П.* Методы декомпозиции и параллельные схемы метода конечных элементов. Препринт ИПМ УрОРАН. Ижевск, 1999.
234. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1979.
235. *Коренев Б.Г.* Приложение функций Грина к расчёту конструкций на упругом основании методом компенсирующих нагрузок. // Труды Днепропетровского. инженерно-строительного института. — Днепропетровск, 1936, вып.4.
236. *Коренев Б.Г.* Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам равновесия, колебаний и устойчивости плит и мембран // Прикладная математика и механика, 1940, т.4, вып. 5-6 С. 61-72.
237. *Корнеев В.Г.* Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости // Известия ВНИИГ.-Т. 83.-Л.. 1967.-С. 286-307.
238. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л.: Изд-во Ленинградского Университета. 1977.— 205с.
239. *Космодемьянский А.А.* Николай Егорович Жуковский. 1847. - 1921. - М.: Наука, 1984. — 192 с.
240. *Космодемьянский А.А.* Очерки по истории механики. – М.: Наука, 1982. – 295 с.
241. *Котек В.В.* Леонард Эйлер. — М.: Учпедгиз, 1961. — 106 с.
242. *Котельников С.* Книга, содержащая в себе учение о равновесии и движении тел. — СПб.: 1774.
243. *Кравчук А.С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика.– 1978.– Т. 42, вып. 3.– С. 466–474.
244. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям (диакоптика)— М.: Наука. 1972. — 544 с.
245. *Кропотов А.М., Марон И.А.* М.В. Остроградский и ега педагогическое наследие. - М.: Учпедгиз, 1961.

246. *Крылов А.Н.* Леонард Эйлер // Леонард Эйлер. 1707 — 1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М.-Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 1 — 28.
247. *Крылов А.Н.* Жозеф Луи Лагранж. - В сб.: Ж.Л. Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1937.
248. *Крылов А.Н.* Ньютон и его значение в мировой науке (1643 – 1943). – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. – 40 с.
249. *Крылов А.Н.* Мои воспоминания. — Л.: Судостроение, 1984. — С. 332.
250. *Кудрявцев П.С.* Исаак Ньютон, 1643—1943: к 300-летию со дня рождения / А. Тимирязев. — Учпедгиз, 1943. — 143 с.
251. *Кудрявцев П.С.* История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1948. — Т. 1. От античной физики до Менделеева.
252. *Кудрявцев П.С.* История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1955. — Т. 2. От Менделеева до открытия квант (1870—1900).
253. *Кудрявцев П.С.* Исаак Ньютон. — Учпедгиз, 1955. — 124 с.
254. *Кудрявцев П.С.* Эвангелиста Торричелли: к 350-летию со дня рождения. — Знание, 1958. — 22 с.
255. *Кудрявцев П.С.* История физики. — Гос. учебно-педагог. изд-во, 1971. — Т. 3. От открытия квант до создания квантовой механики (1900—1925).
256. *Кудрявцев П.С.* Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.
257. *Кузнецов Б.Г.* Эйнштейн. — М.: Издательство Академии наук СССР. 1963. — С. 188.
258. *Кузнецов Б.Г.* Галилей. — М.: Наука, 1964. — 326 с.
259. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2008.
260. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. – М., 1951.– 476 с.
261. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2 – ОГИЗ, Гостехиздат, 1945. – 619 с.
262. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? - М.: Просвещение, 1967. - 558 с.
263. *Лаврентьев М. и Люстерник Л.* Основы вариационного исчисления. Т. 1, ч. II. – М.-Л.: ОНТИ, НКТП, 1935. – 399 с.
264. *Лаврентьєв М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. Издание 2-е переработанное. – М.: Гостехиздат, 1950. - 296 с.
265. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, том 1. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 594 с.
266. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, том 2. — М.-Л., ГИТТЛ, 1950. — 440 с.
267. *Лазарев П.П.* Гельмгольц. М., 1959.- 103 с
268. *Лазарян В.А.* Энергия деформации и перемещения линейных систем. – К.: Наукова думка, 1972. – 139 с.
269. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1954. – 795 с.
270. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
271. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. Пер. с англ. В.Ф.Гантмахера. Под ред. Л.С.Полака. – М.: Мир. 1965. – 408 с.
272. *Ларман Э.К.* Аксель Вильгельмович Гадолин. — М.: Наука, 1969. — 80 с.
273. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики, ч. 1. – М.: ОНТИ, 1934.
274. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – Т.1, ч. 2. – М., 1962.
275. *Лейбензон Л.С.* Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1943. – 287 с.

276. *Лейбензон Л.С.* Элементы математической теории пластичности. - М.: Гостехиздат, 1943. -112 с.
277. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 464 с.
278. *Лейбниц Г.В.* Сочинения в 4-х т. Т. 1. - М.: 1982. - С. 235-284.
279. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
280. *Липилин В.* Алексей Николаевич Крылов. — М.: Молодая гвардия, 1983. — 223 с.
281. *Лопатто А.Э.* В.Г. Шухов — выдающийся русский инженер. — М.: Издательство Академии наук СССР, 1951. — 126 с.
282. *Лопиталь.* Анализ бесконечно малых. Серия «Классики естествознания, Гостехиздат, - М.-Л., ГТТИ, 1935.
283. *Лурье А.И.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. – 1950. - 432 с.
284. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824с.
285. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
286. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
287. *Лучининов С.* Великий кораблестроитель. — М.: Военно-морское издательство, 1951. — 96 с.
288. *Лысенко В.И.* Николай Иванович Фусс. 1755-1826. — М.: Наука, 1975. — 119 с.
289. *Любимов Ю.А.* Джордж Грин: жизненный путь и творчество (к 200-летию со дня рождения) // Успехи физических наук, 1994. Том 164, №1.
290. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
291. *Максвелл Д.К.* Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц. // Джемс Клерк Максвелл. Статьи и речи. — М.: Наука, 1968. — С. 174 — 181.
292. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
293. *Масленников А.М.* Приближенное решение плоской задачи теории упругости методом перемещений.//ЭЦВМ в строительной механике — Л.: Судпромгиз, 1966. — С. 183-195.
294. *Матвиевская Г.П.* Рене Декарт, 1596–1650. М.: Наука, 1976.
295. Математическая энциклопедия. Т. 1, М., 1977. Т. 2, М., 1979. Т. 3, М., 1982. Т. 4, М., 1984. Т. 5, М., 1985.
296. *Мах Э.* Механика. – С.-Пб., 1909. – 448 с.
297. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк её развития. - Ижевск: РХД, 2000. - 456 с.
298. Метод конечных элементов в механике твердых тел // А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др.— К.: Вища шк. Головное изд-во; Лейпциг: ФЕБ Фахбухферлаг, 1982.— 480 с.
299. *Митинский А.Н.* Жизнь и научно-инженерная деятельность Ф. С. Ясинского // Ф. С. Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. — М.: Гостехиздат, 1952. — С. 223 — 406.
300. *Митинский А.Н., Беляев А.Н., Кушелев Н.Ю., Саталкин А.В., Синицкий А.К.* Очерк о жизни деятельности Н.М. Беляева. // Н.М. Беляев. Труды по теории упругости и пластичности. — М.: Гостехиздат, 1957. — С. 465 — 604.
301. *Михлин С. Г.* Вариационные методы решения задач математической физики. УМН, 5:6(40), 1950. – С. 3–51.

302. *Михлин С.Г.* Прямые методы математической физики. – М.-Л.: ГТТИ, 1950. – 428 с.
303. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 250 с.
304. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966.– 432 с.
305. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
306. *Можаровський М.С.* Теорія пружності, пластичності і повзучості. – К.: Вища школа, 2002. - 310 с.
307. *Моисеев Н.Д.* Очерки по истории механики. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 478 с.
308. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
309. *Мор О.* Чем обусловлен предел упругости и временное сопротивление материала // Новые идеи в технике. — 1915. — № 1 — 50 с.
310. *Музыченко Ю.Н.* О стержневой модели метода сеток // Труды РИСИ. Строительные конструкции и строительная механика. Вып. XIX, — Ростов: 1961.
311. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек.– Казань: Таткнигоиздат, 1957.– 432 с.
312. *Мышкис А.А.* Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971.
313. Національна. Академія наук України. – К.: "Фенікс", 1998.
314. *Некрасов Н.В.* К теории ферм с жесткими соединениями в узлах. - Сп.-б., 1907.
315. *Никифорский В.А.* Великие математики Бернулли. — М.: Наука, 1984. — 176 с.
316. *Николаи Е.Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн // Е. Л. Николаи. Труды по механике. — М.: Гостехиздат, 1955. — С. 9 — 44.
317. *Николаи Е.Л.* О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Е.Л. Николаи. Труды по механике. - М.: Гостехиздат, 1955. - С. 433 - 454.
318. *Николаи Е.Л.* Труды по механике. – М., Гостехиздат, 1955.
319. *Николаи Л.Ф.* Определение усилий в безраскосных балочных фермах с жесткими узлами, Журнал Министерства путей сообщении, книги 2 и 3. 1904.
320. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
321. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 365 с.
322. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
323. *Нудельман Я.Л.* Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, 1949.
324. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. рос. з лат. А.Н. Крилова, т.7, Изд. АН СССР, М.-Л., 1936.
325. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М., 1985. - 392 с.
326. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван: Издательство АН Армянской ССР, 1979 — 235 с.
327. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир. 1976, 464 с.
328. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин, В. И. Феодосьев — М.: Машгиз. Т. I. 1950. — 703 с. Т. 2. 1952. — 862 с.
329. *Остроградський М.В.* Полное собрание трудов в двух томах. – К.: Изд-во АН УССР, 1959-1961.

330. *Остроградский М.В.* Избранные труды. – М.: АН СССР, 1968. – 583 с.
331. *Отрадных Ф.П.* Михаил Васильевич Остроградский. - Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1953.
332. *Павлова Г.Е., Фёдоров А.С.* Михаил Васильевич Ломоносов. М.: Наука, 1986.
333. *Панагиогопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
334. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1980. - 270 с.
335. *Пановко Я.Г.* Механика деформируемого твердого тела, Современные концепции, ошибки и парадоксы. — М.: Наука, 1985. — 287 с.
336. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. — М.: Наука, 1987. — 352 с.
337. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
338. *Патон Е.О.* Расчет сквозных ферм с жесткими узлами. - М. 1901. – 159 с.
339. *Патон Е.О.* Воспоминания. – К.: Гослитиздат Украины, 1955. - 324 с.
340. *Патон Е.О.* Воспоминания. — Киев: Державне видавництво художньоі литератури, 1956. — 320 с.
341. *Передерий Г.П.* К теории безраскосных ферм. - М. 1906.
342. *Перельмутер А.В.* Жили-были.— К.: Изд-во «Сталь», 2002.— 188 с. [2-е изд. исправленное и дополненное — К.: Изд-во «Сталь», 2004.— 192 с.]
343. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – К.: ВВП «Компас», 2001. – 446 с. [Изд. 2-е, переработанное и дополненное.– Киев: Изд-во «Сталь», 2002.– 615 с.; 3-е изд., иправленное и дополненное – М.: ДМК Пресс, 2007.– 600 с. (Серия «Проектирование»)].
344. *Перельмутер А.В.* Очерки по истории металлических конструкций.— М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2011.— 184 с.
345. *Перельмутер А.В.* Беседы о строительной механике. – М.: изд-во SCAD SOFT, АСВ, 2014. – 250 с.
346. *Перельмутер А.В.* К столетию метода перемещений. - International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 10(4) 18-21 (2014).
347. *Петров В.В.* К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Научные доклады высшей школы. Строительство, 1959, №1. - С. 27-35.
348. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек — Саратов: Изд-во сарат. ун-та. 1975. — 173 с.
349. *Петров Г.И.* Применение метода Галёркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // Прикладная математика и механика, 1940, Т. 4, Вып. 3 — С. 3—11
350. *Петрова С.С.* О принципе Дирихле // История и методология естественных наук. — М.: МГУ, 1966. — Вып. 5. — С. 200-218.
351. *Петропавловская И.А.* Владимир Григорьевич Шухов. (Краткий биографический очерк) // В. Г. Шухов. Избранные труды. Строительная механика. — М.: Наука, 1977. — С. 10-20.
352. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А.* Деформирование и прочность материала при сложном напряженном состоянии. — Киев: Наукова думка, 1976. — 415 с.
353. *Писаренко Г.С.* Степан Прокофьевич Тимошенко. – К.: Наукова думка, 1979. - 196 с.

354. *Писаренко Г.С.* Сергей Владимирович Серенсен // С. В. Серенсен. Избранные труды. Т. I. Прочность материалов и элементов конструкций при статическом нагружении. — Киев: Наукова думка, 1985. — С. 5-9.
355. *Писаренко Г.С.* Бібліографія вчених Української РСР. – К.: Наукова думка, 1990.
356. *Писаренко Г.С.* Степан Прокопович Тимошенко. - М.: Наука, 1991. - 239 с.
357. *Піскунов В.Г.* та інш. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. – К.: Вища школа, кн. 1, 1994. – 201 с., кн. 2, 1994. – 335 с., кн. 3, 1995. – 271 с., кн. 4, 1995. – 303 с., кн. 5, 1995. – 207 с.
358. *Плутарх.* Сравнительные жизнеописания, т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 391.
359. *Погребысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну: Классическая механика XIX века. — М.: Наука, 1964. — 327 с.
360. *Погребысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну.– М.: Наука, 1966.– 326 с.
361. *Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И.* Основы и методы прикладной теории упругости. М. 1981. – 328 с.
362. *Подольский И.С.* Безраскосные фермы. Их расчет и применение к металлическим и железобетонным конструкциям. - М. 1909.
363. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.
364. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. Изд. 2-е, испр. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. - 600 с.
365. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
366. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. - 384 с.
367. *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. — КомКнига, 2007. — 184 с. — ISBN 978-5-484-00775-2
368. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих деталей. — Л.: Издание ЛКВВИА, 1947. — 303 с.
369. *Попов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948. - 170 с.
370. *Попов Е.П.* Теория и расчёт гибких упругих стержней. – М. Наука, 1986. – 296 с.
371. *Постников М.* Теорема Ферма. - М., 1978.
372. *Постнов В.А., Тарануха Н.А.* Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1990. - 320 с.
373. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
374. *Потапов В.Д., Александров А.В., Косицын С.Б., Долотказин Д.Б.* Строительная механика: в 2 кн. Кн.1. Статика упругих систем. – М.: ФГУП “Издательство “Высшая школа”, 2007.
375. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред.– М.: изд. иностр. лит., 1963.– 340 с.
376. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 400 с.
377. *Предтеченский Е.А.* Кеплер, его жизнь и научная деятельность. – Петербург: изд-во З.И.Гржебина, 1921.
378. *Протасов К.Г.* Белелюбский Николай Аполлонович (1848-1922) // Ученые и изобретатели железнодорожного транспорта. — М.: Государственное транспортное железнодорожное издательство. Сборник статей. — 1956. — С. 61-90.
379. *Пригожин И., Дефэй Р.* Химическая термодинамика. – Новосибирск: Наука, 1981.

380. *Прудников В.Е.* М.В. Остроградский. — В кн.: Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. - М.: Учпедгиз, 1956.
381. *Прудников А.П., Бричко Ю.И., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981.
382. *Пуанкаре А.*. Наука и метод. – С.-Пб., 1910.
383. *Пуанкаре А.* Избранные труды: В 3 т.– М.: Наука, 1974.– 584 с.
384. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. – 561 с.
385. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. – 319 с.
386. *Рабинович И.М.* Применение теории конечных разностей к исследованию неразрезных балок —М.: Типо-Литография МГСНХ, 1921 — 96 с.
387. *Рабинович И.М.* Кинематический метод в строительной механике в связи с графической кинематикой и статикой плоских цепей. - М.: МВТУ, 1928. – 407 с.
388. *Рабинович И.М.* Методы расчета рам, ч. 1, 1934.
389. *Рабинович И.М.* Курс строительной механики стержневых систем. Т.1. Статически определимые системы, 1950. - 387 с. Т. 2. Статически неопределимые системы, 1954. - 544 с. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре.
390. *Рабинович И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями.– М.: Стройиздат, 1975.– 144 с.
391. *Рабинович И.М.* Воспоминания 1904-1974. - М.: Наука, 1984. — 158 с.
392. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1979. - 744 с.
393. *Работнов Ю.Н.* Основы механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979.– 744 с.
394. *Районов Т.И.* Роберт Гук и его трактат об экспериментальном методе // Научное наследство. — М. — Л.: Издательство Академии наук СССР, 1948. — Т. I. — С. 655-767.
395. *Ракчеев Е.Н.* Дмитрий Иванович Журавский. — М.: Наука, 1984. — 240 с.
396. *Ракчеев Е.Н.* Х.С. Головин // Известия Академии наук СССР: Отделение технических наук. — 1954. — № 3. — С. 146-149.
397. Расчет строительных конструкций с применением электронных машин — М.: Стройиздат, 1967—400 с.
398. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев. — М.: Машгиз, Т. I. 1956 — 884 с., Т. II 1958 — 1118 с. Т. III. 1959. — 974 с.
399. *Резников Р.А.* Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. — М.: Стройиздат, 1971. 312с.
400. *Рейсснер Э.* О некоторых вариационных теоремах теории упругости.– В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили). – М.: АН СССР, 1961.– С. 328-337.
401. *Рейтман М.И.* Залог прочности. – М.: Стройиздат, 1973. – 133 с.
402. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
403. *Ремез Е.Я.* О математических рукописях академика М.В. Остроградского.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. IV. - М.—Л., 1951.

404. *Ржаницын А.Р.* Представление сплошного изотропного упругого тела в виде шарнирно-стержневой системы // Исследования но строительной механике и теории пластичности —М.: Госстройиздат. 1956—С. 19-24.

405. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.

406. *Риппенбейн Я.М.* Обобщение понятия нагрузка и вытекающий из этого обобщения новый метод расчета статически неопределимых систем, Труды Московского института инженеров транспорта, вып. 111, 1927.

407. *Риппенбейн Ю.М. К* расчету плоских и пространственных статически неопределимых систем // Рамы и фермы, пространственные и плоские — М.: Гос-стройиздат. 1933.

408. *Рівкін С.А., Баженов В.А.* Контактні зусилля між шарами складової балки при наявності тертя.- Сб.”Опір матеріалів і теорія споруд”. Вип.4.- К.: Будівельник, 1966. - с. 101-107.

409. *Розин Л.А.* Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов — Л.: Энергия, 1971. - 214 с.

410. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам — М.: Стройиздат. 1977. - 128 с.

411. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: ЛГУ, 1978. – 223 с.

412. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задачи теории упругости с идеальными односторонними связями. Задачи Синьорини // Метод конечных элементов и строит. механика: Тр. ЛПИ.–№ 363 – Л., 1979.– С. 3–15.

413. *Розин Л.А.* Теоремы и методы статики деформируемых систем. – Л., 1986. – 276 с.

414. *Розин Л.А.* Задачи теории упругости и численные методы их решения. – С.-Петербург: изд. СПбГТУ, 1998. – 530 с.

415. Російсько-український та українсько-російський словник термінів будівництва й архітектури / Уклад. *С. Жуковський, Р. Кінаш, Л. Полюга, В. Базилевич.* – Львів: Ліга–Прес, 2004.

416. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980.

417. *Рыбаков Л.С., Наринский В.И.* Вариационные принципы и методы строительной механики. – М.: МАИ, 1987. – 92 с.

418. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48. — Вып. 3. — С. 420-435.

419. *Рыхлевский Я.* Разложение упругой энергии и критерий предельности // Успехи механики. — 1984. — Т. 7. — Вып. 3. — С. 51-80.

420. *Рэлей Дж.* Теория звука, т. I, II.– М.-Л.: Гостехиздат, 1955. – 504 с; 476 с.

421. *Рэнкин У.Д.М.* Руководство для инженеров-строителей. — СПб.: 1870.

422. С.П. Тимошенко – механік XX століття. Матеріали наукових читань з циклу: «Видатні конструктори України». – К.: ЕКМО, 2004. – 86 с.

423. Сайт Большая советская энциклопедия (http://www.rubricon.ru/)

424. Сайт Санкт-Петербургского государственного технического университета (smitu.cef.spbstu.ru)

425. *Сахаров А.С.* Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смешений // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1974. - Вып. 23. - С. 61-70.

426. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник, 1974. - Вып. 24. - С.147-156.

427. Сборник, посвященный 300-летию со дня смерти Галилео Галилея. - Изд. АН СССР, 1943.
428. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. — М.: Машиностроение, 1978. — 222 с.
429. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. — М.: Высшая школа, 1987. — Ч. 1. Статика. — 320 с. Ч. 2. Динамика. — 304 с.
430. *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. - М.: Физматгиз, 1961. – 518 с.
431. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения. - М.: Мир, 1986.
432. *Сливкер В.И.* Метод Ритца в задачах теории упругости, основанный на последовательной минимизации двух функционалов // Изв. АН СССР. МТ'Г, 1982, №2. — С. 57-65.
433. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Изд-во АСВ, 2005. – 736 с.
434. *Слободянский М.Г.* Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости // ПММ, 1939. т. 3. вып. 1. — С. 75-82.
435. *Смирнов А.Ф.* Статическая и динамическая устойчивость сооружений — М.: Трансжелдориздат. 1947.— 308 с.
436. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.* Строительная механика: Стержневые системы.– М.: Стройиздат, 1981; Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984.
437. *Снитко Н.К.* Теория неизменяемости плоских мостовых ферм. – Л.: изд-во Военно-транспортной академии, 1947.
438. Собрание трудов И. Бернулли, т. 2. - Genéve, 1744. ???? название на русском??
439. *Соколов Ю.Д.* Исследования М.В. Остроградского по механике. П. с. тр., т. II. Стр. 354.
440. *Соколовская З.К.* 400 биографий ученых. — М.: Наука, 1984. — 510 с.
441. Сопротивление материалов / *Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка, В.Г. Попков, Э. С. Уманский.* — Киев: Вища школа, 1986. — 294 с.
442. Справочник по теории упругости // Под ред. П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – К., 1971. – 418 с.
443. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е, Гостехиздат, 1953. – 468 с.
444. *Стипанин Э.* Бошкович и Эйнштейн // Исследования по истории механики. — М.: Наука, 1983. — С. 219-244.
445. *Стараракова Н.Е.* Принцип Гамильтона–Остроградского для системы с односторонними связями // Прикл. математика и механика. Т. 29, вып. 4. – 1965.– С. 738–739.
446. *Стрелецкий Н.С.* К расчету сложных статически неопределимых систем. - М., 1921.
447. *Стрельцова Г.Я.* Паскаль и европейская культура. — М.: Республика, 1994. — 495 с.
448. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. - 349 с.
449. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенников, Н.Н. Шапошников. — М.: Стройиздат, 1984. — 415 с.
450. Строительная механика. Стержневые системы / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенников. Н.Н. Шапошников. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.

451. *Субботин М.Ф.* Астрономические работы Лагранжа. - В кн.: Жозеф Луи Лагранж (1736-1813, к 200-летию со дня рождения). - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1937. - С.47-84.
452. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. – 512 с.
453. *Тарасов Б.Н.* Паскаль. — М.: Молодая гвардия, 1979.
454. *Тимошенко С.П.* К вопросу об устойчивости упругих систем // Известия Киевского политехнического института, Год 10, книга 2 —Киев: Тип. Кулиженко, 1910 — С. 147-167.
455. *Тимошенко С.П.* Вопросы прочности в паровых турбинах / Вестник общества технологов, т. 19, №17, 1912. – С. 266 - 279.
456. *Тимошенко С.П.* Курс сопротивления материалов. — Киев: Изд-во кн. маг. Л. Идзиковского, 1912. — 519 с.
457. *Тимошенко С.П.* О динамических напряжениях в рельсах // Вестник инженеров, т. 1, № 4, 15 февраля, 1915.- С. 143-152.
458. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости, ч. II. – 1916.
459. *Тимошенко С.П.* Прочність аеропланів // Праці Інституту технічної механіки. Українська Академія наук, 1919. - 6-7с.
460. *Тимошенко С.П.* Сборник задач по сопротивлению материалов.– М.-Л., 1928.
461. *Тимошенко С.П., Лесселье Д.М.* Прикладная теория упругости. - Л.: ГНТИ, 1930. – 392 с.
462. *Тимошенко С.П.* Курс статики сооружений. – Л.: ГНТИ, 1931. – 391 с.
463. *Тимошенко С.П.* Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: ГНТИ, 1931. — 224 с.
464. *Тимошенко С.П.* Теория колебаний в инженерном деле (перевод с английского), – М.: Госс. Научно-техническое издательство, 1931. – 344 с.
465. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. В 2 ч. Ч.2. Теория и задачи. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1932.
466. *Тимошенко С.П.* Статика сооружений. — М.: ГНТИ, 1934. - 364 с.
467. *Тимошенко С.П.* Теория упругости (перевод с английского). – М.: ОНТИ, 1937. – 452 с.
468. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов, т. I (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1945.
469. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов, т. II.— М.: Гостехиздат, 1946.
470. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем (перевод с английского). – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 532 с.
471. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1948.
472. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостеориздат, 1957. - 536 с.
473. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. Издание объединения С.-Петербургских политехников. E.A. Vetehorine 15, Boulevard Anatole — Paris, France, 1963.
474. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Т. I. Элементарная теория и задачи. — М.: Физматгиз, I960. — 379 с. Т. П. Более сложные вопросы теории и задачи. — М.: Наука, 1965. — 480 с.
475. *Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М, Наука, 1966. – 636 с.

476. *Тимошенко С.П.* . Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы под редакцией Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
477. *Тимошенко С.П.* Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 9 — 105.
478. *Тимошенко С.П.* Об устойчивости упругих систем // С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 208 — 383.
479. *Тимошенко С.П.* Теория изгиба, кручение и устойчивость тонкостенных стержней открытого поперечного сечения. // С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 670 — 727.
480. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций. — М.: Наука, 1975. — 704 с.
481. *Тимошенко С.П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. – К.: Наукова думка, 1975. – 561 с.
482. *Тимошенко С.П.* Теория висячих мостов. // С. П. Тимошенко. Статические и динамические проблемы теории упругости. — Киев: Наукова думка, 1975. — С. 418 — 447.
483. *Тимошенко С.П., Дж. Гере.* Механика материалов. — М.: Мир, 1976. — 669 с.
484. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. – 560 с.
485. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
486. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. – К.: Наукова думка, 1993. – 424 с.
487. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. - Москва: Вузовская книга, 2014. – 444 с.
488. *Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974. – 482 с.
489. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* (1951) Уравнения математической физики. (М., Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры).
490. *Тонти Э.* Вариационные принципы в теории упругости. – Сб. перев. "Механика", 1969, вып. 5. – С. 124–138.
491. *Трахтенберг И.* Константин Паустовский и Киев. Возвращение. – «Радуга», 5-6, 2015. – С. 145.
492. *Треффц Е.* Математическая теория упругости (перевод с немецкого), 1934. – 172 с.
493. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
494. *Трусделл К.* Этапы развития понятия напряжения. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили). – М.: АН СССР, 1961. – С. 439-447.
495. *Трусделл К.* Очерки по истории механики. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 316 стр.
496. *Тюлина И.А., Ракчеев Е.Н.* История механики. - Изд-во МГУ, 1962.
497. *Тюлина И.А.* Жозеф Луи Лагранж. – М.: Наука, 1977. – 221 с.
498. *Тюлина И.А.* История и методология механики. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.
499. *Уманский А.А.* Специальный курс строительной механики, ч. II, 1935. стр. 39.
500. *Уэвелл У.* История индуктивных наук от древнейшего до настоящего времени. — СПб.: Т. I. — 589 с., Т. 2. — 869 с., Т. 3. — 912 с., 1867.
501. *Федоров П.И.* Химическая термодинамика. Стр 175
502. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

503. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
504. *Феодосьев В.И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975, — 172 с.
505. *Феппль А. и Феппль Л.* Сила и деформация, т. I и т. II (перевод с немецкого), 1933 и 1936.
506. *Фиалко С.Ю.* Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах — М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2009. - 160 с.
507. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974. – 159 с.
508. *Филин А.П.* Матрицы в статике стержневых систем. – Л.-М., 1966.– С. 107–116.
509. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. — М.: Наука, Т. 1. 1975. - 832 с. Т. II. 1978. - 616 с. Т. III. 1981. - 480 с.
510. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. — Л.: Стройиздат, 1987. - 384 с.
511. *Филин А.П.* Пять часов в обществе классика науки. - Санкт-Петербург, 1993.
512. *Филин А.П.* Очерки об ученых-механиках. М.: Изд. дом «Стратегия», 2007. – 784 с.
513. *Филоненко-Бородич М.М.* Основы работы упругих сил в плоских системах. — М.: ГТТИ, 1932. — 224 с.
514. *Филоненко-Бородич М.М.* Основы теории работы упругих сил в плоских системах. 1925. 2-е изд., 1932.
515. *Филоненко-Бородич М.М.* Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инженерный сборник. - 1954. - Т. XIX. - С. 13-36.
516. *Филонович С.Р.* Роберт Гук. – Квант, 1985, № 7.
517. *Филонович С.Р.* Шарль Кулон. — М.: Просвещение, 1988. - 111 с.
518. *Филонович С.Р.* Томас Юнг как историк науки // Исследования по истории физики и механики. — М.: Наука, 1990. — С. 78-92.
519. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.– М., 1970.
520. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
521. *Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: «Наука», 1979. – 429 с.
522. *Форсберг К.* Оценка методов конечных разностей и конечных элементов в применении к расчету произвольных оболочек // Расчет упругих конструкций с применением ЭВМ. Том 2 — Ленинград: Судостроение, 1974 — С. 296-312
523. *Франкфурт У.И., Френк А.М.* Христиан Гюйгенс. М.: Наука, 1962
524. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. – М.: Физматгиз, 1963.
525. *Хедли Дж.* Нелинейное динамическое программирование.– М.: Мир, 1967.– 506 с.
526. *Хеммінг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
527. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.– М.: Мир, 1975.– 408 с.
528. *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы ми конструкции. – М.: Мир, 1983. – 478 с.
529. *Храмов Ю.А.* Физики: Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1977. - 512 с.

530. *Храмов Ю.А.* Мариотт Эдм (Mariotte Edme) // Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. - Изд. 2-е, испр. и дополн. - М.: Наука, 1983. - 400 с.
531. *Храмов Ю.А.* Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. — Изд. 2-е, испр. и дополн. — М.: Наука, 1983. — 400 с.
532. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1970. – 184 с.
533. *Цыхановский В.К.* К решению сильно-нелинейных задач в механике твердого деформируемого тела // Прикл.механика. – 1999. – Т. 35, № 3. – С.22–26.
534. *Чеканов А.А.* Виктор Львович Кирпичев. — М.: Наука, 1982. - 176 с.
535. *Черепашинский М.* Краткий методический очерк развития строительной механики. — М., 1888. - 33 с.
536. *Чернов С.Н.* Леонард Эйлер и Академия наук // Леонард Эйлер (1707 — 1783). Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М. — Л.: Издательство Академии наук СССР, 1935. — С. 163-238.
537. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления.– М.: Наука, 1973. – 238 с.
538. *Чирас А.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.
539. *Шалашилин В.И., Кузнецов Г.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. — М.: Эдиториал УРСС. 1999. - 222 с.
540. *Шапошников Н.Н.* Строительная механика и ее роль в современных расчетах зданий и сооружений. // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений: сб. статей. Вып. 1 (XXVI). 2009 — С. 216-222.
541. *Шехтер Р.* Вариационный метод в инженерных расчетах. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
542. *Шмутцер Э., Шютц В.* Галилео Галилей. — М.: Мир, 1987. -142 с.
543. *Шухардин С.В.* Аксель Вильгельмович Гадолин // Люди русской науки. Т. 2. — М.: Гостехиздат, 1948. — С. 923-930.
544. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М. — Л.: ГТТИ, 1934.
545. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление, т. III. - М.: Физматгиз, 1958. - С. 313-314.
546. *Эйлер Л.* Письма к ученым / Под ред. В.И.Смирнова. М.: Академия наук, 1963. – 402 с.
547. *Эйлер Л.* Диссертация о принципе наименьшего действия с разбором возражений славнейшего проф. Кенига, выдвинутых против этого принципа.– В. сб. переводов [Вариационные …, 1959].
548. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. В четырех томах. Т. 4. – М.: Наука, 1965-1967. – С. 121.
549. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление. – М.: ГИТТЛ, 1958. – 163 с.
550. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
551. *Юшкевич А.П.* О неопубликованных ранних работах М.В. Остроградского.— В кн.: Историко-математические исследования. Вып. XVI. - М.: «Наука», 1965.
552. *Юшкевич А.П.* Леонард Эйлер. Жизнь и творчество // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей. — М.: Наука, 1988. — С. 15-46.
553. *Яглом И.М.* Феликс Клейн и Софус Ли. — М.: Знание, 1977.

554. *Якоби К.* Лекции по динамике. - М.-Л., ОНТИ, 1936.
555. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.– 488 с.
556. *Янушевин Е.С.* О расчете бруса большой кривизны // Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания. Сборник статей. — М.: Машгиз, 1955. — С. 109 — 130.
557. *Adamson D.* Blaise Pascal: mathematician, physicist and thinker about God, St. Martin's Press, London, 1995.
558. *Adini A., Clough R.* Analysis of plate bending by the finite element method. Rept. to National Sci. Foundation, 1960.
559. *Ariga N.* Science and Its Public Perception: The Principle of Least Action in Eighteenth-Century Europe. Department of Philosophy and History of Science, Graduate School of Letters, Kyoto University, Japan, 2008.
560. *Andrade E. da C.* Robert Hook // Proceedings of the Royal Society. — London. — 1950. — V. 201. — P. 439-479.
561. *Arantes Oliveira E.R.* Theoretical Foundations jn the Finite Element Method // Int. J. Solids Struct.. 1968. Vol. 4. No. 10 — P. 929-952.
562. *Argyris J.H.* Die Matrizentheorie der Statik. // Ingenieur-Archiv, 1957, vol. 25, —P. 174-192.
563. *Argyris J.H., Kelsey S.* Energy theorems and structural analysis, 1960, Butterworth, London. – 86 p.
564. *Argyris J.H.* Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt, Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем — Л.: Судпромгиз, 1961. — С. 37-293.]
565. *Argyris J.H. and Kelsey S.* Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft, Basic Theory. – London, 1963. - 176 s.
566. *Argyris J.* Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method // J. Royal Aero. Sci. Tech. 1965. Note 69. — P. 711 —713.
567. *Argyris J.H.* Some New Elements for the Matrix Displacement Method. – PN, 1968.
568. *Argyris J.H.* ASKA—Automatic system for kinematic analysis // Nucl. Eng. Design. 1969. Vol. 10. P. 441-455.
569. *Argyris J.H., Mlejnek H.-P.* Dynamics of Structures (Texts on Computational Mechanics, Book 5). - North Holland; 1 edition, 1991. – 606 p.
570. *Aubin J.P. Burchard H.G.* Some aspects of the method of the hypercircle applied to elliptic variational problems//SYNSPADE 1970 New York: Academic Press. 1971.
571. *Appell P.* Traité de Mécanique, т. III. – 1900.
572. *Babuska I., Zlamal M.* Nonconforming elements in the finite element method with penally // SIAM J. Numer. And.. 1973. Vol. 10 —P. 863-875.
573. *Bathe K.J., Wilson E.L., Peterson F.F.* SAP IV - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems. EERC 73/1 1. Earthquake Engineering Research Center. June 1993.
574. *Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Triangular elements in bending conforming and nonconforming solutions // Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. AFFDL-I R-66-80 Dayton. Ohio: Air Force Institute of Technology. 1966. - P. 547-576.

575. *Bazeley G.P.. Cheung Y.K. Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Triangular elements in plate bending: Conforming and non-conforming solution // Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech (Okt. 26- 28. 1965) — Ohio: Wright - Petterson AFB. 1966. - P. 547-576.
576. *Bazhenov V.A., Perelmuter V.A., Vorona Yu.V.* Structural mechanics and theory of structures. History essays. LAP LAMBERT Academic Publishing. Beau Bassin, Mauritius, 2017. 580 c.
577. *Bazilevs Yu., Takizawa K., Tezduyar T.E.* Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications. Somerset, NJ: Wiley, 2013.
578. *Belhoste B.* Cauchy 1789-1857. Un mathematicien legitimiste au XIXe siecle. — Paris; Berlin, 1985. — 226 p.
579. *Bendixsen A.* Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rah-menkonstruktionen. — Berlin: Verlag von Julius Springer, 1914.
580. *Benes J.* Frantisek Josef Gerstrer (1756 — 1832) // Vesmir. Prirodovedecky casopis Ceskoslovenske a Slovenske Akademie ved. — 1988. — Rocnik 67. — N2. — S. 117.
581. *Bernoulli J.* Curvatura laminai elasticae // Acta Eruditorum. Lipsiae: 1694. June. — P. 262 — 276.
582. *Bernoulli J.* Opera omnia tam antea sparsim edita quam hactenus inedita : tomus primus, quo continentur ea quae ab anno 1690 ad annum 1713 prodierunt. - Lutetiae Parisiorum: apud Carolum Jombert ..., 1742. – 563 p.
583. *Betti E.* Teoria della elasticita // Nuovo Cimento. — 1872/ 73. — Ser. 2. — N 7-10.
584. *Biilffinger G.B.* De solidorum resistentia specimen, Comment, Acad. Soient. Petropol. ad annum 1729, т. IV, p. 164—181, Спб., 1735.
585. *Bjoerkman A.* Folke Odqvist. // Recent progress in applied mechanics. The Folke Odqvist volume. — Stockholm: Almqvist and Wiksell.1967. — P. 11-12.
586. *Bleich F. Melan E.* Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik — Berlin: Springer, 1927 — 350 s. [Русский перевод: Блейх Ф., Мелан Е. Уравнения в конечных разностях статики сооружений — Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936. — 378 с.].
587. *Bogner F.R., Fox R.L., Schmit L.A.* A Cylindrical Shell Discrete Element // AIAA J.. 1967. Vol. 4. — P. 745-750. [Русск. перевод: Богнер Ф.. Фокс Р.. Шмит Л. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов // Ракетная техника и космонавтика. 1967. №4 |
588. *Boscovich R.J.* Philosophiae naturalis ad unicam legem virium in natura existentium. — Venezia: 1763. — 322 p.
589. *Boussinesq J.* Application des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques, principalement au calcul des deformations et des pression que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exerces sur une petite partie de leur surface ou de leur interieur. Memoires suivis de notes etendues sur divers points de physique mathematique et d'analyse. — Paris: Gautier — Villars, 1885 — 722 p.
590. *Breger H.* ¨Uber den von Samuel K¨onig ver¨offentlichten Brief zum Prinzip der kleinsten Wirkung (On the Letter published by Samuel K¨onig on the Principle of Least Action). In: Hecht H. (ed.) Pierre Louis Moreau de Maupertuis. Eine Bilanz nach 300 Jahren. Schriftenreihe des Frankreich-Zentrums der Technischen Universit¨at Berlin, pp. 363–381. Verlag Arno Spitz GmbH/Nomos Verlagsgesellschaft, Berlin, 1999.
591. *Bresse.* Recherches analytiques sur la flexion et la resistance des pieces courbes. - Paris, 1854.
592. *Brezzi F., Fortin M.* Sur la methode des elements finis hybrides pour le probleme biharmonique // Numer. Math.. 1975. Vol. 24 — P. 103-13 1.

593. *Brezzi F., Douglas J., Marini L.D.* Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems, Numer. Math. 1985. Vol. 47. — P. 217—235.

594. *Brezzi F., Douglas J., Fortin M., Marini L.D.* Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. RAIRO Mod'el. Math. Anal. Numer. 1987. Vol. 21. No. 4. P. 581 604.

595. *Brezzi. F.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991 362 p.

596. *Buchheim H.* Deutschlandpolitik, 1949-1972: Der politisch-diplomatische Prozess. Deutsche Verlags-Anstalt, 1984. – 179 p.

597. *Carnot S.* Betrachtungen uber die bewegende Kraft des Feuers und die zur Entwicklung dieser Kraft geeigneten Maschine. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 37.

598. *Carnot S.* Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance. Paris: Bachelier, Libraire, 1824.

599. *Castigliano A.* Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti delle Reale Acadamie delle Scienze di Torino. 1875. — V. X.

600. *Castigliano A.* Nuova teorie intorno all'equilibrio dei sistemi elastici // Atti della Reale Academie delle Scienze di Torino. — 1875. — V. XI.

601. *Castigliano A.* Theorie de l'equilibre des systemes elastiques. — Turin: 1879.

602. *Castigliano A.* Theorem de l'equilibre des systemes elastiques et ses applications, 1879 (переклад з англ. в кн: *Andrews E.S.* Elastic stresses in structures, 1919).

603. *Castigliano A.* Nuova teoria intorno all equilibrio dei sistemi elasticiti. – Trans. Acad. Sci. Turin, 1975, vol. X. – P. 380-423.

604. *Cauchy O.L.* Recherches sur l'equilibre et Ie mouvement interieur des corps solides ou fluides, elastiques ou non elastiques // Bulletin de sciences par la Societe Philomatique. — 1823. — P. 9 — 13.

605. *Cheung Y.K.* Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs // J of Eng Mech. ASCE. 1968. Vol. 94, No. 6.-P. 1365-1378.

606. *Cheung Y.K.* Finite Strip Analysis of Bridges—Spon E&I'N. 1996. - 347 p.

607. *Ciarlet P.G.* Conforming and nonconforming finite clement methods for solving the plate problem // Conference on the Numerical Solution of Differential Equations - - Berlin: Springer. 1974 —P. 21-31.

608. *Clapeyron E.* Sur la puissance motrice de la chaleur. - École Polyt. Journ., vol. 14, No. 23, 1834. - pp. 153–190.

609. *Clapeyron E.* Sur la puissance motrice de la chaleur. - Taylor, Scient. Mem. I, 1837. - pp. 347–376.

610. *Clapeyron E.* Sur la puissance motrice de la chaleur. - Poggend. Annal. LIX, 1843.- pp. 446–450.

611. *Clapeyron E.* Calcul d'une poutre elastique reposant librement sur des appuis inegalement espaces // Comptes rendus. — 1857. — T. 45. — P, 1076 — 1080.

612. *Clapeyron E.* Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme. Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., 1926.

613. *Clebsch A.* Ueber die Gleichgewichts figur eines biegsamen Fodens // Grelles Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1860. — Bd. 57.

614. *Clebsch A.* Theorie der Elasticitaet der fester Koerper. — Leipzig: 1862. — 424 S. [Перевод на французкий язык с примечаниями и дополнениями Б. Сен-Венана: — Clebsch A. Theorie de l'elasticite des corps solides. — Paris: Dunod, 1883. — 980 p.].

615. *Clough RW.* Stress analysis of a gravity dam by the finite element method // Proceedings of the Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon. Portugal, 1962 (see also RILEM Bull. No. 19: June 1963).
616. *Clough R.W.* The Finite Element Method in Structural Mechanics. Philosophy of the Finite Element Procedure. In: Stress Analysis. Ed. O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister. - New York: John Wiley & Sons, 1965.
617. *Clough R.W.* The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis // Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg, 1960. [Русск. перевод: Клаф Р.У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин — М.: Стройиздат, 1967 — С. 142-170].
618. *Clough R.W., Wilson E.L.* Early finite element research at Berkelay // Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics. Aug. 4-6. 1999.
619. *Clough R.W.* Early history of the finite element method from the viewpoint of a pioneer. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, pp. 283–287. 2004.
620. *Connor J., Will D.* A mixed Unite element shallow shell formulation // Matrix Meth. Sir. Anal. Design, Univ. Alabama. 1971. P. 105-137.
621. *Coriolis G.G.* Experiences sur la resistance du plomb a l'ecrasement et sur l'influence qu'a sur sa durete une quantite inapreciable d'oxide // Annales de chimie et de physique. — 1830. — T. 44. — P. 103 — 111.
622. *Corradi M.* The mechanical sciences in Antiquity. In: Essays in the history of theory of structures, ed. S. Huerta. - Madrid: Instituto Juan de Herrera, 2005. - pp. 103–116.
623. *Cotterill J.H.* Further application of the principle of least action //Philosophical magazin. Ser. 4. — 1865. — V. 29. — P. 430.
624. *Cotterill J.H.* On elliptic ribs // Philosophical magazin. — Ser. 4. — 1865. — V. 30.
625. *Cotterill J.H.* On the equilibrium of arched ribs of uniform section // Philosophical magazin. Ser. 4. — 1865. — V. 29. — P. 380.
626. *Cotterill J.H.* On the extension of dynamical principle least action // Philosophical magazin. Ser. 4. — 1865. — V. 29. — P. 299.
627. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. - Mémoires de mathématique et physique presenté à l'Acádemie des sciences par savantes étrangères, Paris, 1773.
628. *Coulomb C.A.* Le statique des voùtes. – Paris, 1776.
629. *Coulomb C.A.* Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l'elasticite des fils de metal: Application de cette theorie a l'emploi des metaux dans les Arts et dans differentes experiences de Physique: Construction de differentes balances de torsion, pour mesurer les plus petits degres de force. Observations sur la loi de 1'elasticite et de la coherence // Historire de 1'Academie Royale des Sciences annee 1784. — Paris: 1787. — P. 229 — 269.
630. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 49, pp. 1–23. 1943.
631. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 2161–2162. 1994.
632. *Courtivron O. de.* Recherches de Statique et de Dynamique ou l'on donne un nouveau principe general pour la consideration des corps animes par des forces variables, suivant une loi quelconque, Memoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1749, стор. 21 і далі.

633. *Crotti F.* Conversazioni - Saggi di critica scientifico-pratica, Minelli, Rovigo 1877.
634. *Crotti F.* Esposizione del teorema Castigliano e suo raccordo colla teoria dell'elastricita. «Atti Coll. Ing. Arch. Milano». Tomo II, fasc., 4, 20 parte.
635. *Csonka P.* Beitrag zur Berechnung waagerecht belasteter Stockwerkrahmen // Bautechnik/ 1962. No. 7
636. *Culmann K.* Die graphische statik. 1866.
637. *D'Alembert.* Traité de dynamique, dans lequel les lois de l'equilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible. - Paris: David L'aîné, 1743.
638. *D'Alembert I.B.I.* Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange - Œuvres de Lagrange, V.1, Paris, 1867, p. XVI.
639. *De l'Hospital.* Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes. - Paris, MDCCXVI.
640. *Delambre J.B.J.* Oeuvres de Lagrange, t. I. - Paris, 1867.
641. *Demkowicz L., Oden J.T.* An adaptive characteristic Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated linear and nonlinear parabolic problems in two space variables // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, Vol. 55, Issue 1-2, — P. 63-87.
642. Denis Diderot et Jean le Rond d'Alembert. Liste des auteurs. Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. 1751 — 1772.
643. *Denke P.H.* A matrix method of structural analysis // Proc. 2nd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech, ASCII, 1954.— P. 445-457.
644. *Dijksterhuis E.J.* Die Mechanisierung des Weltbildes. Berlin: Springer, 1956.
645. *Dirichlet P.G.L.* Über die Stabilität des Gleichgewichts. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 32, 1846. - pp. 85–88.
646. *Domke O.* Die Ergänzungsenergie elastischer systeme. Müller-Breslau zum 70 Geburtstag. Eisenban, vol 12, p. 100.
647. *Domke O.* 1915. Über Variationsprinzipien in der Elastizitätslehre nebst Anwendungen auf die technische Statik. Zeitschrift für Mathematik und Physik, vol. 63, pp. 174–192.
648. *Domke O.* 1936. Zum Aufsatz "Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie" von T. Pöschl. Der Bauingenieur, vol. 17, No. 41/42, p. 459ff.
649. *Donati L.* Sur lavoro di deformazione dei sistemi elastici: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo IX, ser. IV, p. 345, 1888.
650. *Donati L.* Illustrazione al theorema del Manabrea: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo X, ser. IV, p. 267, 1889.
651. *Donati L.* Ulteriore osservazioni intorno al theorema del Manabrea: Memorie dell'accademia discienze di Bologna, Tomo XV, ser. IV, p. 449, 1894.
652. . *Dugas R.* A History of Mechanics. Dover Classics of Science and Mathematics. Dover Publications Mineola, New York, 1988.
653. *Duhem P.* Etudes sur Léonard de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Premiere serie. — 1 vol. in-8°, 355 p.; Hermann, Paris.
654. *Duhem P.* Les Origines de la statique. - Paris, 1905.
655. *Duncan W.J., Collar A.R.* A method for the solution of oscillations problems by matrices // Phil. Mag., 1934, Series 7, Vol. 17.— P. 865-872.
656. *Duvaut G., Lions J.-J.* Les inequations en mecanique et en physiqe.–P: Dunod, 1972.–411 p.

657. *Egeland O., Araldsen P.* SESAM-69: A general purpose finite element method program // Computer and Structures. 1974. Vol. 4. Issue I — P. 41-68.
658. *Engesser F.* Uber die Durchbiegung von Fachwerktragern und die hierbei auftreten-den zusatzlichen Spannungen // Zeitschrift fur Baukunde, 1879, vol. 2. — P. 590-602.
659. *Engesser F.* Ueber Knickfestigkeit gerader Staebe // Zeitschrift des Architekten und Ingeniuer Verein zu Hannover. 1889. — Bd. 35 — S. 456 — 468.
660. *Engesser F.* Ueber Knick Flagen // Schweizerishe Bauzeitung. — 1895. — Bd.26. — S. 24.
661. *Euler L.* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. — Marc Michel Bousquet, 1744.
662. *Euler L.* Scientia Navalis seu Tractatus de Construendis ac Dirigendis Navibus;.Pars prior complectens theoriam universam de situ ac motu corporum aquae innatantium; Pars posterior, in qua rationes ac praecepta navium construendarum fusius exponuntur. St. Petersburg: Typis Academiae Scientiarum, 1749. (First edition).
663. *Euler L.* Sur le principe de la moindre action (On the Principle of Least Action). In: Histoire de l'Acad´emie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, p. 199 et seqq. Haude et Spener, Berlin, 1751, 1753.
664. *Euler L.* Recherchessur la connaissance méchanique des corps. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // History de l'Académic Royale des Sciences. Paris, 1758 pub. 1765. Vol. XIV. P.131-153; 154-193.
665. *Euler.* Sur la force des colonnes. Memoires de l'academie des sciences de Berlin T.13, 1759, pp. 252-282.
666. *Euler L.* De motu vibratorio tympanorum // Nove commentarii Acadamiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. — 1767. — V. 10.
667. *Euler L.* Determinatio onerum, quae columnae gestare valent. Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis. De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium // Acta Academie Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1778. Pars l-S. Petersburg: 1780. — P. 121-194.
668. *Euler L.* De motu vibratorio tympanorum // Novi Comm. Acad/ Petrop., T. X, СПб., 1789.
669. *Eulero L.* Dissertatio de principio minimae actionis una cum examine obiectionum Prof. Koenigii contra hoc principium factarum. Berolini, 1753.
670. *Fahie J.J.* Galileo, his life and work. - New York, 1903.
671. *Feynman R., Leighton R., Sands M.* Lectures on Physics, extended 2nd edn., vol. 2, ch. 19. Addison-Wesley, 2005.
672. *Felippa C.A.* An appreciation of R. Courant's 'Variational Methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations', 1943. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 2159–2161. 1994.
673. *Fermat P.* Oeuvres, т.1, Paris, 1891.
674. *Ferrers N.*(ed.). The Collected Papers of George Green. (Cambridge, 1871); reprinted by Chelsea, New York, 1971
675. *Fichera G.* Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: in problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno // Mem. Accad. Naz. Lei Lincei.– 1964.–N 8.–P. 91–140.
676. *Fichera G.* Existence Theorems in elasticity (1972), in Flügge, Siegfried; Truesdell, Clifford A., Festkörpermechanik/Mechanics of Solids, Handbuch der Physik (Encyclopedia of Physics), VIa/2, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, pp. 347–389
677. *Fleckenstein J.O.* Johann und Jakob Bernoulli. – Basel, 1949.

678. *Fletcher C.A.J.* Computational Techniques for Fluid Dynamics. – Berlin: Springer-Verlag, 1988.
679. *Fliegel E.* Die Elastizitatsgleichungen zweiter Art der Stabwerksdynamik. // In-genieur-Archiv, 1938, vol. 9. — P. 20-38.
680. *Föppl A.* 1897. Vorlesungen über Technische Mechanik, Dritter Band: Festigkeitslehre. Leipzig:B. G. Teubner.
681. *Fraerijs de Veubeke*. Displacement and equilibrium models in the finite element method // Stress Analisys .—New York: Wiley. 1965. — P. 145-197.
682. *Fraeijs de Veubeke B.* A conforming finite element for plate bending // Int. J. Solids Struc, 1968, Vol. 4, —P. 95-108.
683. *Fraeijs de Veubeke B., Sander G.* An equilibrium model for plate bending // International // J. Solids and Structures. 1968. Vol. 4. No. 4. — P. 447-468.
684. *Fränkel W.* Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben. Zeitschrift d. Arch.- & Ing. - Vereins zu Hannover, vol. 28, 1882. - pp. 63-76.
685. *Friedrichs K.* Ein Vcrfahrcn dcr Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdruckes darzustellen," in Nachrichten der Academic der Wissenschaften in Gottingen, 1929. - pp. 13-20.
686. *Fuss N.I.* Varia problemata circa acquilibri teabium compactilium oneratarum, earumque vires et pressionem contra anterides // Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. — 1778. — 1780. — T. II. Pars I — P. 194 — 216.
687. *Fuss P.H.* Correspondence mathematique et physique, лист 26, том II. - С.-Петербург, 1843.
688. *Galileo Galilei*. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. In Leida, MDCXXXVIII. – 1638.
689. *Gauss C.F.* Determinatio orbitae observationibus quotcunque quam proxime satisfacientis. In: Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium, G¨ottingen, Liber II, Sectio III, pp. 172–189 (1809)
690. *Gauss C.F.* ¨Uber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik (On a New Fundamental Law of Mechanics). Journal f¨ur die reine und Angewandte Mathematik, herausg. v. CRELLE, Band IV, 232–235 (1829)
691. *George A., Liu J.* Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems— Englewood Cliffs: Prentice-Hall. NJ. 1981. — 320 p. [Русск. перевод: Джорж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений — М.: Мир. 1984 — 334 с]
692. *Gerstner F.J.* Handbuck der Mechanik. Bd 1-3. — Prag: 1831 — 1834.
693. *Gerhardt C.I.* ¨Uber die vier Briefe von Leibniz, die Samuel K¨onig in dem Appel au public, Leide MDCCLIII, ver¨offentlicht hat (On the four Letters of Leibniz, which Samuel K¨onig published in Appel au public, Leide MDCCLIII). Sitzungsberichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften I, 419–427, 1898.
694. *Girard P.S.* Traite analytique de la resistance des solides et des solides d'egale resistance, Paris, an VI, 1798.
695. *Goldstine H.* A history of the calculus of variations from the 17th through 19th century. – N.Y.: Springer, 1980. – 410 p.
696. *Green G.* On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the common Surface of two non-crystallized Media. In: Transactions of the Cambridge Philosophical Society (1838 – 1842), vol. 7, 1839. - pp. 1–24.

697. *Guyan R.J.* Reduction of Stiffness and Mass Matrices // AIAA Journal, 1965. Vol. 3, No. 2 — P. 380
698. *Hamel G.* Elementare Mechanik. Leipzig/Berlin: B.G. Teubner, 1912.
699. *Hamel C.* Die Axiorae der Mechanik, Handbuch der Physik, т. V.- Berlin: J. Springer, 1927.
700. *Hamilton W.R.* Second essay on a general method of dynamics, t. I. - «Philos. Trans. Roy. Soc.», 1835.
701. *Harnack A.* Geschichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Band 1.1: Von der Gr¨undung bis zum Tod Friedrich des Großen (History of Royal Prussian Academy of Sciences, Volume 1.1: From the Foundation until the Death of Frederick the Great), pp. 331–345. Reichsdruckerei, Berlin, 1900.
702. *Hartmann F.* The Mathematical Foundation of Structural Mechanics (1985), Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 371 p.
703. *Hartmann F.* Castigliano Theorems and its Limits. Z. Angew. Math. u. Mech. 62(1982), pp. 645-650
704. *Hartmann F.* Castigliano and Sobolev. Z. Angew. Math. u. Mech. 65(1985) 2, 121-125.
705. *Hellinger E.* Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. Enzycl. Math. Wiss. 1914, IV, 4. – P. 654-655.
706. *Helmholtz H.* Dynamik continuerlich verbreiteten Massen. — Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth. — 1902. — 247 S.
707. *Helmholtz, H.* Rede ¨uber die Entstehungsgeschichte des Princips der kleinsten Action (Speech on the Evolutionary History of the Principle of Least Action). In: Harnack A. (ed.) Geschichte der K¨oniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Band 2 Urkunden und Actenst¨ucke. pp. 282–296. Reichsdruckerei, Berlin, 1887.
708. *Herrmann L.* A bending analysis for plates // Proc. Conf. Matrix. Meth. Str. Mech., Wright Patterson AFB. Ohio, 1965.
709. *Hertwig A.* 1906. Die Entwicklung einiger Prinzipien in der Statik der Baukonstruktionen und die Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre von G. C. Mehrtens. Zeitschrift für Arch.- & Ing.-Wesen, pp. 493–516.
710. *Hertwig A.* Das "Kraftgrosenverfahren" und das "Formanderungsgrosenverfahren" fur die Berechnung statisch unbestimmter Gebilde. // Der Stahlbau, 1933, vol. 6, No. 19. —P. 145-149.
711. *Hertz.* Über die Induktion rotierender Kugeln. – Berlin: 1880.
712. *Hilbert D.* The Foundations of Geometry. The open court publishing company, La Salle, Illinois, 1950.
713. *Hilbert D.* Mathematische Probleme.— Göttinger Nachrichten, 1900a, pp. 253-297.
714. *Hilbert D.* Über das Dirichlet'sche Princip.— Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1900b, Bd. 8, H. 1, S. 184—188 [B43, t. 3, c. 10—14].
715. *Hilbert D.* Über das Dirichlet’sche Prinzip. In: Festschrift zur Feier des 150jahrigen Bestehens der Kgl. Ges. der Wiss. Zu Gottingen. Berlin: Weidenhammer. - 1901.
716. *Hollister S.* C. The life and works of Charles Auguatin Coulomb // Mechanical Engineering. — 1936. — V. 58. — N 10. P. 615-620.
717. *Hooke R.* Micrographia: or, Some physiological descriptions of minute bodies made by magnifying glasses. With observations and inquiries thereupon, - London :Printed by Jo. Martyn and Ja. Allestry, printers to the Royal Society ..., 1665.

718. *Hooke R.* Lectures. De potentia restitutiva, or of spring, Explaining, the power of springing bodies // Early Science in Oxford. V. VIII. — Oxford: R. T. Gunther. — 1931. — P. 331 — 356.
719. *Hrennikoff A.* Solution of problems of elasticity by the framework method // Journal of applied mechanics, 194 1. Vol. 8. No 4 — P. 169-175.
720. *Hu H.-C.* 1955. On some variational methods on the theory of elasticity and the theory of plasticity. Scientia Sinica, vol. 4, pp. 33–54.
721. *Hu Haichang.* Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications, 1984 Beijing, Science Press New York, Gordon & Breach.
722. *Hughes T.J.* Computational Inelasticity. – Berlin: Springer-Verlag, 1998.
723. *Irons B.M.* Comments on 'Matrices for the direct stiffness method' by R. J. Melosh, AIAA J., 1964, Vol. 2, —P. 403.
724. *Irons B.M.* Comments on 'Matrices for the direct stiffness method' by R.J. Melosh //AIAA J.. 1964, Vol.2, P. 403.
725. *Irons B.M., Draper K.J.* Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending // AIAA J., 1965. Vol. 3. No. 5 - P. 961. [Русск. перевод: Айронс Б.. Дрейпер К. Неадекватность узловых связей в решении задачи изгиба пластины методом жесткостей // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3, №5 — С. 206-207]
726. *Irons B.M.* Engineering application of numerical integration in stiffness methods, AIAA J., 1966, Vol. 4, —P. 20352037.
727. *Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* The Isoparametric Finite Element System - A New Concept in Finite Element Analysis // Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis. Royal Aeronautical Society, London. 1968.
728. *Irons B.M.* A frontal solution scheme for finite element analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1970. Vol. 2 P. 5-32.
729. *Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Arantes Oliveira E.R.* Comment on the paper: Theoretical Foundations jn the Finite Element Method // Int. J. Solids Struct., 1970. Vol. 6, No. 1 — P. 695- 697.
730. *Irons B., Sohrab A.* Techniques of Finite Elements — Chichester: Ellis Horwood Limited, 1984. — 529 p.
731. Isis. т XX. - Brugge, Belgique, 1933.
732. *Jones R.E.* A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. // AIAA J. 1964. Vol. 2. No. 5. — P. 821— 826.
733. *Kabitz W.* ¨U ber eine in Gotha aufgefundene Abschrift des von S. K¨onig in seinem Streite mitMaupertuis und der Akademie ver¨offentlichten, seinerzeit f¨ur unecht erkl¨arten Leibnizbriefes (On a Copy of the Letter of Leibniz, found in Gotha and published by S. K¨onig during his Controversy with Maupertuis and the Academy, at that time declared as faked). Sitzungsberichte der K¨oniglich Preussischen Akademie derWissenschaften II, 632–638, 1913.
734. *Kammüller K.* 1937. Das Prinzip der virtuelle Verschiebungen. Eine grundsätzliche Betrachtung. Beton und Eisen, vol. 36, No. 22, pp. 363–365.
735. *Kammüller K.* 1938/1. Entgegnung zu Schleusner 1938/1. Beton und Eisen, vol. 37, No. 16, p. 271.
736. *Kammüller K.* 1938/2. Entgegnung zu Schleusner 1938/2. Beton und Eisen, vol. 37, No. 16, pp. 271–272.
737. *Karman T.* Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften. T. VI, 1910.

738. *Kellog C.D.* (1953) Foundations of Potential Theory. (New York).

739. *Kikuchi F., Ando Y.* Some finite element solutions for plate bending problems by symplied hybrid displacement method // Nucl. Eng. and Des.. 1972. Vol. 23. No 2 — P. 155-178.

740. *Kirchhoff G.R.* Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // Crelle Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1850. — Bd. 40. — S. 51 — 88.

741. *Kirchhoff G.R.* Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Staben // Crelle Journal fuer die reine und angewandte Mathematik. - 1858. - Bd. 56. - S. 285-313.

742. *Kirchhoff G.R.* Vorlesungen ueber Mathematisch Physik. V. I, II, III, IV. — Leipzig: Verlag von B. G. Teubner. – 1874-1894.

743. *Kirsch E.G.* Die Fundamentalgleichungen der Theorie der Elasticitat fester Korper. hergclcitct aus der Betrachtung eines Systems von Punkten. welche durch elastische Streben verbunden sind. // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1868. Vol. 12, No. 8 (S. 481-488). No. 9 (S. 553-570), No. 10 (S. 631- 638).

744. *Knobloch E.* Das große Spargesetz der Natur: Zur Tragikkom¨odie zwischen Euler, Voltaire und Maupertuis (The great Law of Conservation in Nature: On the Tragicomedy between Euler, Voltaire and Maupertuis). In: Biegel, G., Klein, A., Sonar, T. (eds.) Leonhard Euler 1707-1783. Mathematiker - Mechaniker - Physiker, pp. 79–89. Braunschweigisches Landesmuseum, Braunschweig, 2008.

745. *Koenigio* S. De universali principio aequilibrii et motus, in Vi viva reperto, deque nexu inter Vim vivam et Actionem, utriusque minimo. Dissertatio, Nova Acta Eruditorum, pp. 125–135, 1751.

746. *Koiter W.T.* General theorems for elastic plastic solids // Progress in solid Mechanics. 2. North–Holland, P. C.– 1960.– P. 165–221.

747. *Kolousek V.* Anwendung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen und des Reziprozitatssatzes in der Stabwerksdynamik. // Ingenieur-Archiv. 1941. vol. 12,—P. 363— 370.

748. Korrespondenz Adrien-Marie Legendre — Carl Gustav Jacob Jacobi. Editors: Herbert Pieper. Teubner-Archiv zur Mathematik, Vol. 19, 1998.

749. *Krankenhagen G., Laube H.* Werkstoffprüfung. Von Explosionen, Brüchen und Prüfungen. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 1983.

750. *Kruck G.E.* Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter, biegungsfester Trag-werke. Dissertation, Zurich ET1I, 1934.

751. *Krug K., Meinicke K.-P.* Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796–1832). Pionier der Technischen Thermodynamik. In: Lebensbilder von Ingenieurwissenschaftlern, ed. G. Buchheim &R. Sonnemann, pp. 116–126. Leipzig: VEBFachbuchverlag, 1989.

752. *Kurrer K.-E.*, 1985/1. Das Verhältnis von Bautechnik, und Statik. Bautechnik, vol. 62, No. 1, pp.1–4.

753. *Kurrer K.-E.* The History of the Theory of Structures. – Berlin: Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2008. – 848 p.

754. *Lagrange J.-L.* Sur la figure des collonnes // Mescellanea Taurinensia, Vol. 5, 1770-1773 - P. 123.

755. *Lagrange J.-L.* Théorie des fonctions analytiques, Paris, 1813.

756. *Lagrange.* «Essai d'une nouvelle mdthode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies». Oeuvres, v. I, 1867.

757. *Lagrange J.-L.* Sur la figure des colonnes // Ouvres de Lagrange T. 2. — Paris. — 1868. — P. 125 — 170.

758. *Lagrange J.-L.* Sur la force des ressorts plies // Oeuvres de Lagrange T. 3. — Paris. — 1869. — P. 77 — 109.

759. *Lagrange.* Mécanique analytique, 1re éd. – Paris. – 1788.
760. *Lagrange.* Application de la méthode exposée… Див. в зб. «Вариационные принципы механики». М.: Физматгиз, 1959. - С. 117-158.
761. *Lahaye M.E.* Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomataires des seances de L'Academie des sciences. 1934, Vol. 198. No 21 P. 1840-1842.
762. *Lame G.* Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. - Paris, Mme Vve Courcier, 1818.
763. *Lame G., Clapeyron B.P. E.* Memoire sur l'equilibre interieur des corps solides homogenes // Memoires presentes par divers savants. — 1833. — V. 4. — P. 465 — 562.
764. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris: Bachelier, 1852. – 355 p.
765. *Lame G.* Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. - Mallet-Bachelier, 1859.
766. *Langefors B.* Analysis of elastic structures by matrix coefficients, with special regard to semimonocoque structures. J. Aero. Sci. 1952. Vol. 19. — P. 451-458.
767. *Le Seur T., Jaquier F., Boscovich R.* Parere di tre mattematici sopra i danni che si sono trovati nella Cupola di S. Pietro sul fine dell' Anno 1742, presented by Poleni as Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano in 1748, expert opinion by the "tre mattematici"
768. *Lecat M.* Bibliographic du calcul des variations 1850-1913. - Gand, Paris, 1913.
769. *Lecat M.* Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'á 1850 comprenant la liste des travaux, qui ont préparé ce calcul. - Gand, Paris, 1916.
770. *Legendre Adrien Marie.* Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. – Paris: F. Didot, 1805. – 290 p.
771. *Leger A.* Les travayx publics aux temps des romains. - Paris, 1875.
772. *Leibniz G.W.* Demonstrationes novae de Resistentis solidorum // Acte Eruditorum Lipsiae 1684. — P. 319 — 325.
773. *Leibniz G.W.*, quoted by Koenig, S.: Lettre de Mr. de Leibnitz, dout Mr. Koenig a cit´e le Fragment (Octobre 16, 1707). In: Appel au Public, du Jugement de L'Acad´emie Royal de Berlin, Sur un Fragment de Lettre de Mr. de Leibnitz, cit´e par Mr. Koenig. 2nd Edition. A Leide de L'Imp. d'Elie Luzac Jun., pp. 166–171, 1753.
774. *Lejeune-Dirichlet P.G.* Vorlesungen uber Zahlentheorie. – Braunschweig, 1863.
775. *Leonardo da Vinci.* Codices Madrid (Codex Madrid I), ed. L. Reti, German facs. ed. Frankfurt a.M.: S. Fischer-Verlag, 1974.
776. *Levy S.* Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback // J Aero. Sci. 1947. Vol. 14. — P. 547-560.
777. *Liouville J.* Memoire sur l'mtegration des equations differentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points materieles. - «Journ. math.», 1849, t. XIV.
778. *Lord Rayleigh (John William Strutt).* Scientific Papers, Volume 1-6. - Cambridge : University Press, 1899–1920.
779. *Mach E.* Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-critisch dargestellt, Leipzig, 1883.
780. *Mach E.* Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 7th, rev. ed. Leipzig: F.A. Brockhaus, 1912.
781. *MacNeal R.H.* The MacNeal Schvsendler Corporation: The First Twenty Years Buena Park. CA, Gardner Litograph. 1988.

782. *Manderla H.* Die Berechnung der Sekun-darspannungen, welche im einfachen Fachwerk in Folge starrer Knotenverbin-dungen auftreten.// Allgemeine Bauzeitung, 1880, vol. 45, —P. 27-43.
783. *Mann L.* Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. — Berlin: Verlag von Julius Springer, 1927.
784. *Marcolongo R.* La meccanica di Leonardo da Vinci. - Societa Reale di Napoli, Atti della R. Academia delle Scienze Fisiche e Matematiche (2) 19, No.2, 1932. - 148 pp.
785. *Marguerre K.* 1938/1. Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 18, No. 1, pp. 57–73.
786. *Marguerre K.* 1938/2. Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung. In Proceedings of the Fifth International Congress for Applied Mechanics, pp. 93–101.
787. *Marguerre K.* 1938/3. Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme. In: Jahrbuch 1938 der Deutschen Versu anstalt für Luftfahrt e.V., Berlin-Adlershof, pp. 252–262.
788. *Marguerre K.* (ed.), 1950. Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs. Berlin: Springer-Verlag.
789. *Mariotte E.* Traite du mouvement des eaux et des autres corps fluides. — Paris: — 1686.
790. *Mariotte E.* Œuvres de Mr. Mariotte. - Leyden, 1717.
791. *Martin W.T., Reissner E.* Elementary Differential Equations Paperback – Dover Pubns, 1986. – 344 p.
792. *Marx K.* Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie, Erster Band. In: Karl Marx-Friedrich Engels-Werke, Bd. 23. Berlin: Dietz, 1979.
793. *Maupertuis P.* La loi du repos., Mem. de l'Acad. de Paris, 1740, стор. 240.
794. *Maupertuis P.* Accord de differentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles (lu a l'Academie des Sciences de 15 avril 1744) Mem. de l'Acad. d. Sci. de Paris, 1744, стор. 571.
795. *Maupertuis P.* Les Loix du Mouvement et du Repos d´eduites d'un Principe Metaphysique. In: Histoire de l'Acad´emie Royal des Sciences et des Belles Lettres, pp. 267–294. Haude, Berlin, 1746, 1748.
796. *Maupertuis P.* Oeuvres de Maupertuis, т. 4, Lyon, 1756, стор. 3-28.
797. Maupertuisiana. Collection of pamphlets related to controversy on Principle of Least Actions. Hambourg, 1753.
798. *Maxwell J.C.* On the equilibrium of elastic solids // The Transaction of the Royal Society of Edinburgh. — 1853. — V. 20. — P. 87 — 120.
799. *Maxwell J.C.* On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical Magazine, vol. 27, 1864. - pp. 294–299.
800. *Maxwell J.C.* The scientific papers. V. 1. — P. 604. — V. 2. — P. 801. — 1927.
801. *Mayer A.* Geschichte dcs Princips der Kieinsten Aktion. – Leipzig, 1877. – 180 S.
802. *McCormick C.W.* Plane Stress Analysis II Journal of the Strucrural Division, ASCE. 1963. Vol. 89, No. ST4— P. 37-54. [Русск. перевод: Мак Кормик СУ. Решение плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин М: Стройиздат. 1967-С. 142-170].
803. *McDonough J.M.* Lectures in Computational Fluid Dynamics of Incompressible Flow: Mathematics, Algorithms and Implementations, 1991. http://www.engr.uky.edu/

804. *McHenry D.* F Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems // J. Inst. Civil Eng.. 1943. Vol.21.— P. 59-82.
805. *Mehrtens, G. C.* 1903. Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Erster Band: Einführung in die Grundlagen. Leipzig: Engelmann.
806. *Mehrtens, G. C.* 1904. Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Zweiter Band: Statisch bestimmte Systeme. Leipzig: Engelmann.
807. *Mehrtens, G. C.* 1905. Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Dritter Band: Formänderungen und statisch unbestimmte Träger. Leipzig: Engelmann.
808. *Melosh R.J.* A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. // J. Aero. Sci. 1961. Vol. 28. —P. 34-42.
809. *Melosh R.J.* Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method // AIAA J., 1963, Vol. 1 —P. 1631-1637. [Русск. перевод: Мелош Р.Д. Основы получения матриц жесткости для прямого метода жесткостей // Ракетная техника и космонавтика, 1963, №7].
810. *Menabrea L.F.* Sketch of The Analytical Engine. Invented by Charles Babbage from the Bibliothèque Universelle de Genève, October, 1842, No. 82.
811. *Menabrea L.F.* Principio generale per determinare le tensioni e le pressioni in un sistema elastico. Reale Academia delle Scienze di Torino. 1857.
812. *Menabrea L.F.* Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques. In Comptes Rendus T. XLVI. - L'Academie des Sciences, Paris, 1858. - pp. 1056-1060.
813. *Mohr O.C.* Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkstraeger. // Zeitschrift des Architekten und Ingeniuer Verein zu Hannover. — 1874. — Band 20.
814. *Mohr O. Beiträge zur Theorie des Fachwerks. - Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-*Vereins zu Hannover*,* vol. 21, 1875. - pp. 17–38.
815. *Mohr O.C.* Ueber die Darstellung des Spennungzustandes und des Deformationzustandes eines Koerperselementes // Civil ingenieur. — 1882. — S. 113.
816. *Mohr O.* Über die Elasticität der Deformationsarbeit. Zivilingenieur, vol. 32, 1886. - pp. 395–400.
817. *Mohr O.* Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen // Zivilin-genieur, 1892, vol. 38, P. 577-594.
818. *Mohr O.* Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen // Zivilin-genieur, 1893, vol. 39, P. 67-78.
819. *Mote C.D.* Global-local finite element // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1971. Vol. 3 — P. 565-574
820. *Müller-Breslau H.* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. - Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1886.
821. *Müller-Breslau H.* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. - Leipzig, 1886.
822. *Müller-Breslau H.* Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Band II. Erste Abteilung. 2nd, rev. ed. - Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1892.
823. *Navier C.L.M.H.* Extrait des recherches sur la flexion des plans elastiques // Bulletin de Sciences par la Societe Philomatique. — 1823. — P. 95 — 102.
824. *Navier C.L.M.H.* Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques // Bulletin des Sciences par la Societe Philomatique. — 1823. — P. 177 — 183.
825. *Navier C.L.M.H.* Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique a l'Etablissement des Constructions et des Machines. 1er partie:

Leçons sur la résistance des materiaux et sur l'établissement des constructions en terre, en masonnerie et en charpente. - Paris: Firmin Didot pere et fils, 1826. - 288 p. 1-е изд. 1826, 2-е изд. 1833, 3-е изд. 1864.

826. *Navier C.L.M.H.* Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouve-ment des corps solides elastiques // Memoires de l'Academie des Sciences de Paris, 1827. - V. 7. - P. 375-393.
827. *Navier C.L.M.H.* Mechanik der Baukunst (Ingenieur-Mechanik) oder Anwendung der Mechanik auf das Gleichgewicht von Bau-Constructionen. Trans. from 2nd French ed. of 1833 (vol. 1) by G. Westphal (1st ed. trans. 1851) with an appendix by G. Westphal & A. Föppl, 2nd ed., Hannover: Helwing'sche Verlags-Buchhandlung. p. XV – XVI.
828. *Newton Is.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687.
829. *Noack W.G.* Prof. Dr. A. Stodola // Festschrift Prof. Dr. A. Stodola zum 70 Geburtstag. — Zuerich und Leipzig: Orell Fussli Verlag. — 1929. — S. IX — XXIII.
830. *Oden J.T.* Numerical formulation of a class of problems in nonlinear viscoelasticity // Advan. Astronautical Sci.. 1967. Vol. 24.
831. *Oden J.T.* A general theory of finite elements - II. Applications // Int. J. Numer. Meth. FZngrg. 1969. Vol. l.No3 P. 247-260.
832. *Oden J.T.* Some contributions to the mathematical theory of mixed finite element approximation // Theory and Practice in Finite [{lenient Structural Analysis — Tokyo: University of Tokyo Press, 1973. — P. 3-23.
833. *Oden J.T., Reddy J.N.* Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements // Int. J. Numer. Meth. Eng, 1973, No 1. - P. 55-61.
834. *Oden J.T., Reddy J.N.* Some observation on properties of certain mixed finite element approximations // Int. J. Numer. Meth. Eng, 1975. Vol. 9. No. 4. - P. 933-938.
835. *Oden J.T.* Historical comments on Finite Elements. In: Proceedings of the ACM conference on History of scientific and numeric computation, ed. G. E. Crane, pp. 125–130. New York: ACM Press, 1987.
836. *Odqvist F.K.G.* Historical survey of the development of creep mechanics from its beginning in the last century to 1970. // Creep in Structures. - Berlin: Springer Verlag, 1981. - P. 1-12.
837. *Ostenfeld A.* Berechnung statisch unbe-stim-mter Systeme mittels der "Deformations-methode // Der Eisenbau, 1921, vol. 12, No. 11 - P. 275-289.
838. *Ostrogradsky M.* Sur les integrales des equations generales de la dynamique. Melanges de L'academie de St. Petersbourg, 6/18 oct 1848, изб. произв., изд. АН СССР, 1958.
839. *Papenfuss B.W.* Lateral plate deflection by stiffness matrix methods with application to a marquee. M.Sc. thesis. Dept. Civil Engng, Univ. of Washington. Seattle. 1959.
840. *Parent.* De la veritable raecanique de resistance relative des solides, Essais et reherches des raathematiques et des physiques. 111 c vol., XIV-e memoire, Paris, 1713.
841. *Pars L.* A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London, 1965.
842. *Pasternak P.* Beitrage zur Berechnung vielfach statisch unbestimmter Stabsystc-me. // Der Eisenbau, 1922, vol. 13, No. II. — P. 239-254.
843. *Perelmuter A.V., Slivker V.I.* Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls.– Bejlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer Verlag, 2003.– 600 p.
844. *Persy N.* Cours de stabilite des constructions a l'usage des eleves de l'Ecole d'application de 1'artillerie et du genie. – Metz, 1834.
845. *Pian T., Tong P.* Basis for finite clement methods for solid continua // Int. J. Num. Meth. Eng. 1969. Vol. l. No. 1. - P. 3—28.

846. *Poceski A., Simonee V.* Metodot na konecni elementi i hegovata primena // Gradezen fakultet. Skopje, 1972.
847. *Poceski A.* A mixed finite element method for bending of plates // Int. J. Num. Meth. Eng. 1975. Vol.9. No.1.— P. 3- 15.
848. *Poceski A.* From deformation to mixed and hybrid formulation of the finite element method // J. Theor. App. Mechanics. Yug ociety of Mechanics. Belgrade. 1979. No. 5.
849. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la Mécanique celeste, t. 1. Paris, 1892.
850. *Poisson S.D.* Memoire sur 1'equilibre et du mouvement des corps elastiques // Memoires de 1'Academie des sciences de Paris. — 1829. — V. 8. — P. 357 — 570.
851. *Poisson S.D.* Traite de mecanique. V. 1-2. — Paris: — 1833.
852. *Poncelet J.V.* Cours de mecanique appliquee aux machines, Paris: 1826.
853. *Poncelet J.V.* Introduction a la mecanique industrielle faite aux artistes et ouvriers messins. — Paris: Part I. — 1827-1828. — Part II. -1828-1829. — Part III. — 1831.
854. *Pöschl T.* 1936. Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Der Bauingenieur, vol. 17, No. 17/18, pp. 160ff.
855. *Prange G.* Die Variations-und Minimal-prinzipe der Statik der Baukostruktionen Technische Universität in Hannover, 1916.
856. *Prato C.* A mixed finite element method for thin shell analysis // Ph. D. Th. Dept. Civil Eng. MIT, 1968. 1 119. Przemienieeki J.S. Matrix Structural Analysis of Substructures // AIAA Journal. 1963. Vol.1 — P. 138-147.
857. *Prony G. de.* Notice biographique sur Navier. In: Résumé des Leзons données a l’Ecole des Ponts et Chaussйes sur l’Application de la Mécanique a l’Etablissement des Constructions et des Machines, pp. x-lj. Brussels: Société Belge de Libraire, etc.
858. *Przemienieeki J.S., Denke P.H.* Joining of Complex Substructures by the Matrix Force Method // Aircraft, 1966, Vol.3 - P. 236-243.
859. *Przemienieeki J.S.* Theory of matrix structural analysis. — N.Y.: McGaw-Hill, 1968.
860. *Ramme W.* Über die geschichtliche Entwicklung der Statik in ihren Beziehungen zum Bauwesen. Braunschweig: Waisenhausbuchdruck, 1939.
861. *Rand T.* An approximate method for computation of stresses in svveptback wings // J. Aero. Sci., 1951, Vol. 18. —P. 61-63.
862. *Randall J.H., Jr.* The place of Leonardo da Vinci in the emergence of modern science, pp.207-218 в Roots of Scientific Thought, N.Y., Basic Books, 1957.
863. *Rankin W.J.M.* An experimental inquiry in to the advantage of cylindrical wheels on railways // Proceedings of the Institute of Civil Engineers. — 1843. — T. 2. — P. 102.
864. *Rankin W.J.M.* Manual of applied machanics. — London: 1858.
865. *Rayleigh J.W.S.* The Theory of Sound, vol. I. - New York, 1877.
866. *Rayleigh J.W.S.* The Theory of Sound, vol. II. - New York, 1878.
867. *Rayleigh J.W.S.* Die Theorie des Schalles. Erster Band. Trans. from the English by F. Neesen. - Braunschweig: Vieweg, 1879.
868. *Rayleigh J.W.S.* Die Theorie des Schalles. Zweiter Band. Trans. from the English by F. Neesen. - Braunschweig: Vieweg, 1880.
869. *Rayleigh J.W.S., Lindsay Robert B.* The Theory of Sound vol. I - London : Macmillan, 1877, 1894. [Переклад російською: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 1. — 503 с.]

870. *Rayleigh J.W.S., Lindsay Robert B.* The Theory of Sound vol.II - London: Macmillan, 1878, 1896. [Переклад російською: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 2. — 474 с.]
871. *Reissner E.* On a variational theorem in elasticity. J. Math. And Phy. S., 1950. 29, №2. – P. 90-95.
872. *Reissner E.* Selected Works in Applied Mechanics and Mathematics. - Subdury: Jones & Burlett Publishers, 1996.
873. *Riccati G.* Delle vibrazioni sonore dei cilindri // Memorie ci Matematica e Fisika della Societa Italiane. — Verona: 1782. — T. 1. — P. 447-525.
874. *Riccati J.* Extracts from letters // The sources of science. — 1968. — V. 2, N 35. — New York and London: Johnson Reprint Corporation. — P. 101-102.
875. *Riedel W.* Beitrage zur Losung des ebenen Problems eines elastischen Korpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion // Zeitschrift fur angevvandte Mathematik und Mechanik (7.AMM), 1927, Vol.7, No. 3. P. 169-188.
876. *Riks E.* Some computational aspekt of the stability analysis of nonlinear structures // Conp. Method Appl. Mech. Eng.. 1983. Vol. 47 — P. 219-259.
877. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik." J. reine angew. Math. 135, 1-61, 1908.
878. *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern.– Annalen der Physik, 28. – 1909. – P. 737–786.
879. *Ritz W.* Gesammelte Werke – OEuvres. - Societe suisse de physique, Gauthier-Villars, Paris, 1911, page viii.
880. *Roache P.J.* Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers, Albuquerque, NM, 1972.
881. *Robinson Andrew* (2006). The Last Man Who Knew Everything: Thomas Young, the Anonymous Polymath Who Proved Newton Wrong, Explained How We See, Cured the Sick and Deciphered the Rosetta Stone. New York: Pi Press. ISBN 0-13-134304-1.
882. *Robinson J.* Structural Matrix Analysis for the Engineer. -- New York: John Wiley & Sons, 1966.— 344 p.
883. *Saint-Venant B.* Memoires sur la resistance des solides suivis de deux notes la flexion des pieces a double cuorbure. — Paris: 1844.
884. *Saint-Venant B.* Memoire sur l'impulsion transversale et la resistance vive des barres elastiques appuyees aux extremites // Comptes rendus. — 1857. — T. 14. — P. 204 — 208.
885. *Saint-Venant B.* Divers resultats relatifs a la torsion // Bulletin de sciences par la Societe Philomathiques. — 1863. — P. 28 — 31.
886. *Saint-Venant B.* Historique abrege des recherches sur la resistance et sur l'elasticite des corps solides // Navier L. M. H. Resume des lecons donnes a l'ecole des ponts et chaussees sur l'application de la mecanique. Resistance des corps solides. — Paris: 1864. — P. XC — CCCXL.
887. *Sarton G.* Discovery of conical refraction by William Rowan Hamilton and Humphrey Lloyd (1833). ISIS 17, 1932. – P. 60.
888. *Schellbach K.H.* Probleme der Variationsrechnung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 41, No. 4, pp. 293–363. 1851.
889. *Schleusner A.* Das Prinzip der virtuellen Verruckungen und die Variationsprinzipien der Elastizitatstheorie. // Der Stahlbau. 1933, vol. 6. No. 19, P.— 145-149.
890. *Schleusner A*. 1938/1. Zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Beton und Eisen, vol. 37, No. 15, pp. 252–254.

891. *Schleusner A.* 1938/2. Erwiderung zu Kammüller 1938/1. Beton und Eisen, vol. 37, No. 16, p. 271.
892. *Schleusner A.* 1938/3. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie. Der Stahlbau, vol. 11, No. 24, pp. 185–192.
893. *Schwedler J.W.* Theorie der Brueckenbalkensysteme // Zeitschrift. Bauwesen. — Berlin: — 1851. — T. 1.
894. *Serret J.A.* Memoire surie principe de la moindre action. CR. Mem. Akad. De Sc., 1871.
895. *Signorini A.* Sopra alcune questioni di Elastostatica. – Atti della Socicta Italiana per il Progresso della Scienza, 1933.
896. *Signorini A.* Questioni di elasticiti non linearizzata o semilinearizzata//Rend, di Matem. e. delle sue appl.– 1959.– P. 17–31.
897. *Spiess O.* Die Mathematiker Bernoulli. – Basel, 1948.
898. *Stein E.*(edr). The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering, 2014, Spinger.
899. *Stevin S.* De Beghinselen der Weeghconst, 1586.
900. *Strang G., Fix G.* An analysis of the finite element method — New York Prentice-Hall, 1973 — 414 p. [Русский перевод: Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов — М.: Мир. 1977 — 349 с].
901. *Straub H.* Die Geschichte der Bauingenieurkunst. 4th, rev. ed., ed. Peter Zimmermann. - Basel: Birkhäuser, 1992.
902. *Stüssi F.* Über die Entwicklung der Wissenschaft im Brückenbau. In: Neujahrsblatt, ed. Naturforschende Gesellschaft in Zurich, 1839. 1964.
903. *Szabo B.A., Eee C.C.* Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by GalerkhTs methods//Int. J.Numer. Meth. Engrg. 1969. Vol. l.No3 P. 301-310.
904. *Szabo I.*: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen, 3rd enhanced edn. Birkh¨auser, Basel, 1987
905. *Szabo I:* Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen (History of Principles of Mechanics and its most important Applications). Birkh¨auser, Basel, 1979
906. *Szewalski R.* Zyciorys // M. T. Huber. Pisma. T. I. — Warszawa: Panstwowe wydawnictwo naukowe. — 1964. — S. 9-20.
907. *Szewalski R.* Wlodzimierz Burzynski (1900-1970) // Wlodzimierz Burzynski. Dziela wybrane. — Warszawa: Panstwowe wydawnictwo naukowe. — 1982. — S. 9-17.
908. *Taylor E.F.* Principle of Least Action. MIT, 2008.
909. *Tait P.G.* Memoire // Missellaneous scientific papers by W. J. Macquom Rankine. — London: Charles Griffin and Company, 1881. — P. 19 — 36.
910. *Timoschenko S.* Stabilitätsprobleme der Elastizitätstgeorie // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1910, Band 58, №4 —S. 337-385.
911. *Timoshenko S.* On the Distribution of Stresses in a Circular Ring Compressed by Two Forces along a Diameter.- Phil. Mag., Vol. 44, 1922.
912. *Timoshenko S.P., Baud R.V.* Strength of gear teeth in greatly affected by fillet radius // Automotive industries, 1926, vol. 55, №4, July 22. - P. 138-142.
913. *Timoshenko S.P.* History of strength of materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. - New York: McGraw-Hill, 1953. – 452 p.
914. *Timoshenko S.P.* History of the development of strength of materials in Russia // Problemi attuali di scienz e di culdura. Rome, 1953, Quaderno, № 29, - 8 p.

915. *Timoshenko S.P.* Engineering education in Russia. New Yontr McGraw - Hill book Co. Inc. 1959. – 47 p. [Перевод на русский язык: С.П. Тимошенко. Инженерное образование в России. ВИНИТИ. Люберцы. 1996. - 82 с.]
916. *Timoshenko S.P.* Erinnerungen Stepan P. Timoshenko: Eine Autobiographie. Trans. From the Russian by Albert Duda. Berlin: Ernst &Sohn, 2006.
917. *Todhunter I., Pearson K.* A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to lord Kelvin. V. I: Galilei to Sain-Venant — 936 p. V. II. Saint-Venant to lord Kelvin. Part I — 762. p. Part II — 546 p. — New-York: Dover Publications. Inc. — 1960.
918. *Tong P.* Exact solution of certain problems by finite element method. – ALAA Journal, 1969, N 1, pp 178-180.
919. *Tredgo1d T.* A practical essay on the strength of cast iron. 1821.
920. *Trefftz E.* Ein Gegenstück zum Ritzschen Ritzschen Verfahren // Verhandlung 2-en International Kongress Technische Mechanik. — Zürich-Leipzig: Fusseli, 1926 — S. 131-137.
921. *Trefftz E.* Konvergenz und Fellerabschätzung beim Ritzschen Verfahren // Mathematische Annalen, 1928, Bd. 100, Heft 1 — S. 503-521.
922. *Trefftz E.* Ueber die Spanungsverteilung in tordierten Staben bei teilweisser ueberschreitung der Fliessgrenze // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. — 1925. Band 5.
923. *Tribout H.* Un grand savent Ie general Jean Victor Poncelet, 1788-1867. — Paris: 1936- — 225 p.
924. *Truesdell C.* Rational fluid mechanics, 1687-1765// L. Euler. Opera omnia, v. 11-12 (1954), p. vii-cxxv.
925. *Truesdell C.* The first three sections of Euler's treatise on fluid mechanics (1766). The theory of aerial sound, 1687-1788// L. Euler. Opera omnia, v. 11-13 (1956), p. vii-cxvii.
926. *Truesdell C.* The rational mechanics of elastic or flexible bodies, 1638-1788// L.Euler. Opera onmia, v. H-11:2 (1960). - 435 p.
927. *Truesdell C.A.* Die Entwicklung des Drallsatzes. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 44, No. 4/5, 1964/ - pp. 149–158.
928. *Truesdell C.* Six Lectures on Modern Natural Philosophy. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1966.
929. *Truesdell C.A.* Essays in the history of mechanics. - Berlin: Springer Verlag, 1968. - 384 p.
930. *Truesdell C.* Leonard Euler, supreme geometer (1707-1783)// Studies in XVIIIth Century Culture, v. 2. Case Western Reserve Univ. Press, 1972, p. 51-95.
931. *Truesdell C.* The Tragicomical History of Classical Thermodynamics, 1822—1854. — Springer-Verlag, 1980.
932. *Truesdell C.* An idiot's fugitive essays on science: Methods, criticism, training, circumstances. New York e.a.: Springer, 1984. — 654 p.
933. *Truesdell C.* What did Gibbs and Caratheodory leave us about thermodynamics?// New Perspectives in Thermodynamics. Berlin e.a.: Springer, 1986. - p. 101-124.
934. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. Vol. 1. 2nd augm. ed. Boston e.a.: Academic Press, 1991. — 391 p.
935. *Truesdell C.* Sophie Germain: Fame earned by stubborn error// Boll, storia sci. mat., 1991, v. 11:2, p. 3-24.
936. *Truesdell C.* Jacopo Ricatti: un grande "savant" del '700: Vita, studi, carattere//1. Ricatti. Firenze: Olschki, 1992, p. 1-25.
937. *Tulio Levi-Civita e Ugo Amaldi.* Lezioni di meccanica razionale. Vol. 1-2.– Bologna, 1930. [Є переклад російською: *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – Т. 1, ч. 2. – М., 1962].

938. *Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.* Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures//J. Aero. Sci. 1956. Vol. 23. No. 9. —P. 805-824.
939. *Turner M.J.* The direct stiffness method of structural analysis. // Structural & Materials Panel Paper, AGARD Meeting, Aachen. 1959.
940. *Turner M.J., Martin H.C., Weikel R.C.* Further development and applications of the stiffness method // AGARDograph 72: Matrix Methods of Structural Analysis —Oxford: Pergamon Press, 1964.-P. 203-266.
941. *Varignon P.* Projet d'une nouvelle mécanique, 1687.
942. *Varignon.* De la resistance des solides en general pour tout ce qu'on peut faire d'hypothesis touchant la force ou la tenacite des fibres des corps a rompre; et en particulier pour les hypotheses de Galilee et de M. Mariotte // Histoire de l'Academie Royale des Sciences Annee 1702. – Paris: 1704. — P. 66 — 94.
943. *Varignon*. Nouvelle mécanique, т. 2, - Paris, 1725.
944. *Voltaire.* Diatribe du Docteur Akakia, M´edecin du Pape, Rome, 1753a. In: [Maupertuisiana, 1753, p. 311].
945. *Voltaire*: Histoire du Docteur Akakia et du Natif de St. Malo (Containes Diatribe, Trait´e de Paix among other documents), 1753b.
946. *Wagner R., Egermann R.* Die ersten Drahtkabelbrücken. Düsseldorf: Werner-Verlag, 1987.
947. *Washizu K.* 1955. On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity. Aeroelastic and Structures Research Laboratory, MIT, Technical Report 25-18, March.
948. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. - Pergamon Press, U.S.A., 1975.
949. *Whittaker E.T.* (1960) A History of the Theories of Aether and Electricity. Vol. 1. The Classical Theories. (New York, Harper and Brothers).
950. *Weber H.* Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen // Mathematische Annalen., 1869, Vol. 1 — P. 1–366.
951. *Williamson F.* An historical note on the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, pp. 930–934. 1979.
952. *Wilson E.L.* Matrix Analysis of Nonlinear Structures // Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.
953. *Wilson E.L.* SAP-A General Structural Analysis Program, UCB/SESM Report No. 70/21. University of California, Berkeley, 1970.
954. *Wilson E.L.* Automation of the finite element method, a personal historical view. // Finite Elements in Analysis and Design, vol. 13. — Amsterdam: Elsevier, 1993. — P. 91-104.
955. *Winkler E.* Formaenderung und Festigkeit gekruemmter Koerper, inbesondere der Ringe // Der Civiligenieur. — 1858. — Bd 4. S. 232 — 246.
956. *Winkler E.* Beitraege zur Theorie der Continnierlichen Bruchentraeger // Der Civiligenieu. - 1862. — Bd 8. S. 135 — 182.
957. *Winkler E.* Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit. Prague: H. Dominicus, 1867.
958. *Winkler E.* Theorie der continuierlichen Trager. Zeitschrift des osterreichischen // Ingenieurund Architekten-Vereines, 1872, vol.24, —P. 27-32, 61-65.
959. *Winkler.* Lage der Stutzlinie im Gewolbe, Deutsche Bauzeisung, 1879, S. 117, 127, 139; 1880, S. 58, 184, 210, 243.
960. *Winkler E.* Die Sekundar-Spannungen in Eisenkonstruktionen // Deutsche Bauzeitung. 1881. vol. 14 —P. 1104 11, 129-130 & 135-136.
961. *Winkler E.* Alberto Castigliano, Deutsche Bauzeitung, 1884, vol. 15, pp. 570-573.

962. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. – Berlin: Springer-Verlag, 2002.

963. *Young T.* A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. — London. — 1807. — V. 2. — 738 p.

964. *Yu Y.Y.* Generalized Hamilton's principle and variational equation of motion in nonlinear elasticity theory, with application to plate theory. — Journal of the Acoustical Society of America, 1964, v. 36, No. I, p. 111—119.

965. *Zammattio C.* Naturwissenschaftliche Studien. In: Leonardo. Künstler – Forscher – Magier, ed. L. Reti. Frankfurt a. M.: S. Fischer, 1974.

966. ZAMM-Z. Angew. Math.u.Mech. (Журнал Прикладной Математики и Механики) т.65.–1985 вып..2, сс. 121-125.

967. *Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K.* Finite Element Method of Analysis for Arch Dam Shells and Comparison with Finite Difference Procedures // Proc. Symp. on Theory of Arch Dams. Univ. Southampton. (Theory of Arch Dams. Pergamon Press, 1965) — P. 123-139.

968. *Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K.* The Finite Element Method in Engineering Science — London: McGraw-Hill, 1967. 272 p. [Русск. перевод: Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред - М.: Недра, 1974. - 240 с.]

969. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 1. The Basis. - Oxford: Butterworth-Heineann; 5 edition, 2000. - 689 p.

970. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics. The Basis. - Oxford: Butterworth-Heineann; 5 edition, 2000. - 457 p.

971. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 3. Fluid Dynamics. The Basis. - Oxford: Butterworth-Heineann; 5 edition, 2000. - 334 p.

972. *Zienkiewicz O.C.* The birth of finite element method and computational mechanics. – International Journal for Numerical Methods in Engineering. vol. 60, 2004. - p.3-10.

973. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. - Butterworth-Heineann; 6 edition, 2005. - 736 p.

974. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.* The Finite Element Method for Fluid Dynamics. - Butterworth-Heinemann; 6 edition, 2005. – 400 p.

975. *Zweiling K.* 1953. Gleichgewicht und Stabilität. Berlin: Verlag Technik.

976. *鷲津久一郎,池川昌弘著 鷲津, 久一郎, 池川, 昌弘*; Kyūichirō Washizu, Masahiro Ikegawa. 有限要素法; Yūgen yōsohō. - 岩波書店, 1987. – 221 p.

ЧАСТИНА III

ПРЯМІ МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ І ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ

У світі існують речі більш важливі, ніж прекрасні відкриття - це знання методу, яким вони були зроблені.

Г. Лейбніц

Наука резюмується в методі.

Г. Гегель

Під методом я розумію певні і легко здійснимі правила, суворе дотримання яких не дозволяє приймати за істину те, що є хибним, і дає можливість розуму, не виснажуючись в марних зусиллях, досягати істинне пізнання речей, наскільки тільки його можна досягти.

Рене Декарт

НАРИС 14

ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ. РІТЦ, БУБНОВ, ГАЛЬОРКІН, ТРЕФФЦ, КАНТОРОВИЧ

> *Ви гадаєте, все так просто? Так, все просто. Але зовсім не так.*
>
> А. Ейнштейн

> *Хотілося б прийняти участь, як мінімум – бути присутнім, але якщо не вдалося, то хоча б знати, як це було.*
>
> С.І. Зуховицький

Класичний метод розв'язання варіаційних задач, заснований на зведенні їх до диференціальних рівнянь Ейлера, часто виявляється недостатньо ефективним, не дивлячись на його велике теоретичне значення. У зв'язку з цим були розроблені методи чисельного розв'язку варіаційної задачі в її початковій постановці, без переходу до рівняння Ейлера. Вони отримали назву прямих методів варіаційного числення.

Важко дати точне визначення, яке окреслювало б цю групу методів. За визначенням С.Л. Соболєва «прямими називаються такі методи наближеного розв'язання задачь теорії диференціальних і інтегральних рівнянь, які зводять ці задачня до скінченних систем рівнянь алгебри».

Існують два основні класи методів наближеного відшукання невідомих функцій - методи зменшення числа ступенів свободи і методи дискретизації.

У методах першого класу незалежні змінні в принципі залишаються безперервними, але функція шукається в тому або іншому спеціальному вигляді, що включає декілька параметрів, які потім підбираються за вимоги найкращим чином задовольнити умови задачі. І якщо вдається правильно передбачати форму шуканого рішення, задавши її з точністю до невеликого числа параметрів, а також вдало вибрати критерій якості наближення, то такі методи виявляються надзвичайно ефективними.

У методах другого класу - вони називаються також сітковими — шукана функція із самого початку замінюється набором її значень у вузлах деякої сітки. Сіткові методи зазвичай бувають більш універсальними і алгоритмічними, ніж методи першого класу; тому вони широко застосовуються при роботі на ЕОМ.

Історія розробки і розвитку цих методів сходить до творців варіаційного числення і в дуже грубій періодизації розбивається на два етапи. У першому з них, такому, що тривав приблизно від XVIII-го до першої чверті XX-го ст. превалювали методи першого класу, згодом поступово головне місце посіли методи другого класу. Це не означає повної відмови від «другорядних» підходів, а просто говорить про основні тенденції тієї або іншої епохи.

14.1. Метод Релея-Рітца

Метод був запропонований Релеєм в 1873 р. для визначення частоти коливань основного тону пружної системи [Rayleigh, 1873], а потім і для визначення вищих частот [Rayleigh, 1899].

Лорд Релей, англ. Rayleigh John William (1842-1919) - британський фізик і механік. Його основні роботи відносяться до теорії коливань, одним з основоположників якої він є. Застосування даної теорії він знаходив в самих різних областях – в теорії пружності, акустиці, оптиці, електриці і інших. В акустиці Релей досліджував коливання струн, пластинок тощо; досліджував коливання циліндричної, конічної і сферичної оболонок. У 1873 р. він сформулював ряд фундаментальних теорем, які дозволяють робити якісні висновки щодо власних частот коливальних систем, і розробив кількісний метод збурень для знаходження власних частот коливальної системи, що мало відрізняється від простої системи з відомими власними частотами.

Релей зробив значний внесок в розвиток теорії пружності. У його праці «Теорія звуку» (1877-78 рр.; 2-е видання – 1894-96 рр.) наведені і систематизовані отримані їм фундаментальні результати з теорії коливань пружних систем. Значним відкриттям Релея стала його теорія поверхневих пружних хвиль (хвилі Релея, 1885-1887 рр.). У теорії пружних хвиль Релей розглянув також питання розсіяння і поглинання хвиль, досліджував хвилі скінченної амплітуди.

Релей заклав основи теорії молекулярного розсіювання світла (зокрема, ввів поняття про так зване релеєвське розсіювання світла). Встановивши зворотну пропорційність інтенсивності розсіювання середовищем світла четвертому ступеню довжини збуджуючої хвилі (закон Релея), він пояснив блакитний колір неба. У 1900 р. Релей відкрив закон розподілу енергії випромінювання в спектрі абсолютно чорного тіла залежно від температури (закон Релея-Джинса). Ця робота мала велике значення для виникнення квантової теорії. Приблизно в цей же час Релей побудував теорію локалізації людиною напряму на джерело звуку з використанням різниці часу приходу звуку в праве і ліве вухо.

У 1894 р. він разом із Вільямом Рамзі (William Ramsay) відкрив новий хімічний елемент - аргон і визначив його властивості і місце в періодичній системі елементів (Нобелівська премія з фізики 1904 р. з формулюванням: «За дослідження щільності газоподібних елементів і відкриття у зв'язку з цим аргону»).

Розв’язок задачі будувався на основі варіаційного принципу Релея[1], згідно з яким форми власних коливань є стаціонарними точками функціонала внутрішньої енергії $\boldsymbol{U}$ на множині функцій u, що задовольняють граничним умовам і мають задану (одиничну) кінетичну енергію $\boldsymbol{K}$. Цей принцип еквівалентний твердженню про стаціонарність так званого відношення Релея

$$R = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{K}},$$

яке досягає мінімального значення рівного квадрату власної частоти, якщо у вирази для функціонала $\boldsymbol{U}(u)$ і $\mathrm{K}(u)$ підставити відповідний власний вектор.

Релей визначав частоти коливань, задаючись з точністю до деяких параметрів відповідною формою u, і визначав ці параметри виходячи з мінімізації R.

Однією з можливостей здійснення прямих методів варіаційного числення є спосіб побудови мінімізуючих послідовностей з таким розрахунком, щоб з побудованої мінімізуючої послідовності шляхом деякого граничного переходу виходила б шукана функція, що дає найменше значення нашому функціоналу. Якщо таким шляхом вдається довести задачу до кінця, то цей прийом приводить до розв’язку граничної задачі для диференціального рівняння, яке виражає необхідну

---

[1] До Релея частинна форма цього варіаційного принципу була відома Веберу, в роботі якого [Weber, 1869] дається рекурсивне визначення власних значень стосовно до задачі про коливання мембрани.

умову екстремуму досліджуваного функціонала. На цьому принципі заснований відомий метод Рітца розв'язку варіаційних задачь.

Вальтер Рітц, нім. Walter Ritz (1878-1909) – швейцарський фізик-теоретик і математик. Закінчив Цюріхський університет. Працював в Геттінгені, Бонні, Парижі, Цюріху, Тюбінгені. Роботи з фізики присвячені спектроскопії, теорії теплового випромінювання, електродинаміці, в математиці – створенню методу розв'язання варіаційних задач. В. Рітц навчався в Цюріхському університеті на одному курсі з А. Ейнштейном. Їхній викладач математики Г. Мінковський писав: «... Свого часу Луї Коллрос здавався мені, як, мабуть, і іншим колегам, найобдарованішим в галузі математики з усіх студентів свого курсу, а це чимало важить. Бо саме цей нечисленний курс факультету VI-A дав видатних дослідників: Альберта Ейнштейна, Вальтера Рітца і Марселя Гроссмана». У 1908-1909 роках Рітц і Ейнштейн вели наукові дискусії у пресі з питання про те, що зараз прийнято називати стрілами часу в електродинаміці і ентропією. Рітц і Ейнштейн написали у співавторстві статтю «До сучасного стану проблеми випромінювання». Вальтер Рітц раптово помер у 31-річному віці від наслідків туберкульозу.

Ідея методу Рітца [Ritz, 1908] полягає в приведенні нескінченновимірної задачі до скінченновимірної. Суть методу, полягає в тому, що шукана функція u, яка доставляє стаціонарне значення використовуваному функціоналу $\Pi(u)$, задається приблизно у вигляді лінійної комбінації (n-наближення)

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \, , \tag{14.1}$$

де координатні функції φ_i беруться з послідовності $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Підстановка (14.1) у функціонал перетворює його на функцію $\Pi(u_n)$ від коефіцієнтів розкладання a_i, і таким чином проблема мінімуму функціонала перетворюється на задачу мінімізації функції n змінних.

Це приводить до необхідності розв'язку системи рівнянь

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \, , \tag{14.2}$$

які є лінійними, якщо функціонал квадратичний.

Ефективність свого методу Рітц продемонстрував на розв'язках декількох задач, у тому числі і на двох задачах механіки: задача про згин жорстко затисненої по контуру прямокутної пластинки під дією нормального тиску і задача про власні коливання струни. Він показує, що знайдені за його способом частоти власних коливань струни дуже близькі до відомих точних розв'язків.

У задачі про згин пластинки Рітц виходить з виразу потенціальної енергії

$$\Pi=\iint\left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]-wq\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (14.3)$$

і підставляє в (14.3) наближене подання (14.1), в якому кожна координатна функція φ_i задовольняє граничним умовам задачі.

Рітц розумів, що метод вимагає обгрунтування, але такого роду результати були отримані пізніше в роботах інших математиків (Р. Курант, До. Фрідріхс, С.Л. Соболєв та ін.). Зокрема, були встановлені умови, що гарантують збіжність методу Рітца, тобто виконання граничного співвідношення для мінімізуючої послідовності

$$\left\|\Pi(u)-\Pi(u_n)\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty. \quad (14.4)$$

Вони зводяться до трьох вимог:

- координатні функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ повинні бути лінійно незалежні при будь-якому n;
- координатні функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ належать області визначення функціонала, що мінімізується, і задовольняють всім його додатковим умовам (як то кажуть, мають належати його енергетичному простору);
- система координатних функцій $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ повинна бути повною в просторі станів, тобто цією послідовністю може бути скільки завгодно точно апроксимований будь-який елемент простору.

За допомогою методу Рітца розв'язана величезна кількість задач теорії пружності, що відносяться, головним чином, до дослідження статичної рівноваги пластин і оболонок, а також до тривимірних задач теорії пружності. С.П. Тимошенко пише [Тимошенко, 1957]: «Ймовірно ніякий інший математичний прийом не дозволив розвернути наукові дослідження з опору матеріалів і теорії пружності в такому широкому ступені як цей метод».

Успішність застосування методу Рітца істотно залежала від вибору системи координатних функцій, крім того, помітні труднощі викликала проблема вирішення розв'язувальної алгебраїчної системи рівнянь (14.3) в тих випадках, коли розв'язувалися нелінійні задачі теорії оболонок, що приводять до неквадратичних функціоналів. До появи ЕОМ в таких задачах найчастіше обмежувалися першим наближенням (n=1). Навіть короткий огляд отриманих тут результатів виходить далеко за межі даних нарисів.

І Релей і Рітц цікавилися в першу чергу задачами про визначення частот і форм власних коливань пружних тіл. І вже в своїй наступній роботі [Ritz, 1909] Рітц, що почав свої дослідження з класичної задачі про коливання струни, розв'язав складнішу за кількістю обислень задачу про власні коливання квадратної пластинки. Зокрема він продемонстрував отримані за допомогою свого методу фігури Хладні. У такий спосіб Рітц шляхом зіставлення розрахунку з експериментальними даними Хладні, ілюстрував правильність своїх розрахунків.

Сумним фактом було те, що старий на той час Релей видав статтю [Strutt, 1911], у якій він звинувачував Рітца у плагіаті і стверджував, що всі ідеї Рітца вже були присутні в його власній попередній роботі. Детальне дослідження всіх оригінальних публікацій [Leissa, 2005] прояснило, що звинувачення були абсолютно безпідставними.

Взагалі, на Заході робота Рітца була зустрінута без ентузіазму. У Геттінгені, де Рітц працював, і який був на той час основним центром математичних досліджень, важливість винаходу Рітца не була відмічена, а голова Геттінгенської математичної школи Курант, указуючи у виносці на можливість зведення проблеми мінімізації квадратичного функціонала до системи лінійних рівнянь [Hurwitz, Courant, 1922], не згадує метод Рітца. Невеликий інтерес Куранта до практичних питань навіть примусив його видалити цю виноску з другого видання згаданої книги. Таким чином, він видалив історично перший опис того, що пізніше стало одним з найважливіших інструментів для наукового числення.

Першим, хто застосував метод Рітца до задачі про стійкість рівноваги, був С.П. Тимошенко [Тимошенко, 1910], [Timoschenko, 1910].

Степан Прокопович Тимошенко (1878 – 1972) російський, український і американський учений-механік. Іноземний член АН СРСР. Професор Мічиганського і Стенфордського університетів.

Є автором безлічі праць в області механіки суцільних середовищ і опору матеріалів. Розробив теорію стійкості пружних систем, розвинув варіаційні принципи теорії пружності і застосував їх при розв'язанні різних інженерних задач. С.П. Тимошенко розробив теорію згину стержнів і пластин з урахуванням зсувних деформацій (у сучасній будівельній механіці широко уживаються поняття «плита Тимошенко», «балка Тимошенко»), виконав цикл робіт з кручення, удару і коливань стержнів, розв'язав задачу про концентрацію напружень поблизу отворів (задача Тимошенко).

Вплинув на інженерну освіту, створив класичні навчальні посібники «Курс опору матеріалів» (1911) і «Курс теорії пружності»

З 1896 по 1901 роки навчався в Петербурзькому інституті шляхів сполучення. Після закінчення інституту залишився в ньому як асистент механічної лабораторії. У 1903 р. Тимошенко перейшов працювати в механічну лабораторію Петербурзького політехнічного інституту, в 1905 р. працював в Геттінгенському університеті у німецького механіка Л. Прандтля.

У 1907 р. стає професором на кафедрі опору матеріалів в Київському політехнічному інституті. У 1911 році був звільнений через студентські заворушення. У період з 1912 по 1917 роки працював в Петрограді. Був консультантом при побудові суден військового флоту. У 1917 р. відряджався до Києва, де брав участь в організації Української академії наук і став одним з перших її академіків. Організатор і перший директор Інституту технічної механіки. Восени 1919 р. УАН припинила роботу, і

Степан Прокопович прийняв рішення покинути державу. Дізнавшись, що в Хорватії відкрився новий Політехнічний інститут, Степан Прокопович переїздить до Загребу, де стає професором на кафедрі опору матеріалів в Загребському політехнічному інституті.

У 1922 р. переїхав до США, працював в дослідницькому відділі компанії «Вестінгауз» на посаді інженера. З 1927 р. - професор кафедри прикладної механіки університету штату Мічіган в місті Енн-Арбор. В університеті пропрацював 6 років до 1934 р., з 1936 р. стає професором Стенфордського університету . Тут він жив і працював продовж 36 років.

Виходячи з виразу потенціалу всіх сил для поздовжньо стиснутого стержня

$$\Pi(w)=\frac{1}{2}\int_0^L EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x-\frac{1}{2}N\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x \qquad (14.6)$$

і враховуючи, що в критичному стані рівноваги потенціал П дорівнює нулю, Тимошенко визначає критичну силу як

$$N_{cr}=\frac{\int_0^L EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x}{\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x}. \qquad (14.7)$$

У цей вираз підставляється прогин (форма втрати стійкості) у вигляді суми Рітца

$$w=\sum A_m w_m(x), \qquad (14.8)$$

де кожна функція $w_m(x)$ задовольняє граничним умовам. Тоді $N_{cr}=N_{cr}(A_m)$ і мінімум критичної сили відшукується з умов

$$\frac{\partial N_{cr}(w_m)}{\partial A_m}=0, \quad m=1,2,... \qquad (14.9)$$

Система рівнянь (14.9) є однорідною, її ненульовий розв’язок можливий лише у разі, коли визначник, складений з її коефіцієнтів, дорівнює нулю. Спосіб обчислення критичних сил, заснований на об'єднанні методу Рітца з аналізом детермінанта системи розв’язувальних рівнянь, отримав назву методу Рітца-Тимошенко.

14.2. Метод Бубнова-Гальоркіна

У 1913 р. робота С.П. Тимошенко [Тимошенко, 1910] висувалася на здобуття премії імені Д.І. Журавського. У рецензії на цю роботу, написаній І.Г. Бубновим [Бубнов, 1913], був вказаний альтернативний підхід до розв’язання тих задач, які С.П. Тимошенко розв’язував за допомогою методу Рітца.

У своїй рецензії І.Г. Бубнов відзначав, що можна обійтися без складання виразу для потенціальної енергії і не розв’язувати отриманої варіаційної задачі. Замість цього пропонується функції, що виражають переміщення пружного тіла, представити сумою типу (14.1). Потім наближений вираз (14.1) слід підставити в диференціальне рівняння рівноваги досліджуваної задачі і отриманий вираз помножити окремо на кожну функцію, проінтегрувати результат підстановки за всім обсягом тіла і прирівняти цей інтеграл до нуля. В результаті буде отримано стільки рівнянь щодо коефіцієнтів a_i, скільки членів ряду бажано зберегти. У задачах стійкості потім необхідно прирівняти нулю визначник, складеного з множників при коефіцієнтах a_i.

Іван Григорович Бубнов (1872-1919) - російський корабельний інженер, математик і механік. У 1887 р. закінчив Ніжегородське Володимирське реальне училище. Випускник Морського інженерного училища і кораблебудівного відділу Миколаївської морської академії, де його вчителем був А.Н. Крилов. Він розробив перший в Росії прилад для вимірювання деформацій. З 1903 р. по 1908 р. був начальником кораблебудівної креслярської, де розробив проекти підводних човнів. З 1904 р. - викладач в Петербурзькому політехнічному інституті, з 1909 р. - профессор.

Бубнов вперше створив методи розрахунку пластин, що працюють у складі корпусу судна. Математично пояснив питання місцевої і загальної міцності судів. Його теоретичні роботи використовувалися для проектуванні лінійних кораблів і підводних човнів в 1908-1910 роках, частково використовуються і понині. Бубнов помер в 1919 році від тифу.

У 1915 р. з широким узагальненням методу Рітца на випадок диференціальних рівнянь виступив Б.Г. Гальоркін [Галеркин, 1915]. Це узагальнення повторювало пропозицію І.Г. Бубнова, містило обгрунтування методу (І.Г. Бубнов цього не зробив) і дало методу дорогу до широкого застосування.

Борис Григорович Гальоркін (1871-1945) - російський і радянський механік і математик, академік, інженер-генерал-лейтенант.

У 1899 р. він закінчив Петербурзький технологічний інститут і почав працювати на Харківському заводі Російського паровозобудівного і механічного товариства. З 1909 р. викладав в Петербурзькому політехнічному інституті. У 1920 р. був обраний завідуючим кафедрою будівельної механіки на механічному факультеті політехнічного інституту Петрограду. Консультував проектування і будівництво великих гідроелектростанцій (Волховська ГЕС, ДніпроГЕС та інших) і теплоелектростанцій. Один з творців і перший директор інституту механіки АН СРСР, головний редактор журналу «Прикладная математика и механика». Гальоркін є одним з творців теорії згину пластинок, саме в застосуванні до задач розрахунку пластин він і запропонував свій метод розв'язання.

> Відмітною особливістю міркувань Гальоркіна було те, що, на відміну від Бубнова, він не пов'язував запропонований ним спосіб з варіаційною постановкою задачі, вважаючи його методом розв'язання диференціальних рівнянь, і засновував свої міркування на принципі можливих переміщень.

Поза сумнівом те, що ідея методу належить Бубнову, але без обгрунтування, даного Гальоркіним, ця ідея навряд чи набула б широкого поширення. Тому, якщо кажуть про «метод взагалі», то, відновлюючи історичну справедливість, вважають за краще називати його методом Бубнова-Гальоркіна або навіть методом Бубнова [Григолюк, 1996]. Якщо ж підкреслюється використання стосовно неваріаційних проблем, то доречно говорити про метод Гальоркіна, хоча з процедурної точки зору ніяких відмінностей тут немає.

А процедура методу полягає в наступному. Розкладання (14.1) підставляється не у вираз функціонала, а в диференціальні рівняння

$$\frac{\partial \Pi(u)}{\partial u_j} = L_j(u) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{14.10}$$

Результатом такої підстановки є те, що $L_j(u_n)$ вже не рівне нулю, а рівне якійсь функції від невідомих коефіцієнтів розкладання (14.1), функцією помилок такої підстановки. Вимога, щоб це розкладання дорівнювало рзв'язку задачі, еквівалентна тому, щоб функції-помилки, які є неврівноваженими силами, здійснювали на всіх переміщеннях u_i нульову роботу. Це приводить до системи рівнянь

$$\int\int L(u_n)\cdot\varphi_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\int\int \varphi_i\varphi_j\right)\cdot a_i = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{14.11}$$

які називають умовами ортогональності.

Б.Г. Гальоркін трактував пропонований ним метод як видозміну точного розв'язку Нав'є задачі про вільно оперту прямокутну пластинку.

Цю задачу Навьє вирішив у формі розкладання в ряд по власних функціях, що мали властивість ортогональності, і пропозиція полягала в тому, щоб використовувати розкладання по інших функціях, зажадавши для них виконання умов ортогональності (14.11). Таким чином, метод Гальоркіна був узагальненням ідеї Нав'є про заміну точного розв'язку відомої задачі наближеними розв'язками довільних задач.

Той факт, що метод Бубнова-Гальоркіна не потребує відповідного варіаційного формулювання, виявився вирішальним при його використанні для розв'язання неконсервативних задач механіки.

У 1940 р. Г.І. Петров запропонував модифікацію методу Гальоркіна [Петров, 1940], засновану на виборі елементів двох координатних систем, причому наближений розв'язок знаходиться у вигляді лінійної комбінації по одній базисній системі, а нев'язка ортогональна іншій базисній системі.

Іншими словами результат підстановки розкладання (14.1) ортогоналізується не по відношенню до функцій φ_j, а до іншої системи функцій ψ_j (до сукупності так званих вагових функцій), і замість (14.11) використовується система рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\iint \varphi_i \psi_j\right)\cdot a_i = 0, \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{14.12}$$

Механічний сенс цієї пропозиції очевидний: неврівноважені сили повинні здійснювати нульову роботу на можливих переміщеннях, вид яких визначається за допомогою функцій ψ_j.

Варіант Петрова-Гальоркіна широко використовується в задачах гідродинаміки кавітуючої рідини і в задачах в'язкопружності.

Григорій Іванович Петров (1912-1987) - радянський учений в галузі механіки, академік АН СРСР. Після закінчення МГУ (1935) працював в науково-дослідних інститутах. З 1965 р. в інституті космічних досліджень АН СРСР (у 1965-73 рр. директор, з 1973 р. завідувач відділом). Основні праці відносяться до прикладної газової динаміки і космічної аеродинаміки. Досліджував розповсюдження коливань у в'язкій рідині, стійкість вихрових шарів, фізичні умови розпаду ламінарної течії.

14.3. Метод Трефтца

Метод Рітца для задач про мінімум дозволяє знайти наближення зверху. Дійсно, збільшення числа координатних функцій додає системі додаткові ступені свободи, тобто знімає обмеження на можливі форми деформації. Але такі обмеження не дають повною мірою реалізувати мінімум, і, отже, завищують результат розв'язання задачі. Було бажано мати спосіб розв'язання, що дає наближення знизу, і такий спосіб був вказаний Трефтцем.

Еріх Треффц, нім. Erich Trefftz (1888-1937) - німецький математик і механік, який запропонував метод, що в деяких випадках дозволяє побудувати послідовність функцій, які дають наближення до шуканого мінімуму функціонала знизу.

Основні праці Трефтца відносяться до аеро- і гідродинаміки, теорії пружності. Він навчався в Геттінгенському і Страсбурзькому університетах, потім в Колумбійському університеті (Нью-Йорк). З 1912 р. працював у Вищій технічній школі і в Аеродинамічному інституті в Аахені. З 1922 р. професор і з 1927 р. завідувач кафедрою технічної механіки математично-природничого наукового відділення вищої технічної школи Дрездена. Займався гідродинамікою, теорією пружності і теорією коливань у авіації. З 1933 р. Е. Треффц редагував журнал «Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik».

Метод розв'язання варіаційних задач був винайдений їм в 1926 р. [Trefftz, 1926] і опублікований в 1928 р. в статті [Trefftz, 1928], присвяченій збіжності і оцінці похибок методу Рітца.

Відмінність пропозиції Треффца від методу Рітца і методу Бубнова-Гальоркіна полягала в тому, що координатні функції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ передбачаються такими, що задовольняють диференціальне рівняння задачі, але не задовольняють граничні умови, тоді як в методі Рітца і в методі Бубнова-Гальоркіна координатні функції задовольняють граничні умови, але не задовольняють диференціальное рівняння.

Природно, що і функціонал, який мінімізується, зазнає зміни, він конструюється шляхом переходу від інтеграла по області до інтеграла по границі. При цьому, по суті, мінімізується квадратична похибка, викликана неточним виконанням граничних умов.

Порушення граничних умов кінематичного типу означає, що система має додаткові ступені свободи, а це веде до того, що мінімальне значення її потенціальної енергії виявляється меншим, ніж у реальній системі. Звідси і слідує теза про наближення знизу до розв'язку задачі.

Слід відмітити, що зараз методом Треффца називають спосіб розв'язку варіаційної задачі в досліджуваній області на класі функцій, що задовольняють операторові у середині області. На основі ідеї методу Треффца з використанням фундаментальних розв'язків як тестових функцій будується метод фундаментальних розв'язків. У цьому сенсі своєрідним варіантом методу Треффца можна вважати запропонований Б.Г. Коренєвим [Коренев, 1936, 1940] для розрахунку балок, плит і пластин на пружній основі метод «компенсуючих навантажень». Цей метод, як і його модифікації (О.В. Лужин — метод розширення заданої системи, В.Ю. Ізаксон — метод нескінченних областей тощо) використовує точний розв'язок диференціального рівняння задачі в розширеній області і потім шляхом розв'язання додаткових рівнянь мінімізує похибку в задоволенні граничним умовам.

Узагальненням підходу Треффца є метод граничних інтегральних рівнянь і його скінченновимірна реалізація у формі методу граничних елементів [Баженов, Игумнов, 2008].

14.4. Метод Канторовича

У 1933 році Л.В. Канторович запропонував будувати систему координатних функцій, відомих тільки в одному напрямі, тоді як в іншому напрямі вони були невідомі [Канторович, 1933]. Тобто використовувалося розкладання

$$u_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y)\varphi_i(y), \qquad (14.13)$$

у якому функції $a_i(x,y)$ $(i = 1,2,...,n)$ встановлювалися апріорі.

Відмінність методу Канторовича від методів Релея-Рітца і Бубнова-Гальоркіна полягає в тому, що свавілля, за рахунок якого забезпечується наближення розкладання до точного розв'язку, міститься не в числових коефіцієнтах a_i, значення яких відшукують шляхом розв'язанням деяких алгебраічних рівнянь, а у функціях $a_i(x)$, що відшукуються за допомогою розв'язання деяких диференціальних рівнянь. А схожість методу Канторовича з методами Релея-Рітца і Бубнова-Гальоркіна подібна тій, яка спостерігається використанні розкладання розв'язку в подвійні або в одинарні тригонометричні ряди.

Леонід Віталійович Канторович (1912-1986) — математик і економіст, піонер і один з творців лінійного программування. Лауреат Нобелевської премії з економіки 1975 р. «за внесок в теорію оптимального розподілу ресурсів».

У 1926 р. у віці чотирнадцяти років вступив в Ленінградський університет. Закінчив математичний факультет в 1930 р., вчився в аспірантурі університету. З 1930 по 1939 рік викладач, потім професор Ленінградського інституту інженерів промислового будівництва. У 1934 р. став професором ЛГУ, в 1935 р. йому був присвоєний науковий ступінь доктора фізико-математичних наук без захисту диссертації.

У 1939 р. опублікував роботу «Математичні методи організації і планування виробництва», в якій описав задачі економіки, які можуть бути розв'язані завдяки відкритому їм математичному методу і тим самим заклав основи лінійного програмування. Вперше застосував функціональний аналіз в обчислювальній математиці, розвинув загальну теорію наближених методів, побудував ефективні методи розв'язку операторних рівнянь (у тому числі метод найшвидшого спуску і метод Ньютона для таких рівнянь). Започаткував лінійне програмування і його узагальнення. Розвинув ідею оптимальності в економіці, встановив взаємозалежність оптимальних цін і оптимальних виробничих і управлінських розв'язків.

Незалежно від Л.В. Канторовіча аналогічні ідеї розвивалися В.З. Власовим [Власов, 1932, 1949], при цьому вони спиралися на механічні міркування. На відміну від Канторовіча В.З. Власов використовував розкладання

$$u_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\varphi_i(y). \qquad (14.14)$$

При розрахунку циліндричної оболонки В.З. Власов приймає скінченне число ступенів вільності в поперечному напрямі і нескінченне число - в подовжньому. Це приводить систему диференціальних рівнянь оболонки в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $\varphi_i(y)$. Ці рівняння мають вигляд таких, з якими зазвичай мають справу в будівельній механіці стержнів.

Виняткова заслуга В.З. Власова полягає в тому, що він сформулював наближену теорію оболонок. Завдяки вдалому поєднанню методів математичної теорії пружності, опору матеріалів та будівельної механіки йому вдалося отримати в теорії оболонок гранично прості і чіткі результати.

Василь Захарович Власов (1906-1958) - учений-механік, фахівець в галузі опору матеріалів, будівельної механіки і теорії пружності, член-кореспондент АН СРСР.

У 1930 р. закінчив Вище інженерно-будівельне училище (пізніше перейменоване в Московський інженерно-будівельний інститут), почав вести наукову роботу у Всесоюзному інституті споруд (пізніше перейменований в ЦНДІПБ, нині ЦНДІБК ім. В.А. Кучеренка). У МІБІ Василь Захарович викладав до кінця своїх днів, а в ЦНДІПБ працював до 1951 р. З 1932 до 1942 рр. викладав у Військово-інженерній академії ім. В.В. Куйбишева, а з 1946 р. керував відділом будівельної механіки Інституту механіки АН СРСР.

В.З. Власов отримав і ряд важливих результатів в області теорії пружності. Він розвинув метод початкових функцій для розв’язання просторових задач теорії пружності, а також широко використовував розкладання (14.9) для різноманітних задач теорії оболонок.

Наприклад, для кругової циліндричної оболонки за умови нехтування деформаціями зсуву і з використанням функції переміщень Ф, через яку поздовжні переміщення виражаються як $u=-\partial\Phi/\partial s$, В.З. Власов використовує розкладання

$$\Phi(z,s)=\sum_{i=1}^{n}F_i(z)\cos\left(\frac{s}{R}i\right), \tag{14.14}$$

де z - поздовжня координата, s - дугова координата, R - радіус оболонки. Це приводить до диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}^4F_i}{\mathrm{d}z^4}+4\frac{h^2i^4\left(i^2-1\right)^2}{48R^6}F_i=Q_i,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{14.15}$$

кожне з яких має вид рівняння для балки на пружній основі.

В свою чергу, в задачах, пов'язаних з розрахунком конструкцій на пружній основі [Власов, Леонтьев, 1960], переміщення точок пружної основи (плоска модель) приймалося у вигляді скінченних розкладань

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)&=\sum_{i=1}^{m}U_i(x)\varphi_i(y),\quad i=1,2,\ldots,m\\ v(x,y)&=\sum_{k=1}^{n}V_k(x)\psi_k(y),\quad k=1,2,\ldots,n\end{aligned}\right\}, \tag{14.16}$$

де функції $U_i(x)$, $V_k(x)$ являються шуканими, а функції $\varphi(y)$, $\psi(y)$ - заданими.

З диференціальних рівнянь рівноваги в частинних похідних виходить система звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $U_i(x)$, $V_k(x)$ і, таким чином, будується плоска узагальнена модель пружної основи, яка дозволяє шляхом того або іншого вибору функцій $\varphi(y), \psi(y)$ отримувати безліч різних схем пружної основи, що достатньо вірно відображають особливості конкретної задачі.

На відміну від підходів Канторовича і Власова в іншому варіанті переходу від системи рівнянь в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь по одній з координат застосовувалася різницева процедура. Такий підхід, названий методом прямих, був запропонований в 1939 р. М.Г. Слободянським [Слободянський, 1939].

14.5. Чисельні методи

Починати історію чисельних методів у варіаційному численні потрібно було б, мабуть, з Ейлера, який першим запропонував замінити шукану функцію деякою сітковою моделлю. Згодом на авансцену вийшли аналітичні варіанти методів Рітца і Гальоркіна, за допомогою яких при умілому виборі координатних функцій можна було отримати результат ціною невеликого об'єму обчислень.

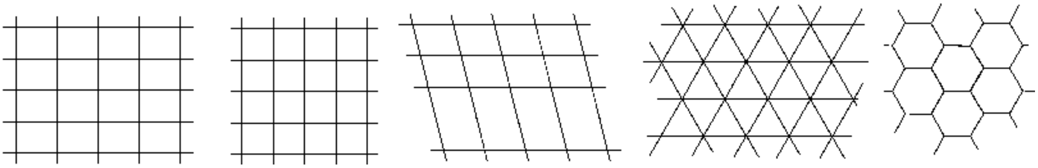
Але і сітковий метод також скромно був присутній, не претендуючи на перші ролі саме через обчислювальні складнощі. Розв’язання системи лінійних рівнянь навіть відносно невеликого порядку (10-20 невідомих) було серйозною проблемою. А така кількість сіткових невідомих викликала великі сумніви щодо точності результатів аналізу. Поява ЕОМ до певної міри зняла гостроту питання про число арифметичних операцій, і чисельні методи поступово почали займати чільне положення.

До найбільш використовуваних чисельних методів належать метод сіток, варіаційно-різницевий метод і метод скінченних елементів. Методи згадані в послідовності, яка приблизно відповідає історичній їх популярності, при цьому метод скінченних елементів на даний час настільки оволодів розумом теоретиків і практиків, що його попередники практично не згадуються.

14.6. Метод сіток

Суть методу скінченних різниць (методу сіток), мабуть, вперше використаному для розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних Карлом Рунге [Runge, 1908], дуже проста і полягає в наступному. Область безперервної зміни аргументів, замінюється дискретною безліччю точок (вузлів), яка називається сіткою або решіткою. Замість функції безперервного аргументу розглядаються функції дискретного аргументу, визначені у вузлах сітки і звані сітковими функціями. Похідні, що входять в диференціальне рівняння і граничні умови, замінюються різницевими виразами, граничні умови Діріхле враховуються простим завданням шуканих величин в граничних вузлах, граничні умови Неймана або Коші апроксимуються за допомогою скінченно-різницевих операторів, при цьому краєва задача для диференціального рівняння замінюється системою лінійних або нелінійних алгебраічних рівнянь (сіткових або різницевих рівнянь). Такі системи часто називають різницевими схемами. Звісно, метод сіток можна застосовувати до розв'язання диференціальних рівнянь будь-якого порядку з будь-яким числом незалежних змінних і невідомих функцій.

При цьому використовуються сітки самих різних конфігурацій (прямокутні, квадратні, косокутні, трикутні, гексагональні і ін.



Варіанти скінченнорізнецевих сіток

Важко сказати, коли метод сіток був застосований вперше. В будь-якому випадку відомий метод Ейлера наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь за заданих початкових умов по суті є різновидом методу сіток. Що стосується задач механіки деформівного твердого тіла, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, то тут можна, наприклад, згадати дослідження роботи ростверків, виконане Манном у 1909 р. [Mann, 1909], видану в 1921 р. книгу І.М. Рабіновіча [Рабинович, 1921], розв'язок Г. Генкі задачі стійкості пружного стержня за методом «пружного шарнірного ланцюга» [Hencky, 1922] і інші роботи.

Особливо слід зазначити роботу Л. Річардсона [Richardson, 1910], яка після згаданої роботи Рунге стала однією з перших серйозних робіт, присвячених чисельному аналізу диференціальних рівнянь в частинних похідних. Річардсон розробив ітераційні методи розв'язання рівняння Лапласа, бігармонічного рівняння і інших рівнянь. Він встановив відмінність між гіперболічними і еліптичними задачами, отримав оцінки погрішності, дав метод екстраполяції отриманих результатів при прагненні кроку сітки до нуля. Зрештою, він вперше фактично застосував чисельні методи до такої практичної задачі великого масштабу, як визначення напружень в кам'яній греблі.

У 1928 р. з'явилася класична робота Куранта, Фрідріхса і Леві [Courant et al., 1928]. Ці автори в основному цікавилися використанням скінченно-різницевих методів як інструменту для досліджень в чистій математиці. Дискретизуючи диференціальні рівняння, доводячи збіжність дискретної системи до диференціальної і, нарешті, встановлюючи існування розв'язку дискретної системи методами алгебри, вони доводили теореми існування і єдиності для еліптичних, гіперболічних і параболічних систем диференціальних рівнянь.

Одним з основних результатів цієї роботи, що визначила напрям практичного отримання скінченно-різницевих розв'язків в подальші роки, було встановлення так званих умов Куранта (Courant–Friedrichs–Lewy condition, CFL). Ці умови вимагають, щоб для гіперболічних рівнянь швидкість розповсюдження збурень в різницевій задачі не була менша, ніж в диференціальній. Іншими словами, за один крок за часом частинка не повинна «пробігати» більш, ніж за один осередок, для цього величина кроку дискретизації за простором повинна бути значно меншою за досліджувані довжини хвиль. Якщо ця умова не виконана, то результат різницевої схеми може не збігатися до розв’язку диференціального рівняння.

Лазар Аронович
Люстернік
(1899 - 1981)

Ріхард Курант,
Richard Courant
(1888 - 1972)

Курт Отто Фрідріхс,
Kurt Otto Friedrichs
(1901-1982)

Ганс Леві,
Hans Lewy
(1904 –1988)

Проте, заради справедливості, слід вказати на статтю Л.А. Люстерніка [Lusternik, 1926], що вийшла раніше, у якій він, користуючись методом сіток, дав розв’язок задачі Діріхле на площині при надзвичайно загальних припущеннях про природу контура. Принагідно Л.А. Люстерник встановлює рівномірну збіжність до точного розв’язку наближень, що отримуються за методом сіток,.

Перші оцінки похибок скінченно-різницевого наближення еліптичних рівнянь були отримані Гершгоріним [Gerschgorin, 1930]. Після його роботи і дослідження Куранта із співавторами різні аспекти проблеми збіжності скінченно-різницевого розв’язку стали предметом детального вивчення математиків.

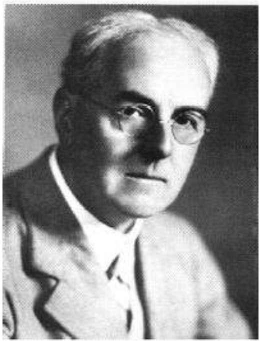
Проте, не тонкий аналіз методу і оцінка його збіжності, а можливості його практичного застосування привертали увагу багатьох дослідників, які бачили в методі сіток зручний робочий інструмент. Піонерами розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних різниць виступили Льюїс Фрай Річардсон і Джон фон Нейманн. Вони успішно використовували скінченно-різницеву методику для розв’язку найрізноманітніших задач, у тому числі і задач механіки, а їх величезний науковий авторитет сприяв популяризації методу.

До появи ЕОМ розглядалися системи сіткових рівнянь з відносно невеликим числом невідомих, які розв’язувалися ітераційними методами. При цьому основна увага приділялася еліптичним рівнянням.

Великою популярністю користувався ітераційний метод Річардсона (метод релаксації), заснований на тому, що на *n-й* ітерації за чергою в кожному вузлі розрахункової сітки задовольняється скінченно-різницеве рівняння, що містить «старі» значення на (n-1)-ій ітерації в сусідніх вузлах.

У 1918 р. було вигадано удосконалення за рахунок методу Річардсона використання «нових» значень у вузлах, як тільки вони обчислені. У цій схемі «безперервних заміщень» на кожній n-й ітерації використовується деяке число старих значень з (n-1)-ї ітерації і деяке число нових значень з n-й ітерації в сусідніх вузлах. У кожному циклі такого ітераційного процесу найбільші погрішності зменшуються так само, як в двох циклах ітераційного методу Річардсона.

Цей факт показав, що навіть невелика зміна скінченно-різницевих апроксимацій, ітераційних схем або трактування граничних умов може дати великий виграш. Навпаки, деякі правдоподібні і на перший погляд точні чисельні схеми можуть приводити до повної катастрофи. Прикладом тут є явна схема Річардсона для параболічного рівняння, в якій використовувалися центральні скінченно-різницеві апроксимації похідних як за просторовими змінними, так і за часом. Як з'ясувалося пізніше, ця схема безумовно нестійка.



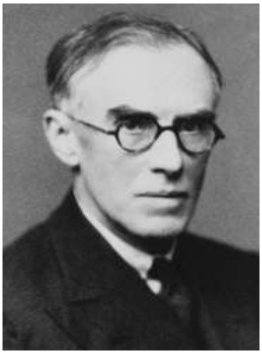
Льюїс Фрай Річардсон, *Lewis Fry Richardson* (1881-1953) англійський математик, психолог і пацифіст, який вперше застосував сучасні математичні методи для прогнозування погоди і для вивчення причин виникнення і запобігання воєн. Він відмічений також за метод розв'язання систем лінійних рівнянь, відомий як модифіковані ітерації Річардсона.

У 12 років він був відправлений до квакерської школи-інтернату Бутем, де здобув прекрасну освіту, яка спонукала активний інтерес до історії природи. У 1898 р. він вступив до коледжу Наук при Даремському університеті, де слухав курси математичної фізики, хімії, ботаніки і зоології. Два роки опісля він отримав стипендію для вступу в Королівський коледж (Кембридж), який він закінчив в 1903 р. з відзнакою в природничих науках. У 47 років він отримав докторський ступінь з психології в Лондонському університеті.

Діяльності Річардсона була притаманна різноманітність наукових інтересів: він працював в Національній фізичній лабораторії Великої Британії, був керівником фізичної і хімічної лабораторій Санбім-Лемп-Компані, викладачем в Технологічному коледжі Манчестера, суперінтендантом обсерваторії Ескдалемюр метереологічного управління, деканом фізичного факультету у Вестмінстерському педагогічному коледжі Лондона, ректором Технічного коледжу Пейслі. У 1926 р. він був обраний членом Лондонського Королівського Товариства.

Р.В. Саусвелл в 1946 р. розробив ефективніший метод релаксації для чисельного розв'язку еліптичних рівнянь. У його методі релаксації нев'язки обчислення не проводяться послідовно в кожному вузлі сітки, а є видимою вся сітка для знаходження вузлів з максимальною нев'язкою, і саме в цих вузлах обчислюються нові значення.

У 1955 р. метод релаксації Саусвелла був застосований для ручного розрахунку обтікання циліндра в'язкою нестисливою рідиною. У деякому сенсі це була піонерська робота в чисельній гідродинаміці. При проведенні обчислень автори зіткнулися з ясно вираженою тенденцією до нестійкості при числі Рейнольдса, рівному 100, і пов'язали це з тенденцією до фізичної нестійкості потоку, передбачивши тим самим сучасне поняття чисельного моделювання.



Річард Вінн Саусвелл, Richard Vynne Southwell (1888-1970) - британський математик, фахівець з прикладної механіки і технічних наук.

Вчився в університеті Кембріджа, де здобув першокласну освіту в математиці і механіці. У 1914 р. він став членом Трініті Коледжу в Кембріджі, викладачем механіки. Під час Першої світової війни служив в авіації військово-морського флоту, після першої світової війни був головою підрозділу аеродинаміки і конструювання Королівської служби авіації.

У 1920 р. перейшов до Національної фізичної лабораторії і повернувся в Трініті коледж як викладач математики. З 1929 р. він викладає в Оксфордському університеті як професор технічних наук. Тут він створив дослідницьку групу, з якою розвивав свій метод релаксації. Саусвелл був ректором Лондонського імперського коледжу з 1942 р. до відставки в 1948 р.

Як учений, Саусвелл в 1930-х і 1940-х роках розвивав методи релаксації для розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних. Сауствелл розвивав різні прийоми для прискорення обчислень.

З розвитком ЕОМ стали по-справжньому приділяти увагу і рівнянням параболічного типу, оскільки стало можливим розраховувати нестаціонарні розв’язки. Багато піонерських робіт в цій області були виконані в Лос-Аламоській лабораторії. Саме у Лос-Аламосі під час Другої світової війни фон Нейман розробив свій критерій стійкості параболічних скінченно-різницевих рівнянь і надав метод дослідження лінеаризованої системи.

Джон фон Нейман, *John von Neumann* (1903-1957) - угорсько-американський математик, який зробив важливий внесок у квантову фізику, квантову логіку, функціональний аналіз, теорію множин, інформатику, економіку та інші галузі науки. Відомий як людина, з ім'ям якої пов'язують архітектуру більшості сучасних комп'ютерів (так звана архітектура фон Неймана), застосуванням теорії операторів до квантової механіки (алгебра фон Неймана), а також як учасник Манхеттенського проекту і як творець теорії ігор і концепції клітинних автоматів. Фон Нейман отримав ступінь доктора філософії з математики в університеті Будапешта в 23 роки. Одночасно він вивчав хімічні технології в швейцарському Цюріху. З 1926 по 1930 рік Джон фон Нейман був приват-доцентом в Берліні. У 1930 р. фон Нейман був запрошений на викладацьку посаду в американський Прінстонський університет. Був одним з перших запрошених на роботу в заснований в 1930 р. науково-дослідний Інститут перспективних досліджень, також розташований в Прінстоні, де з 1933 р. і до самої смерті займав професорську посаду.

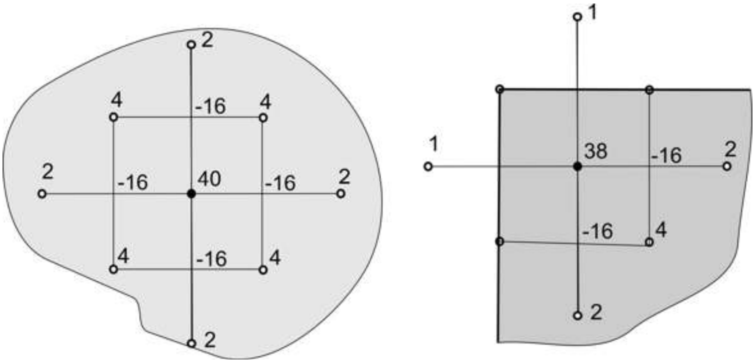
Важливою особливістю методу сіток була його наочність, він не обгрунтовувався тонким математичним аналізом і його застосовність не викликала ніяких сумнівів у дослідників, що цікавляться безпосередньо тільки результатом розрахунків.

Вже в 1932 р. з'явилася книга Г. Маркуса [Marcus, 1932], мабуть перша книга, де скінченно-різницевий метод був застосований до розв’язання практичних задач проектування, пов'язаних з розрахунком згину пластин. Окрім класичних задач, в яких розглядалися стандартні варіанти краєвих умов (шарнірне опирання, затискання, вільний край) Маркус детально аналізує випадок точкового опирання усередині області, дуже важливий частинний випадок, пов'язаний з роботою безбалочных перекриттів. По суті, метод скінченних різниць (метод сіток) був тут вперше продемонстрований як інструмент розв’язку інженерних задач.

Die Theorie
elastischer Gewebe und ihre
Anwendung auf die Berechnung
biegsamer Platten
unter besonderer Berücksichtigung der
trägerlosen Pilzdecken
von
Dr.-Ing. H. Marcus
Mit 123 Textabbildungen
Berlin
Verlag von Julius Springer
1924

Обкладинка книги Г. Маркуса

Переклад згаданої книги російською мовою, що вийшов під редакцією П.М. Варвака в 1936 р., надав значного поштовху на становлення і розвиток київської школи методу скінченних різниць, в роботах якої були отримані важливі практичні результати [Варвак, 1949, 1952], [Длугач, 1964], [Дятловицкий, 1959]. Для задач теорії пластин і оболонок були знайдені коефіцієнти сіткових рівнянь, що представляються зазвичай у вигляді символічних схем-шаблонів, які вказують на структуру коефіцієнтів відповідних рівнянь. Такі схеми відповідали внутрішнім точкам області і зонам у її границях, де вводилися фіктивні «законтурні» точки.



Схеми-шаблони сіткових рівнянь шарнірно опертой пластини в області і в кутку

У 70-80 рр. XX ст. в Києві під керівництвом професора Є.О. Гоцуляка було розвинено варіант методу скінченних різниць – так званий метод криволінійних сіток, в якому було вирішено проблему урахування жорстких зміщень [Гоцуляк, Пемсинг, 1978]. Метод ефективно застосовувся для розв’язання нелінійних задач деформування і стійкості оболонок складної форми [Гоцуляк та ін., 1982].

14.7. Варіаційно-різнецевий метод

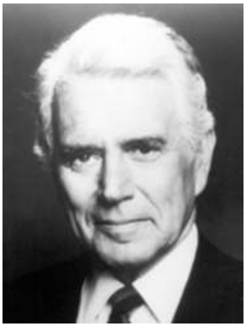
Певним гальмом в практичному використанні методу сіток була проблема скінченно-різницевої інтерпретації краєвих умов. У разі складної конфігурації областей, наприклад, за наявності вхідних кутів, виявлялися суперечності і невизначеність в побудові відповідних сіток, а також несиметричність коефіцієнтів сіткових рівнянь задачі.

Щоб подолати цю ваду скінченно-різницеві схеми будують, замінюючи інтегрування підсумовуванням, а диференціювання обчисленням центральних різниць у виразах для функціонала, що мінімізується, і для граничних умов (див., наприклад [Вайнберг и др., 1965]). Такого типу варіаційно-різницевий метод позбавлений більшості перерахованих недоліків методу скінченних різниць, оскільки заснований на варіаційних принципах механіки.

Ідея методу, чудово викладена роботі В. Вазова і Дж. Форсайта [Forsythe, Wasow, 1960], полягає в тому, щоб при спеціальному виборі координатних функцій в методі Рітца отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка збігається за структурою із системою різницевих рівнянь. Для цього безперервна функція, що входить у вираз повної потенціальної енергії системи, замінюється дискретною функцією, що приймає значення у вузлах сіткової решітки, початковий функціонал енергії замінюється деякою скінченною сумою, а похідні, які входять в нього – скінченними різницями. Матриця коефіцієнтів системи розв’язувальних рівнянь варіаційно-різницевого методу виходить симетричною, добре обумовленою і має стрічкову структуру.

У вітчизняній практиці варіаційно-різницевий метод отримав розвиток і численні застосування в роботах двох шкіл: київської, очолюваної Д.В. Вайнбергом (див., наприклад [Вайнберг и др., 1969]), і красноярської, на чолі якої стояв Н.П. Абовський [Абовский и др., 1978]. У цих дослідженнях був розглянутий широкий клас задач теорії пружності, а також теорії пластин і оболонок зі складним характером граничних умов. Згадані дослідження були виконані в 60-і роки XX ст. багато в чому завдяки широкому використанню обчислювальної техніки, що стала на той час доступною «звичайним» користувачам.

Трохи пізніше було відмічено, що у варіаційно-різницевому методі виконується локальна апроксимація функціонала, для якої використовуються тільки ті його значення, що розташовуються в межах схеми-шаблону для вибору коефіцієнтів сіткових рівнянь. Такого роду інтерпретацію методу скінченних різниць вперше запропонував Поля [Polya, 1952], який прийшов до схеми-шаблону, використовуючи локальні багаточленні наближення функціонала. Це був прямий шлях до методу скінченних елементів [Оганесян, Руховец, 1979], який міцно зайняв лідируюче положення, практично витіснивши майже всі інші чисельні методи, хоча і були зроблені спроби знайти область застосування методу скінченних різниць, де він міг би з успіхом перемогти в конкурентній боротьбі [Форсберг, 1974].



Джорж Форсайт,
George E. Forsythe
(1917 – 1972)

Вайнберг Давид
Вениаминович
(1905 – 1973)

Варвак
Петр Маркович
(1907 – 1979)

Абовский Наум
Петрович
(1929 – 2012)

Складна історія становлення і розвитку методу скінченних елементів описана в наступному нарисі.

Насамкінець, мабуть, варто згадати слова П.А. Жиліна, який зауважив, що «варіаційна постановка має багато переваг, але має і недоліки, пов'язані з використанням енергії. Звичайно, в теоретичному відношенні тут немає ніяких проблем, проте в прикладному плані ці проблеми дуже серйозні. Справа в тому, що функціонал енергії є вкрай критичним до прихованих неконсервативностей, неврахованих втрат енергії тощо» [Жилин, 2006].

Далі П.А. Жилін як приклад наводить шкільну задачу про витягування згорнутого у точкову «грудочку» вагомого ланцюга з погонною щільністю ρ; задача полягає у визначенні сили F, яка повинна бути прикладена до кінця ланцюга, щоб він за відсутності тертя рухався з постійною швидкістю v .

Розглядаються два розв’язки задачі.

Розв’язок 1, правильний, отримано з використанням першого закону динаміки Ейлера (другого закону Ньютона):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=F; \quad m(t)=\rho\cdot s(t); \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v \quad \Rightarrow \quad F=\rho v^2,$$

де $s(t)$ - довжина витягнутої частини ланцюга.

Розв’язок 2 базується на застосуванні рівняння балансу енергії (теореми про зміну кінетичної енергії системи), яку більшість записує у звичайному вигляді

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=Fv,$$

звідки з урахуванням того, що

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho v; \quad v=\mathrm{const}\ ,$$

отримуємо помилковий результат

$$F = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Помилка полягає в тому, що для тіла змінної маси теорема про зміну кінетичної енергії має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv - \frac{v^2}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

Іншими словами, при другому підході треба шукати приховані втрати енергії. Звичайно, вони завжди знаходяться, але не завжди зрозуміло, що їх треба шукати.

НАРИС 15

ШТРИХИ ІСТОРІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Divide et impera .

Розділяй і володарюй .

Людовік XI

Ця проста думка, поділити тіло і керувати його окремими частинами, виявилася надзвичайно плідною, вона випередила за ефективністю багато глибоких і тонких думок, просто скасувала низку визнаних раніше методів і поховала для практики деякі теоретично красиві побудови аналітиків .

М.І. Рейтман

15.1. Передісторія

Метод скінченних елементів (МСЕ), безумовний фаворит будівельної механіки нашого часу, з'явився в середині 20-го століття, і був він законним спадкоємцем ряду більш ранніх ідей, що народилися в надрах класичної будівельної механіки. Ідей фундаментального порядку типу варіаційних принципів і ідей чисто технологічних, викликаних до життя інженерною практикою. Вони виступили в ролі попередників (може, варто було б сказати – провісників) деяких істотних рис методу скінченних елементів. І основною тут була ідея переходу до дискретної схеми об'єкта дослідження.

Перехід від континуальної розрахункової моделі до деякого близького до неї дискретного аналогу (або до континуальної схеми меншої розмірності) є давньою традицією в механіці деформівного твердого тіла. Досить згадати, наприклад, що ще Ейлер зіставляв мембрану із сукупністю систем струн, натягнутих в двох взаємно перпендикулярних напрямках [Euler, 1789]. Це був наочний приклад так званої фізичної дискретизації.

Пізніше були використані найрізноманітніші варіанти такого підходу (Г. Кірш, В. Рідель, О. Хренніков, О.Р. Ржаніцин, М.І. Длугач, Ю.М. Музиченко та ін.), описання їх пропозицій містяться в книзі [Баженов та ін., 2016].

Використання локалізованих функцій

Дискретне подання розрахункової схеми у вигляді стержневої системи було дуже наочним прийомом, і саме своєю наочністю воно приваблювало інженерів. Але в 1943 році видатний математик Ріхард Курант продемонстрував принципово інший прийом дискретизації задачі [Courant, 1943].

Розв'язуючи задачу про кручення полого стержня коробчастого перерізу, Р. Курант вніс у класичний метод Релея-Рітца ідею розкладання по системі функцій, кожна з яких визначена в локальній області (рис. 15.1).

Цей прийом, який багато в чому передбачив підхід методу скінченних елементів, міг би змінити історію МСЕ, але ідея Куранта не зацікавила дослідників, оскільки її реалізація вимагала небувалих обсягів обчислювальної роботи. В 1943 р. не існувало двох вирішальних складових:

- першою і найважливішою була відсутність програмованого комп'ютера, без якого МСЕ був би не більше ніж згадуванням в науковій книзі;
- також була відсутня піонерна публікація загального вигляду, яка могла привернути увагу вчених і інженерів, зайнятих у сфері досліджень і розробок.

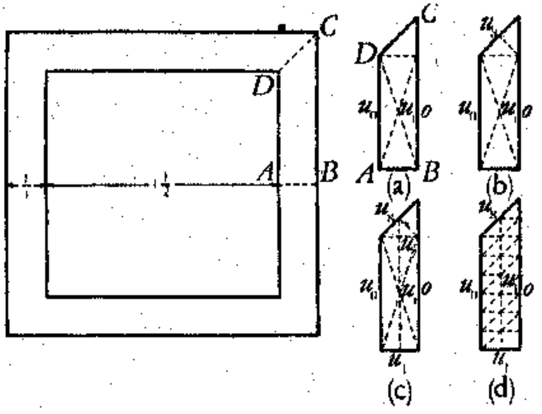


Рис. 15.1. Перше скінченно-елементне розбиття [Курант, 1943]

Ріхард Курант, нім. Richard Courant (1888-1972) – німецький і американський математик, педагог, найбільший організатор математичної освіти і наукових досліджень.

Р. Курант народився в Німеччині, навчався в університеті в Геттінгені і належав до числа безпосередніх учнів Д. Гільберта. З 1910 по 1914 рр. Р. Курант працював в Геттінгенському університеті спочатку як асистент, а потім як приват-доцент. У 1914 р. він був призваний до армії і брав участь у першій світовій війні на французькому фронті. Перебуваючи в армії, він працював над задачею використання бездротового зв'язку на лініях фронту.

Після демобілізації в 1919 р. він був призначений професором в університет міста Мюнстера (Німеччина), а в 1920 р. Р. Курант повертається в Геттінген. За його участі в Геттінгенському університеті організовується Математичний інститут. В період 1920-1933 рр. Р. Курант був директором цього інституту.

У 1933 р. після розгрому нацистським урядом Математичного інституту в Геттінгені Р. Курант назавжди залишає Німеччину, виїхавши спочатку до Англії, де протягом року він був професором Кембриджського університету, а потім, в 1934 р., в США. Його високий науковий авторитет привів до того, що він був призначений професором і головою математичного відділення Нью-Йоркського університету.

У той же час він заохотив до роботи в Нью-Йоркському університеті деяких своїх учнів і молодих колег з Німеччини. Протягом Другої світової війни науковці з групи Р. Куранта, використовуючи великий досвід в застосуванні математики до вирішення практичних задач, успішно працювали над проблемами військової тематики. Пізніше ця група і утворила ядро організованого Р. Курантом в 1946 р. Інституту математики і механіки при Нью-Йоркському університеті.

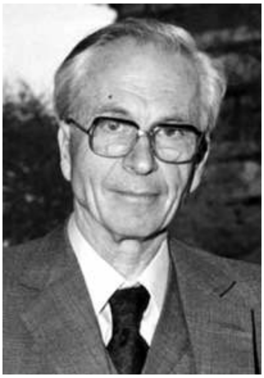
У 1958 р. за віком і у відповідності до законів США Р. Курант залишив пост офіційного директора Математичного інституту. З 1958 р. Математичний інститут Нью-Йоркського університету став іменуватися на його честь Курантівським інститутом математичних наук (Courant Institute of Mathematical Sciences).

Р. Курант протягом ряду років входив до складу керівництва Міжнародного математичного союзу (International Mathematical Union). Він був членом Національної академії наук США, був обраний іноземним членом багатьох академій світу.

Слід зауважити, що Курант був не першим з математиків, які використовували метод кускової апроксимації функціоналу, що мінімізується. Наприклад, ще в 1851 р. Шеллбах [Schellbach, 1851] застосував «скінченний елемент» в проблемі Плато для доведення того, що поверхня S мінімальної площі з границею, утвореною заданою жордановою кривою, є такою, що згинається. Шеллбах використовував наближення S_h поверхні S сіткою трикутників, за якими поверхня була представлена кусково-лінійними функціями, і він тоді отримав наближений розв'язок проблеми Плато, мінімізуючи S_h. Не зовсім звичайний скінченноелементний підхід, але техніка дискретизації як і у Куранта.

А можливості, які були відсутні в 1943 р., надала аерокосмічна галузь, причому лише в п'ятидесяті роки, хоча необхідний апарат будівельної механіки (зокрема, метод переміщень) був доступний з кінця 1930-х років, пропозиція Куранта - з 1943 р., а матричне формулювання – з кінця 40-х років і особливо після серії робіт Дж. Аргіріса [Argyris, 1960]. Тут в матричній формі був детально представлений весь апарат класичної будівельної механіки, простежено двоїсті співвідношення між методом сил і методом переміщень і показано, що обидва ці методи проходять одну і ту ж послідовність кроків в процесі виведення розрахункових формул. Наукові праці Аргіріса і його колег стали відправною точкою для матричного відображення відомих в той час чисельних методів і дозволили застосувати їх за допомогою електронно-обчислювальних машин для розрахунків конструкцій. Цими роботами був повністю підготовлений інструментарій для методу скінченних елементів. І перехід від матричного розрахунку дискретних систем до розрахунку континуальних систем, характерному для методу скінченних елементів, не змусив на себе чекати.

Описуючи історію створення методу скінченних елементів, Рей В. Клаф [Clough, 2004] справедливо оцінив роботи Дж. Аргіріса, зібрані у виданій в Лондоні книзі [Argyris, 1955], в таких словах: «На мою думку, ця монографія є найважливішою роботою, коли-небудь написаною з теорії структурного аналізу, і коли я прочитав її під час своєї відпустки, то негайно зробив висновок, що для мене вже немає ніякої потреби у створенні теорії для обґрунтування своїх досліджень».



Іоанніс (Джон) Аргіріс, англ. John Hadji Argyris (1913-2004) - один з творців методу скінченних елементів, професор Штутгартського університету і директор Інституту статики і динаміки авіабудування.

Аргіріс народився в грецькому місті Волос, Фессалія. Закінчив Афінський Політехнічний університет, а потім Мюнхенський технічний університет і отримав диплом інженера в 1936 р. Свою трудову діяльність розпочав у Щеціні в компанії Gollnow, зайнятої будівництвом радіовеж. Був заарештований нацистами, але втік за допомогою адмірала Канаріса до Швейцарії, де продовжив своє навчання і захистив докторську дисертацію в Політехнічному інституті Цюріха. У 1943 р. він вступив в дослідницький відділ Королівського авіаційного товариства Англії. З 1949 р. викладає авіаінженерію в Імперському коледжі Лондона при Лондонському університеті аж до 1955 р. У 1959 р. Аргіріс стає професором Штутгартського технічного університету і призначається директором Інституту статики і динаміки авіабудування. Тут він створює авіаційний і космічний центр з акцентом на застосування комп'ютерної та електронної техніки.

Аргіріс - один із засновників методу скінченних елементів. У 1954 році він за допомогою комп'ютера застосував метод трикутних скінченних елементів в авіабудуванні. У 1956 р. його теоретичні розробки використовувалися при будівництві Боїнга-747. Одночасно NASA доручила йому розробку термічного захисту космічного корабля «Аполлон». Аналогічну роботу Аргіріс виконав для європейського космічного корабля «Гермес». Аргіріс брав участь в будівництві підвісного даху для Мюнхенського олімпійського стадіону, розробивши для цього нелінійний метод розрахунку.

Аргіріс запропонував обчислювальні рішення для теорії груп, теорії відносності та теорії хаосу.

Автор багатьох наукових книг і праць. Отримав 18 докторських дипломів, став членом академій 5 країн і був почесним професором в 6 європейських університетах. Дійсний член Лондонського Королівського товариства.

15.2. Зародження методу

15.2.1. Перші кроки

У доповіді з характерною назвою «Рання історія методу скінченного елемента з точки зору піонера» [Clough, 2004] Рей Клаф пише: «... в червні 1952 р. мене призначили у відділ Динаміки під керівництво Джона Тернера. Він був дуже компетентним інженером з освітою в області прикладної математики і досвідом декількох років роботи у фірмі Боїнг. Тернер доручив мені роботу, яка полягала в аналізі коливань досить великої моделі конструкції дельтавидного крила, яка була виготовлена Боїнгом. Ця проблема дуже відрізнялася від аналізу типової структури крила, яку можна було аналізувати, використовуючи стандартну стержневу теорію, і я провів літо 1952 р., намагаючись сформулювати математичну модель дельтовидного крила, представляючи її як сукупність типових одновимірних балочних компонент. Результати, які я зміг отримати до кінця літа, були вельми невтішні, і я був дуже збентежений, коли пішов прощатися зі своїм босом Джоном Тернером. Але він запропонував мені повернутись до досліджень влітку 1953 р. Він запропонував мені зробити нову спробу оцінки коливальних властивостей моделі дельта-крила, а для цього сформулювати математичну модель як сукупність двовимірних пластинчастих елементів, взаємопов'язаних у кутах. Цією пропозицією Джон по суті визначив поняття методу скінченних елементів».

Джон Тернер,
англ. John Turner

Тут слід звернути увагу на сказане мимохідь «взаємопов'язаних у вузлах», яке слід було б читати як «взаємопов'язаних тільки у вузлах». Саме цей факт призводить до розв’язувальних рівнянь відносно вузлових переміщень, характерних для МСЕ в переміщеннях, і ріднить його з методом переміщень в будівельній механіці стержневих систем.

В 1953 р. Рей Клаф отримав розв’язок для прямокутного і трикутного пластинчастого елемента в плоско-напруженому стані, а Джон Тернер зробив про це доповідь на щорічних зборах Інституту аерокосмічних досліджень (Institute of Aeronautical Sciences) в січні 1954 р. Але чомусь ця доповідь не була відразу представлена до публікації, і лише видання 1956 року [Turner et al., 1956] майже через три роки після того, як робота в Боїнгу була виконана, стала першою публікацією з методу скінченних елементів.

Рей Вільям Клаф, англ. Ray W. Clough (1920-2016) – американський інженер і механік, один з творців методу скінченних елементів і автор самого терміну «скінченний елемент».

Клаф навчався в університеті Вашингтона і отримав там ступінь бакалавра в 1942 р. і ступінь магістра в 1943 р. Він продовжив освіту в Массачусетському технологічному інституті, де отримав ступінь магістра в 1947 р. і вчений ступінь кандидата наук в 1949 р. Потім він став доцентом, а пізніше і професором Каліфорнійського університету в Берклі. З 1983 р. він був почесним професором в Берклі. Протягом майже сорокарічної роботи в Берклі він виховав велику кількість студентів і науковців.

Клаф створив Дослідницький центр сейсмостійкого будівництва в Берклії і багато зробив для його розвитку. Спеціалізувався на аналітичних дослідженнях і створенні загальнодоступних інформаційних ресурсів і програм. Він розвивав методи динамічного аналізу складних споруд і був співавтором класичної праці з динаміки споруд. Багато в чому змінив галузь сейсмостійкості шляхом розвитку фундаментальних теорій, обчислювальних і експериментальних методів.

Клаф був членом Національної академії наук, Національної інженерної академії, Королівського норвезького товариства вчених і китайської інженерної академії. Був нагороджений в 1994 р. Національною медаллю з науки і в 2006 р. отримав медаль Бенджаміна Франкліна.

А свою назву метод отримав ще через чотири роки в доповіді Клафа на 2-й конференції Американської асоціації цивільних інженерів (ASCE), присвяченій використанню ЕОМ [Turner, 1960].

Тернер, Клаф, Мартін і Топп коротко викладають МСЕ в формі методу переміщень у вигляді шестикрокової процедури [Turner et al., 1956]:

«(1) Складну конструкцію потрібно спочатку замінити еквівалентною ідеалізованою конструкцією, що складається з базових несучих частин, які пов'язані одна з одною в обраних вузлових точках.

(2) Матриця жорсткості для кожного базового конструктивного елемента, що входить до складу ідеалізованої конструкції, повинна бути або відомою заздалегідь, або легко визначуваною.

(3) В той час як всі інші вузли вважаються зафіксованими, даному вузлу надається переміщення в одному з обраних координатних напрямків. Сили, необхідні для цього, і реакції, що виникають у сусідніх вузлах, визначають, комбінуючи відомі компоненти матриць жорсткості окремих елементів. Ці сили і реакції складають один стовпець повної матриці жорсткості. Як тільки у такий спосіб будуть розглянуті всі компоненти переміщень у всіх вузлах, буде отримана повна матриця жорсткості. У загальному випадку ця матриця буде мати порядок 3n×3n, де n дорівнює числу вузлів. Матриця жорсткості, отримана таким способом, буде сингулярною.

(4) Бажані умови закріплення можуть бути накладені шляхом викреслення з матриці жорсткості стовпчика і відповідного рядка, для номерів яких були визначені нульові переміщення. Це зменшує порядок матриці жорсткості і робить її несингулярною.

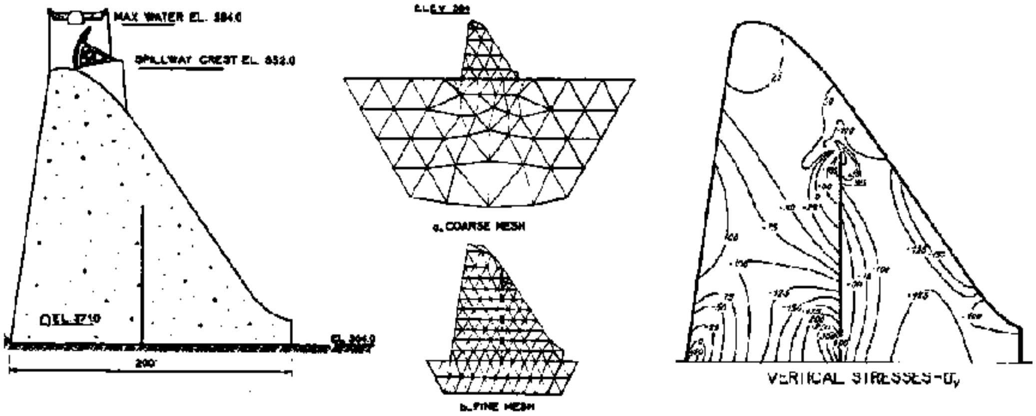
(5) При будь-якому заданому наборі зовнішніх сил у вузлах, виконавши матричні операції над матрицею жорсткості, отримаємо всі компоненти вузлових переміщень та зовнішні реакції.

(6) Внутрішні зусилля в елементах можуть бути знайдені з відповідних залежностей між силами і вузловими переміщеннями».

Хоча піонерна публікація [Turner et al., 1956] була орієнтована на розв'язання задач динаміки, було очевидно, що запропонована процедура «прямого методу жорсткостей», як її тоді назвали творці методу, цілком придатна і для аналізу статичної поведінки конструкції. Особливо це стало очевидним у зв'язку з раніше опублікованою серією робіт Дж. Аргіріса [Argyris, 1954-55], про які Клаф, що познайомився з ними в 1956 р., писав «... коли я прочитав ці статті, то негайно зрозумів, що для мене не було ніякої потреби щось створювати, щоб далі перейти до теорії структурного аналізу».

Мабуть, першим з досліджень напружено-деформованого стану, виконаних з використанням МСЕ, був розрахунок греблі в Норфолку, у якій температурні напруження викликали прямовисну тріщину біля центру перерізу (рис. 15.2). Про результати цього дослідження було повідомлено в 1960 р. [Clough, 1960]. У цій роботі, виконаній ще в 1958-1959 рр., була використана перша в світі комп'ютерна програма, що реалізує МСЕ, яку розробив аспірант Клафа - Ед Вільсон [Wilson, 1960].

Стаття 1956 року Тернера, Клаффа, Мартіна і Топпа, що дала старт методу скінченних елементів, поряд з серією робіт Аргіріса визначила образ першого покоління МСЕ, яке охоплює 1950 - 1962 роки. Піонери методу були інженерами, вихованими в традиції класичної механіки, які сприймали елементи несучої конструкції як пристрої для передачі сили. Елементи, розглянуті в [Turner et al., 1956], були характерними для конструкцій літальних апаратів. Відповідно тонкі пластинчасті елементи розглядалися як механічні пристрої, в яких у відповідь на вузлові переміщення виникають внутрішні сили, тобто в стилі методу переміщень. І хоча класичний метод сил в 1950-х роках домінував, метод переміщень був досить поширеним у динаміці і теорії коливань (зауважимо, що Тернер був фахівцем з аеропружності).



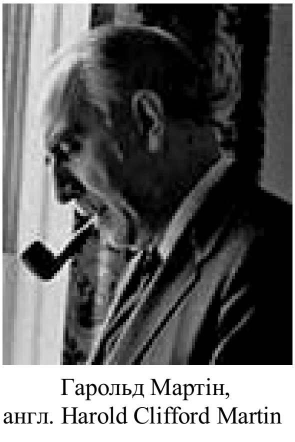
а б в

Рис. 15.2. Перша скінченно-елементна схема:
а – об’єкт , *б* – СЕ-модель, *в* – результат розрахунку

Подальший розвиток методу скінченних елементів підтвердив переваги методу переміщень, головним чином з точки зору зручності алгоритмізації розрахункової процедури. І основну роль тут зіграла та обставина, що в методі переміщень можна досить довільним чином вибрати систему вузлів (їх число і положення на конструкції), переміщення яких є основними невідомими.

15.2.2. Ланцюгова реакція

Піонерами і популяризаторами МСЕ були: Дж. Аргіріс, Р. Клаф, Г. Мартін, і О. Зенкевич, в значній мірі відповідальні за «передачу технології» від авіакосмічної промисловості до більш широкого діапазону технічних застосувань, що було зроблено наприкінці 1950-х і в 1960-і роки.



Гарольд Мартін,
англ. Harold Clifford Martin

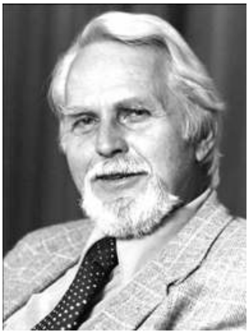
Рей Клаф і Гарольд Мартін, тоді молодші професори (доценти) відповідно в Каліфорнійському університеті в Берклі і в університеті Вашингтона в Сієтлі, впродовж літніх семестрів 1952 і 1953 років працювали в групі Тернера, який займався розрахунком дельтовидного крила літака для компанії Боїнг.

Дж. Аргіріс, як консультант Боїнга на початку 1950-х і експерт з методу сил в Імперському коледжі Лондона, контактував з групою Тернера і став, зрештою, послідовником МСЕ.

Ольгерд Зенкевич, знаний фахівець з методу скінченних різниць, в 1964 р. за наполяганням Клафа спробував застосувати МСЕ до своїх задач, після чого став активним послідовником цього методу [Zienkiewicz & Cheung, 1965]. У 1967 р. побачила світ і перша монографія, присвячена методу скінченних елементів, написана О. Зенкевичем і І. Ченгом [Zienkiewicz & Cheung, 1967]. Крім того Зенкевич організував європейську групу дослідників в Університеті Уельсу в Суонсі, до роботи в якій долучив блискучого інженера-обчислювача Брюса Айронса.

Важливу роль відіграли міжнародні конференції, які регулярно проводяться під егідою ECCM (Europian Community on Computational Methods in Applied Sciences). Тут обговорювалися новітні результати в області теорії і практики МСЕ.

Рис. 15.3. Джон Аргіріс, Рей Клаф і Ольгерд Зенкевич на 1-й конференції ECCM (Мюнхен, 1999)



Ольгерд Сесіл Зенкевич, англ. Olgierd Zienkiewicz (1921-2009) – британець польського походження, один з піонерів МСЕ.

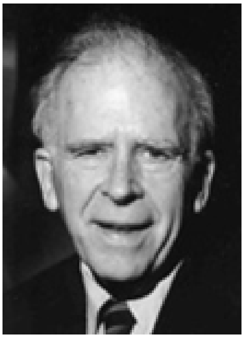
Шкільну освіту він отримав в Польщі, де його батько був суддею району Катовіце. Він і його сім'я переїхали до Великобританії через Другу світову війну. Зенкевич навчався на початку 1940-х в Імперському коледжі Лондона і в 1943 р. отримав з відзнакою першого класу ступінь бакалавра з цивільного будівництва. Відтак протягом ще двох років досліджував греблі під керівництвом професорів Імперського коледжу Альфреда Піпперда і сера Річарда Саусвелла. В 1945 р. отримав ступінь доктора філософії за дисертційну роботу під назвою «Класичні теорії проектування гравітаційних гребель в світлі сучасних аналітичних методів».

Зенкевич відомий тим, що вказав на загальний потенціал методу скінченних елементів, включаючи використання МСЕ для розв'язування задач поза межами механіки твердого деформівного тіла. Його книги з МСЕ стали першими, і до цього дня вони залишаються стандартними текстами для посилань. У 1968 р. він заснував перший журнал, присвячений обчислювальній механіці (International Journal for Numerical Methods in Engineering), який і досі лишається провідним журналом в цій галузі.

Географія його викладацької діяльності була досить різноманітною. Він читав лекції на Відділенні інженерії Единбургського університету, Шотландія (1949-1957), перш, ніж стати професором теорії споруд і цивільного будівництва в Північно-західному університеті штату Іллінойс, США (1957-1961). З 1961 до 1988 рр. він був головою факультету Цивільного будівництва в університеті Суонсі (Англія) і до кінця своїх днів лишався заслуженим професором цього університету.

Зенкевич отримав 28 почесних вчених ступенів від Ірландії, Бельгії, Норвегії, Швеції, Китаю, Польщі, Шотландії, Уельсу, Франції, Англії, Італії, Португалії, Угорщини та Сполучених Штатів. Він був членом багатьох наукових товариств і академій, включаючи Королівське товариство, Національну інженерну академію Сполучених Штатів, Польську, Італійську і Китайську академії наук.

Він отримав багато почесних нагород і медалей, включаючи Медаль Тимошенка американського товариства інженерів-механіків, Медаль Карла Фрідріха Гаусса Німецької академія наук і ін. Він сприяв створенню Асоціації обчислювальної механіки (ACME) і був її почесним президентом до кінця свого життя..



Роберт Мелош, англ. Robert J. Melosh

Перший етап методу скінченних елементів завершився роботами Р. Мелоша [Melosh, 1963] і Б. Айронса [Irons, 1964], [Irons, 1966]. У роботі Р. Мелоша було показано, що матриця жорсткості скінченного елемента може бути отримана виходячи з умов мінімізації потенціальної енергії, що дало поштовх переходу до варіаційного підходу при обгрунтуванні МСЕ і конструюванню різних скінченних елементів [Irons, 1964], [Fraeijs de Veubeke, 1968]. І, що не менш важливо, в роботах [Melosh, 1963], [Irons, 1966] були сформульовані вимоги для інтерполюючих функцій, які використовуються при побудові скінченних елементів.

Брюс Айронс, англ. Bruce Irons (1924-1983) - англійський інженер і механік, один з творців сучасної технології машинного розрахунку несучих конструкцій. Завдяки Брюсу Айронсу з’явилися такі поняття як «фронтальний метод», «ізопараметричний елемент», «кускове тестування», які стали невід'ємною частиною теорії розрахунків на міцність в другій половині двадцятого століття.

Брюс вчився в школі Короля Едварда VI, яку він закінчив в 1944 р. з відзнакою за успіхи у фізиці. Першим місцем роботи була фірма Callender's Cables, де він працював у науково-дослідній лабораторії.

Він залишив Callender's Cables в 1949 р. і перейшов до страхової компанії Лондонського Сіті. В цей час він тимчасово припинив заняття фізикою і повернувся до математики, вивчаючи її на вечірніх заняттях в Коледжі Birkbeck Лондонського університету. Отримавши там ступінь бакалавра, він знову переключився на фізику, коли перейшов до фірми Napiers, де працював старшим інженером. Вирішальним в інженерній кар'єрі Айронса став 1959 рік, коли він почав працювати у відділі аналізу напружень фірми Роллс-ройс.

Роки Брюса Айронса в Роллс-ройсі були виключно продуктивними; на додаток до більш ніж ста внутрішніх звітів, він опублікував роботи, що відносяться до задачі про власні значення, критеріям збіжності МСЕ, розрахунку пластин і елементів, що згинаються, а також перші згадки про кускове тестування.

Одночасно протягом трьох років він викладав в технологічному коледжі Дербі, де зустрівся з О. Зенкевичем, який очолив новостворений Відділ цивільного будівництва в університеті Суонсу. Туди був запрошений на роботу Б. Айронс. Пропрацювавши там до 1974 р., він отримав ступінь доктора наук без представлення дисертації, ця ступінь була йому привласнення університетом Уельсу за визначний внесок в теорію і практику МСЕ. Крім того він був удостоєний премії імені Фон Кармана британської авіаційної корпорації за впровадження в практику ізопериметричних елементів.

У 1974 р. Айронс переїхав до Канади, де до кінця життя обіймав пост професора цивільного будівництва в університеті Калгарі.

Було доведено, що для збіжності достатньо, щоб набір інтерполюючих функцій скінченного елемента задовольняв умову повноти і забезпечував сумісність деформацій на міжелементних границях. З умов повноти витікали вимоги до поліномів, якими представлені інтерполючі функції. Але, як було встановлено згодом, ці умови можуть бути сформульовані в термінах механіки, а саме – вимоги повноти виконуються, якщо, по-перше, апроксимуючі функції містять переміщення скінченного елемента як жорсткого цілого і, по-друге, якщо вони забезпечують можливість реалізації в елементі однорідного (тобто не залежного від координат) деформованого стану з довільними компонентами деформації.

15.2.3. Поширення на пластини і оболонки

Впродовж наступного п’ятиліття після цього було опубліковано безліч робіт з конструювання та використання скінченних елементів для двовимірних і тривимірних розрахункових моделей. І якщо розв’язання просторової задачі теорії пружності не поставило нових питань, і всі підходи, випробувані для плоскої задачі, вдалося зберегти, то об'єкти типу пластин і оболонок вимагали застосування нових ідей.

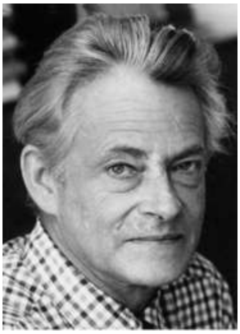
Кілька підходів було випробувано для конструювання скінченного елемента пластини, що згинається, тобто при переході від розв’язання гармонічного рівняння плоскої задачі до бігармонічного рівняння згину. Мабуть, першою тут була магістерська робота В. Папенфуса з університету Вашингтона в Сієтлі [Papenfuss, 1959], і майже відразу за нею з'явилися роботи [Adini & Clough R, 1960], [Melosh, 1961], де для цієї ж задачі була представлена так звана схема АКМ (Адині-Клафа-Мелоша), яка є однією з найпопулярніших в методі скінченних елементів для задачі згину пластин. Модель АКМ давала точний розв’язок для всіх компонент напруженого стану, постійних в межах елемента, але не забезпечувала сумісність кутів повороту на міжелементних границях. У той же час модель Папенфуса забезпечує сумісність на міжелементних границях, але не може реалізувати точний розв'язок для постійного за площею елемента крутного моменту.

Тут, по суті, вперше в методі скінченних елементів виник так званий несумісний (неконформний) елемент [Bazeley et al., 1966]. І можна зазначити, що оскільки інженери в меншій мірі, в порівнянні з математиками, уникають застосування на практиці теоретично необгрунтованих прийомів, немає нічого дивного в тому, що неузгоджені елементи були вперше запропоновані саме інженерами. На перших порах це не викликало особливої стурбованості, тим більше, що хоча використовувані схеми були несумісними, точність розв'язків, отриманих за їх допомогою, була цілком задовільною.

Але, тим не менше, коли відмінності між сумісними (конформними) і несумісними елементами були усвідомлені, Фрайш де Вебеке зробив спробу розробити конформний скінченний елемент для пластини, що згинається [Fraeijs de Veubeke, 1968].

Розробка скінченних елементів, що моделюють поведінку оболонкових конструкцій, пішла двома шляхами:

- сама геометрія оболонки також представлялася наближено, і її гладка серединна поверхня апроксимувалася багатогранником, сформованим плоскими скінченними елементами;
- використання викривлених скінченних елементів, які точно або з достатнім ступенем точності вписуються в серединну поверхню оболонки.


Бодуен М. Фрайш Де Вебеке, фр. Baudouin M. Fraeijs de Veubeke (1917 – 1976)

У першому випадку матрицю жорсткості елемента «плоскої оболонки» отримували простим підсумовуванням матриць жорсткості елемента плити, що згинається, і елемента плоскої задачі теорії пружності. Але така апроксимація дозволила отримати задовільні результати тільки при дуже великій кількості елементів в апроксимуючому ансамблі і далеко не завжди забезпечувала збіжність до точного розв'язку, навіть для випадку оболонок обертання. Тому подальші дослідження мали своїм основним завданням побудову різних типів скінченних елементів, які коректно описують геометрію оболонки і забезпечують необхідну точність розв'язку при обмеженій кількості елементів в ансамблі.

15.2.4. Ізопараметричний елемент

Слід зауважити, що побудова функцій форми (інтерполюючих функцій), які відповідають усім необхідним умовам, для елементів з криволінійними границями є дуже складним завданням. Інтеграли, що виникають у виразах елементних матриць жорсткості і вузлових векторів, вже не можуть бути обчислені в замкнутій формі. Наявні труднощі можна здолати, якщо використовувати концепцію ізопараметричного елемента, запропоновану в 1968 р. Б. Айронсом і О. Зенкевичем [Irons & Zienkiewicz, 1968]. У ізопараметричного елемента як геометрія самого елемента, так і переміщення задаються за допомогою однакових інтерполюючих співвідношень, а потім реалізується перехід до квадратур чисельного інтегрування. Саме в комбінації цих двох ідей міститься сутність пропозиції Айронса і Зенкевича.

Робота [Irons & Zienkiewicz, 1968] справила безпосередній і істотний вплив на весь комплекс досліджень по тематиці МСЕ. За короткий час ізопараметричні елементи (рис. 15.9) завоювали популярність у інших дослідників і стали своєрідним стандартом у розробників програмного забезпечення.

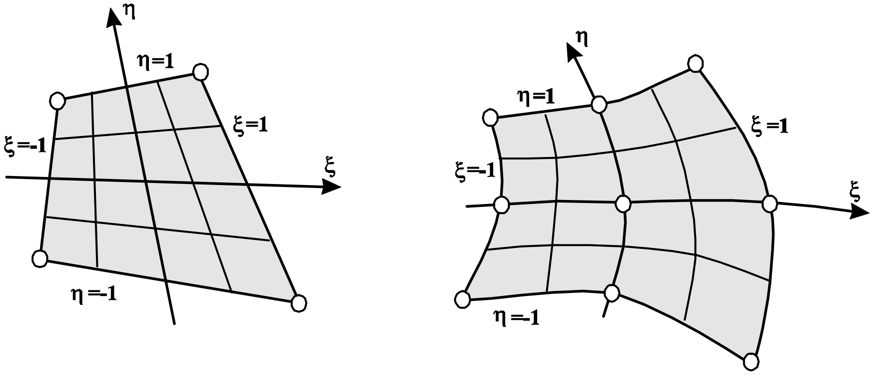


Рис. 15.9. Лінійний і квадратичний ізопараметричні елементи

Скінченний елемент циліндричної оболонки був запропонований Ф. Богнером, Р. Фоксом і Л. Шмітом [Bogner et al., 1967], він, як і елемент АКМ, не забезпечував точної збіжності деформацій на міжелементних границях. Що стосується нульової реакції на зміщення елемента як жорсткого цілого, то цей елемент такою властивістю був наділений. Така комбінація властивостей елемента виявилася в достатній мірі вдалою, і він з успіхом застосовується в розрахунковій практиці. Інші варіанти скінченних елементів для розрахунку оболонок не завжди правильно враховували проблему жорсткого зміщення, крім того для багатьох з них була помічена і інша негативна властивість матриці жорсткості, названа «зсувним замиканням», коли при згині тонких пластин і оболонок, що моделюються тривимірними елементами, значно зростають похибки, пов'язані з проявом фіктивних зсувних деформацій.

Особливо ці проблеми стають істотними, коли використовуються криволінійні системи координат, які вводяться для того, щоб краще описати геометрію тіл складної форми. Тоді компоненти деформацій залежать не тільки від похідних переміщень, а й від переміщень і поворотів елемента в цілому.

Для усунення цих недоліків О.С. Сахаровим була розроблена моментна схема скінченних елементів (МСКЕ) [Вайнберг и др. 1971], [Сахаров, 1974a], [Сахаров, 1974b], [Метод конечных элементов в механике твердых тел, 1982], яка дозволила врахувати основні властивості жорстких зсувів для ізопараметричних і криволінійних скінченних елементів ізотропних пружних тел. Суть її полягає в тому, що під час запису умов зв'язку деформацій з переміщеннями відкидаються ті члени розкладання деформацій в ряд, які реагують на жорсткі зміщення і на фіктивні зсувні деформації, що з'являються в такому разі. При цьому точні рівняння зв'язку деформацій і переміщень замінюються наближеними.

В рамках МСКЕ були розроблені ефективні підходи до розв’язання задач про нелінійне деформування елементів конструкцій. МСКЕ для сильно нелінійних задач механіки активно розвивалась в роботах О.С. Сахарова, В.М. Кислоокого, В.К. Цихановського [Кислоокий, Цыхановский, 1997], [Цыхановский, 1999], [Баженов та ін., 2000].

В дослідженнях, що проводились за активної участі М.О. Соловья [Баженов та ін., 2010] на базі розробленого універсального просторового скінченного елемента побудовано ефективний чисельний алгоритм для розв’язування задач нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки тонких оболонок при дії силових і температурних навантажень.

Результати зазначених досліджень за окремими напрямками представлені в роботах [Баженов та ін., 2002, 2003, 2009], [Bazhenov, Solovei, 2009].

15.3. Пошуки строгого обгрунтування

Метод скінченних елементів виник з будівельної механіки і теорії пружності, а вже потім було отримано його математичне обґрунтування. Істотний поштовх у своєму розвитку МСЕ отримав в 1963 р. після того, як Мелош [Melosh, 1963] довів, що його можна розглядати як один з варіантів поширеного в будівельній механіці методу Релея-Рітца, який шляхом мінімізації потенціальної енергії зводить задачу до системи лінійних рівнянь рівноваги. Після того, як було встановлено зв'язок МСЕ з процедурою мінімізації, він став застосовуватися до задач, описуваних рівняннями Лапласа або Пуассона. Трохи пізніше Фрайш де Вебеке досліджував збіжність і межі застосування різних скінченноелементних розв’язків в задачах лінійної теорії пружності [Fraeijs de Veubeke, 1965].

Математичний аналіз варіаційно-різнецевих методів, які з'явилися в другій половині 1960-х років, фактично передбачив сутність вимог зі збіжності методу скінченних елементів. І робота Фенг Канга [Feng Kang, 1965] присвячена таким методам, видана китайською, була невідомою західному світові більше десятиліття, розцінюється багатьма як така, що містить перше доведення збіжності методу скінченних елементів.

Математична теорія самого методу скінченних елементів почалася приблизно в 1968 р., і кілька відповідних досліджень були опубліковані в цьому році. Однією з перших публікацій, яка була присвячена проблемі збіжності МСЕ і в якій отримані апріорні оцінки похибок для білінійної апроксимації переміщень в елементі, є часто цитована стаття Джонсона і Мак-Клая [Jonson & McLay, 1968]. Ця стаття розвивала оцінки похибок в енергетичній нормі, і вказувала на погіршення збіжності через сингулярності в кутах досліджуваної області.

Слідом за цими роботами була проведена ціла низка досліджень, присвячених властивостям повноти і збіжності різних скінченноелементних апроксимацій. Так при скінченноелементному моделюванні пластин Бейзлі, Ченг, Айронс і Зенкевич [Bazeley et al., 1966] в якості критерію повноти запропонували, щоб при зміщенні елемента як жорсткого цілого не виникали деформації, і щоб інтерполюючі функції допускали постійні значення деформації і кривизни в елементі. Аналогічні вимоги забезпечення збіжності висувалися Айронсом і Дрейпером [Irons & Draper, 1965]. Доведення цієї гіпотези було дано пізніше Олівейрою [Arantes Oliveira, 1968].

Також в 1968 р. з'явилася важлива математична публікація [Zlamal, 1968], в якій розглядався детальний аналіз властивостей інтерполяції в класі трикутних елементів і їх використання для розв’язання лінійних еліптичних крайових задач другого і четвертого порядку. У тому ж самому році було опубліковано строге доведення збіжності скінченноелементного наближення для класу лінійних крайових задач, в яких використовувалися кусково-лінійні функції форми [Clarlet, 1968].

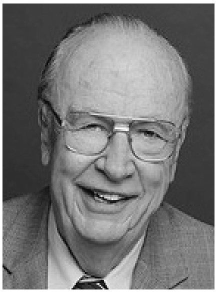
Таким чином, до 1972 р. метод скінченних елементів утвердився в якості нової важливої галузі чисельного аналізу в прикладній математиці.

Важливим компонентом в теорії скінченних елементів є проблема інтерполяції: наскільки добре можна наблизити функції даного класу для типового скінченного елемента? Про це було відомо багато з літератури з теорії наближень та аналізу сплайнів, але її застосування до скінченних елементів виявило певні технічні труднощі. Можна знайти результати з інтерполяції в багатьох ранніх публікаціях [Zlamal, 1968], [Bramble & Zlamal, 1970], [Babuska, 1971], і [Babuska & Aziz, 1972]. Але витончена робота [Clarlet & Ravlart, 1972] про інтерполяцію багаточленами Лагранжа і Ерміта скінченних елементів відзначається як один з основних вкладів у цей аспект теорії скінченних елементів.

У 1974 р. з'явилася важлива публікація Ф. Бреззі [Brezzi, 1974], в якій використовувалися отримані раніше результати з дослідження проблем сідлових точок і яка заклала основу для безлічі робіт щодо проблеми стійкості різних обчислювальних процедур скінченноелементного аналізу. В цей же час почалися дослідження збіжності спеціальних варіантів МСЕ, що використовували змішані і гібридні методи. Результати Ф. Бреззі і І. Бабушки для задач з обмеженнями послужили спільною основою для вивчення практично всіх змішаних і гібридних скінченних елементів (наприклад, [Raviart, 1975], [Raviart & Tomac, 1977], [Babuska, Oden, Lee, 1977]).

Значний внесок в розробку теоретичних основ МСЕ зробили радянські вчені. Корнєєв вказав на збіг математичної суті МСЕ і варіаційно-різницевого методу (ВРМ). Співставлення МСЕ з рядом варіаційних методів наведено в працях Л.О. Розіна.

Річард Галлагер,
англ. Richard
Gallagher
(1927-1997)



Іво Бабушка,
чеськ. Ivo Babuška

Тинслей Оден,
англ. Tinsley Oden

Певні труднощі при обгрунтуванні МСЕ

виникли при використанні несумісних скінченних елементів. Функції форми цих елементів не належать до енергетичного простору, і стандартний метод доведення «збіжності за енергією» тут не проходить. Математичні дослідження цього методу були проведені, наприклад, в роботах Бабушки і Зламала [Babuska & Zlamal, 1973], Чайрлета [Ciarlet, 1974], Г. Стренга і Дж. Фікса [Strang & Fix, 1973]. Виявилося, що збіжність істотно залежить від певних індивідуальних особливостей схем. Досить загальний метод дослідження збіжності несумісних скінченноелементних систем, а також спосіб конструювання збіжних несумісних елементів було вказано лише в 1981 році І.Д. Євзеровим [Евзеров, 1981].

Для тестування несумісних елементів використовувалося також кускове тестування (patch test) - простий індикатор якості скінченного елемента, розвинений Брюсом Айронсом [Irons & Razzaque, 1972], заснований на тому, що використовується точний розв’язок рівняння в частинних похідних для області, що складається з декількох скінченних елементів. Як правило, це точне рішення складається з зсувів, які змінюються як лінійні функції точки (йому відповідає стале рішення для напружень). Інженери довго вважали, що позитивна перевірка такого роду достатня для збіжності. Пізніше з'ясувалося, що позитивне кускове тестування не є ані достатнім, ані необхідним для збіжності.


Гілберт Стренг
англ. Gilbert Strang


Джорж Фікс,
англ. George Fix
(1939–2002)

1970-і роки також характеризуються тим, що в більшій мірі почала цінуватися універсальність методу скінченних елементів, і саме в цей час за допомогою МСЕ були отримані істотні результати в нелінійних проблемах. Були досліджені загальні нелінійні явища в механіці континууму, включаючи проблеми скінченної деформації твердих тіл і потоку в'язких рідин, які могли бути змодельовані скінченними елементами, і їх рішення були продемонстровані на існуючих комп'ютерах (див., наприклад, [Oden, 1972]). А до кінця цього десятиліття кілька скінченноелементних програм «загального призначення» вже використовувалися інженерами при вирішенні широкого класу нелінійних проблем в механіці деформівного твердого тіла і теплопередачі. В цей період також отримала розвиток математична теорія для нелінійних проблем. Тут маємо згадати важливу роботу [Falk, 1974] зі скінченноелементної апроксимації варіаційних нерівностей.

Можна стверджувати, що до 1980 р. було закладено твердий фундамент математичної теорії скінченних елементів для лінійних задач і виконані суттєві напрацювання в теорії і практиці розв’язання деяких нелінійних задач.

15.4. Інші варіанти МСЕ

15.4.1. Метод Рітца і метод Гальоркіна

В механіці деформівного твердого тіла використовується функціонал, який представляє собою потенціальну (функціонал Лагранжа) або доповнювальну (функціонал Кастільяно) енергію системи. Якщо у функціонал підставити апроксимуючі вирази шуканих функцій і застосувати до нього екстремальні принципи, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, розв’язком якої будуть значення вузлових невідомих.

Сфера застосування МСЕ значно розширилася, коли Оденом [Oden, 1969], а також Сабо і Лі [Szabo & Lee, 1969] було встановлено, що рівняння, які визначають елементи в задачах, можуть бути легко отримані за допомогою варіантів методу зважених нев'язок, таких як метод Гальоркіна або метод найменших квадратів.

Дійсно, для отримання розв’язувальних рівнянь використання варіаційних принципів не є обов'язковим (зокрема, потенціальна функція може не існувати). Тоді в розгляд вводиться нев’язка - відхилення наближеного апроксимативного розв’язку від точного розв’язку диференціальних рівнянь для даної задачі. Щоб отримати «найкращий» розв’язок, необхідно мінімізувати деякий інтеграл від нев'язок по розрахунковій області. Для підвищення ефективності в підінтегральний вираз поряд із самою нев'язкою зазвичай вводиться так звана вагова функція. Вибір схеми мінімізації та вагових функцій визначає різні варіанти методу нев’язок. Найбільш часто вживаним є метод Гальоркіна, який за наявності енергетичного функціонала призводить до тих самих рівнянь, що і варіаційний підхід.

Метод Гальоркіна зіграв важливу роль в теоретичному обґрунтуванні МСЕ, оскільки дозволив застосовувати його при розв’язанні багатьох типів диференціальних рівнянь [Demkowicz & Oden, 1986]. Таким чином, метод скінченних елементів перетворився в загальний метод чисельного розв’язання диференціальних рівнянь або систем диференціальних рівнянь.

15.4.2. Використання інших функціоналів

У задачах з особливостями (таких як урахування слабкої стисливості, розрахунок пластин і оболонок на базі тривимірних скінченних елементів) при використанні традиційних схем МСЕ в формі методу переміщень виникають суттєві труднощі [Irons, 1970]. Для їх подолання використовуються інші варіаційні принципи - Кастільяно (метод сил), Хеллінгера-Рейсснера, Ху-Васідзу (змішаний метод).

МСЕ в формі методу сил спочатку застосовувався де Вебеке [Fraerijs de Veubeke, 1965], проте пізніше цей варіант методу не отримав значного розвитку в силу складності при апроксимації напруженого стану. Ширше застосування знайшли змішані схеми МСЕ. Перша робота щодо змішаного методу була опублікована Л. Германном в 1965 р. [Herrmann, 1965] і була пов'язана з аналізом пластинки, що згинається. Згодом було розроблено цілу множину змішаних скінченних елементів для пластин і оболонок (Прато [Prato, 1968], Дж. Коннор [Connor & Will, 1971], А. Поцескі [Poceski, 1975, 1979], Ф. Бреззі [Brezzi et al., 1985, 1987]). У цих та подальших роботах щодо використання змішаного методу теорія базувалася на застосуванні варіаційних принципів і використанні функціоналів повної потенціальної і доповнювальної енергії. Поля переміщень і зусиль в об’ємі СЕ передбачалися незалежними одне від одного. Вперше абстрактний математичний аналіз таких методів був проведений в роботах [Aubin & Burchard, 1970] і [Babuska & Zlamal, 1973].

Маючи позитивні особливості, такі елементи мають і низку недоліків, як, наприклад, збільшення порядку розв’язувальної системи рівнянь в порівнянні з МСЕ у формі методу переміщень, порушення позитивної визначеності матриці системи. Тому для задач із зазначеними особливостями більш перспективним є розвиток гібридних схем МСЕ в формі методу переміщень на базі варіаційного принципу Лагранжа. Першою роботою, присвяченою гібридним скінченним елементам, була публікація Т. Піана і П. Тонга [Pian & Tong, 1969]. Ці автори побудували набір функціоналів, у яких поля одних функцій (скажімо, переміщень) незалежно варіюються в усій області визначення розв’язання задачі, тоді як інші функції (наприклад, напруження) варіюються тільки на деяких поверхнях (лініях), що розділяють цю область на підобласті, які не перетинаються. Відповідні цим функціоналам схеми методу скінченних елементів названі авторами гібридними схемами МСЕ. Цікаво відзначити, що ця ж ідея незалежного варіювання різних функцій (прогинів і поворотів) в області і на міжелементних границях скінченних елементів використовується в роботах японських вчених Кікучі і Андо [Kikuchi & Ando, 1972], що дозволило їм простими засобами подолати відомі труднощі МСЕ в теорії згину тонких пластин, пов'язані з вимогою безперервності першої похідної від функції прогинів.

Слід зазначити, що допоміжні невідомі, які використовуються в змішаних і гібридних варіантах МСЕ, як правило, пов'язані з похідними від шуканих переміщень і мають певний фізичний зміст, а їх обчислення іноді представляє навіть більший практичний інтерес, ніж дані про основні невідомі.

Але змішані функціонали мають два серйозні недоліки:

- відсутність екстремальних властивостей (точка стаціонарності не є точкою екстремуму для рейсснеріана) породжує труднощі обчислювального характеру;
- порядок змішаної системи рівнянь складається з суми порядків, зумовлених як апроксимацією переміщень, так і апроксимацією напружень.

Ці недоліки змушують з обережністю підходити до використання змішаних функціоналів.

З розвитком МСЕ і зростанням числа і якості його програмних реалізацій чітко стали проявлятися і недоліки методу. Основний і давно усвідомлений недолік МСЕ в формі методу переміщень - це, як не парадоксально, продовження його основної переваги.

Справді, найважливішою особливістю варіаційної постановки задачі, що використовує функціонал повної потенціальної енергії системи, є ослаблення вимог до гладкості розв’язку. Таке розширення області визначення розв’язку, з одного боку, допомагає будувати простір допустимих до порівняння функцій переміщень, а з іншого боку, воно виявляється занадто «слабким» для напружень, оскільки операція диференціювання, яка необхідна при переході від переміщень до напружень, може порушити безперервність компонент напруженого стану.

Аби не відмовлятися від переваг, дослідники стали шукати шляхи запобігання недолікам або хоча б згладжування їх негативного впливу.

У багатьох випадках інженер володіє апріорною інформацією про гладкість напружень при точному розв’язку задачі, і якщо ця інформація суперечить спостережній (очікуваній) гладкості, то виникає бажання надати розв’язку більшої «шляхетності».

Таким чином, суть проблеми полягає в побудові згладжуючого оператора, що проектує розривний розв’язок на деяку поверхню, гладкість якої узгоджена з наявною апріорною інформацією. Деякий час надії покладалися на ідею Барлоу, по якій напруження шукаються в деяких відмінних від вузлових «оптимальних» точках, де похибка напружень гарантовано мінімальна. Ця ідея не знайшла широкого застосування в силу труднощів, які виникають при пошуку оптимальних точок, крім того, користувач цікавиться, як правило, напруженням у вузлових точках сітки скінченних елементів.

Цікава ідея отримання вузлових значень напружень (зусиль) у МСЕ належить А.В. Вовкушевському [Вовкушевский, 1976]. Відповідно до його пропозиції разом з вузлом, в якому знаходяться напруження, розглядається «зірка» його елементів, тобто область, що складається зі скінченних елементів, які примикають до даного вузла. Сам цей вузол назвемо центром зірки. В межах зірки вводиться нова апроксимація переміщення, не пов'язана, взагалі кажучи, з тією апроксимацією, яка застосовувалася при визначенні вузлових значень переміщень, але така, що в кожному вузлі зірки нова апроксимація задовольняє тим переміщенням, які дає скінченно-елементний розв’язок. Для цього складається система рівнянь, яка є перевизначеною, тому її розв’язок слід шукати, наприклад, за методом найменших квадратів.

У зарубіжній технічній літературі великою популярністю користується так званий метод сполучених апроксимацій Одена [Oden & Reddy 1973]. На жаль, його варіаційне трактування (сам Оден не пов'язує свій метод з будь-якою варіаційною постановкою задачі) показує, що розв’язувальні рівняння випливають з умов стаціонарності функціоналу, який не має чітко вираженого фізичного сенсу. Цей недолік був усунутий в роботі В.І. Слівкера [Сливкер, 1982], де була запропонована схема побудови МСЕ, яка характеризується наступними властивостями:

- приймаються незалежні апроксимації силових і кінематичних полів;
- будуються дві системи рівнянь за Рітцем, кожна з яких має додатно визначену матрицю;
- крайові умови (як статичні, так і кінематичні) задовольняються точно.

На відміну від традиційного підходу, заснованого на виконанні умов стаціонарності одного функціоналу, в розглянутому методі з диференціальною постановкою задачі зв'язуються два функціонали, умови мінімуму яких на скінченновимірних підпросторах дають шукані системи рівнянь.

15.4.3.Дискретно-континуальний (напіваналітичний) МСЕ

Замість переходу від системи диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь, характерного для методу скінченних елементів, можливий перехід до системи звичайних диференціальних рівнянь. Мабуть, вперше ця ідея була висловлена академіком Л.В. Канторовичем [Канторович, 1934] і представляла собою розвиток методу Рітца. В задачах будівельної механіки, починаючи з 1931 року, підхід такого типу використовував В.З. Власов.

Такий підхід має ідейну спільність з методом Бубнова-Гальоркіна. Відмінність полягає лише в формі завдання наближеного виразу для шуканої функції декількох змінних: в методі Бубнова-Гальоркіна в якості коефіцієнтів при координатних функціях беруться невідомі константи, для визначення яких складається система лінійних алгебраїчних рівнянь, тоді як в методі В.З. Власова роль коефіцієнтів грають невідомі функції по одній з незалежних змінних. Ці функції визначаються з розв’язку системи звичайних диференціальних рівнянь.

З механічної точки зору цьому методу відповідає розрахункова модель конструкції, що представляє собою систему, яка має скінченне число ступенів свободи в напрямку однієї координати і нескінченно велике по іншій координаті. Такі системи В.З. Власовим були названі дискретно-континуальними, а сам метод часто називають дискретно-континуальним методом Власова [Шапошников, 2009].

Близьким до методів Канторовича і Власова є метод прямих (диференціально-різницевий метод) - це досить ефективний метод зниження розмірності вихідних крайових задач. В даному методі похідні по одній з незалежних змінних в двовимірних задачах і по двох незалежних змінних в тривимірних задачах замінюються наближеними різницевими виразами.

В задачах будівельної механіки такий підхід є відомим вже давно, його започатковано в роботі М.Г. Слободянського [Слободянский, 1939], який в своєму методі прямих вперше для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних застосував різницеву процедуру по одній з координат.

Цілком природним було узагальнення методу, коли при розв’язанні двовимірної задачі різницева процедура по одній координаті (або двох координатах для тривимірного випадку) замінюється скінченноелементною апроксимацією розв’язку. Такий метод скінченних смуг був запропонований в

Василь Захарович Власов,
рос. Василий Захарович Власов
(1906 – 1958)

Леонід Віталійович Канторович,
рос. Леонид Витальевич Канторович
(1912 - 1986)

Володимир Ісаєвич Слівкер,
рос. Владимир ИсаевичСливкер
(1937 – 2011)

1968 р. І. Ченгом [Cheung, 1968, 1996].

Метод скінченних смуг поєднує ідею аналітичного методу Канторовича-Власова і техніку методу скінченних елементів (МСЕ). Використовується так звана дискретно-континуальна модель об'єкта. Так, наприклад, тривимірна конструкція розбивається поздовжніми перерізами (лінійними вузлами або так званими вузловими лініями) і, таким чином, діскретизується тільки в одному, поперечному, напрямку. Результатом є композиція прямолінійних або криволінійних скінченних елементів (в двовимірному випадку - смуг). За іншими (поперечним) напрямками використовується звичайне скінченноелементне розбиття.

Основні невідомі (далі основні вузлові невідомі) розглядаються відносно вузлових ліній. На цих лініях основні невідомі змінюються безперервним способом уздовж поздовжньої координати і в класичному випадку представляються у вигляді суми деяких базисних функцій, які задовольняють граничні умови. В якості базисних використовуються тригонометричні функції, якщо, наприклад, вузлова лінія є колом, або поліноми Міхліна [Баженов та ін., 1993, 2012, 2014, 2017а, 2017б] для вузлових ліній іншого типу.

Стандартні напіваналітичі підходи погано справляються з урахуванням навантажень, розподілених на невеликих ділянках уздовж вузлової лінії, зокрема - зосереджених навантажень. Не менш критичні в цьому ж сенсі і граничні умови: для їх адекватного урахування потрібен певний спеціальний вид таких умов, який не має місця в загальному випадку. Точність і збіжність рішень, одержуваних за такими методами, часто сильно залежить від виду обраних базисних функцій для апроксимації невідомих, а також від кількості врахованих членів ряду. В той же час збіжність в зонах крайових ефектів, зосереджених дій, концентрацій напружень і деформацій (тобто в найбільш відповідальних зонах) вельми повільна і слабо залежить від числа врахованих членів ряду Фур'є, що частково пояснюється відомим в теорії рядів ефектом Гіббса.

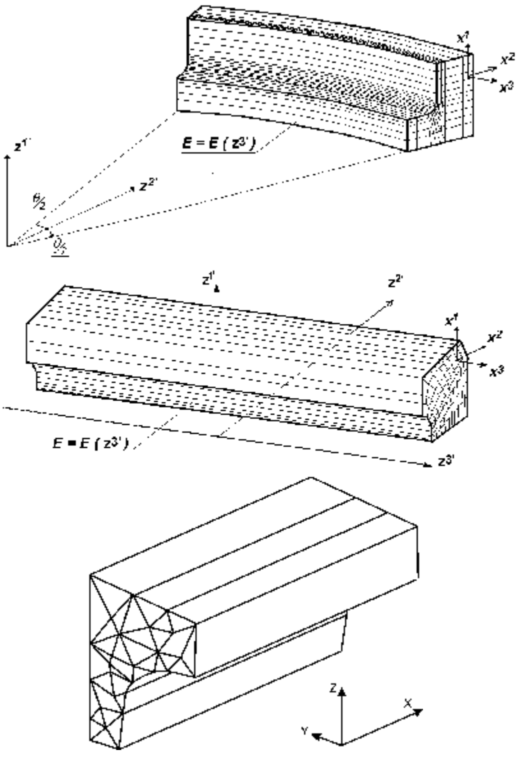


Рис. 15.10. Модель напіваналітичного методу

Для подолання цих труднощів відносно недавно був запропонований варіант дікретно-аналітичного методу, в якому використовується пряме розв’язання багатоточкової крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь. В рамках такого підходу О.Б. Золотовим та П.О. Акімовим [Золотов, Акимов, 2004] був реалізований стійкий алгоритм аналітичного розв’язання при будь-якому числі невідомих в коректній для обчислень формі.

15.5. Програмні реалізації

15.5.1. Вибір методу

В період з кінця 1950-х до початку 1960-х років, коли з'явилася можливість доступу до комп'ютерів, в проектних організаціях і в конструкторських бюро панував класичний метод сил, хоча і з'явилися прихильники методу переміщень. Інженери, виховані в 1940-х і 1950-х роках, часто були організаторами переходу до комп'ютерних розрахунків, і не дивно, що багато сил було витрачено на програмування методу сил [Robinson, 1966], [Резников, 1971].

Автор книги [Резников, 1971] Р.А. Резніков, який був прихильником використання методу сил, обрав такий епіграф до глави, яка була присвячена цьому методу: «Хорошу мелодію можна зіграти і на старій скрипці». Але в техніці, на відміну від мистецтва, «стара скрипка» ніколи не виграє конкурс, якщо не піддасться істотній модернізації, і, врешті-решт, в програмних реалізаціях загального призначення панівним став метод переміщень. Програми, що грунтуються на методі сил, залишилися лише в деяких об'єктно-орієнтованих розробках.

Досить характерною є наступна історія. У 1965 р. завдання NASA на розробку програми методу скінченних елементів NASTRAN містило вимогу одночасного розвитку версій методу переміщень і методу сил [MacNeal, 1988]. Як передбачалося, у кожної версії повинні були бути ідентичні можливості моделювання і можливості розв’язання задач, включаючи задачі про динаміку і великі деформації об’єктів. Зрештою розвиток версії методу сил було зупинено в 1969 р.

А характеризуючи результат конкурентної боротьби цих методів, можна навести відповідь Ейнштейна на запитання щодо реакції представників старої школи на нову фізику: «Ми не переконували їх; ми їх пережили».

Зауважимо, що говорячи тут про метод переміщень, ми весь час мали на увазі сучасне його трактування, орієнтоване на програмну реалізацію. У ті часи, коли основними інструментами обчислень інженера були олівець, папір і логарифмічна лінійка, при розрахунках рамних конструкцій, наприклад, зазвичай мовчазно вважалося, що стержні рами нестисливі. При ручних обчисленнях таке припущення зменшувало об'єм обчислювальної роботи за рахунок скорочення числа ступенів свободи вузлів стержневої системи. Порядок матриці жорсткості зменшувався, і користь від цього переважала всі недоліки, пов’язані з гіпотезою про нестисливість.

Але те, що добре було ще вчора, не є найкращим в наш час. Зокрема, деякі речі, корисні для ручного розрахунку, не обов'язково корисні і для комп'ютеризованих обчислень. Урахування податливості стержнів в поздовжньому їх напрямку дійсно призводить до збільшення числа ступенів свободи вузлів, але зате спрощує алгоритми формування загальної матриці жорсткості системи, а для розробників програмних комплексів остання обставина є більш важливою і суттєвою.

15.5.2. Становленння програмні архітектури

Розробка комп'ютерних программ, які реалізують МСЕ, почалася одночасно з появою цього методу. До цієї роботи долучився Едвард Вілсон, аспірант Тернера. В липні 1962 року Джон Тернер згадував [Turner et al., 1964]:

«У доповіді, представленій в 1959 році на зборах співробітників Підрозділу конструкцій і матеріалів AGARD[1] в Аахені (Німеччина), були описані суттєві особливості системи для чисельного аналізу конструкцій прямим методом жорсткостей. Характерною особливістю цієї специфічної версії методу переміщень є процедура збирання, в результаті якої матриця жорсткості для складної системи заповнюється прямим доповненням матриць, пов'язаних з елементами системи».

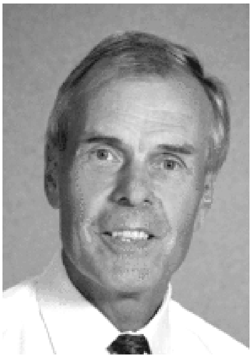
Це було одним з ключових елементів для всіх подальших розробок, і, до речі, першим з численних відступів від прямого використання матричних операцій. Численні інші відступи такого роду відбувалися пізніше, коли постало питання про роботу із зовнішньою пам'яттю.

Едвард Вілсон,
англ. Edward L. Wilson

Перша програма, створена Е. Вільсоном, ще не була розробкою промислового використання. Вона працювала в руках автора, і саме такими були і інші програмні розробки кінця 1950-х і початку 1960-х років. Протягом перших років кожен дослідник розвивав свою власну комп'ютерну програму або змінював програму іншого дослідника, щоб аналізувати певний тип конструкцій. Часто ці програми не були зареєстровані і не могли використовуватися будь-ким ще крім розробника. З цих причин Ед Вільсон в 1969 р. почав розвиток програми загального користування SAP (Structural Analysis Program) для цілей статичного і динамічного розрахунку [Wilson, 1970].

Програма SAP використовувала існуючу технологію того часу. У кожного вузла могло бути від нуля до шести ступенів свободи переміщень. В межах SAP були створені покажчики для вузлів, які дозволили кожному вузлу мати різні невідомі переміщення. Рівняння рівноваги формувалися в процесі побудови матриці жорсткості тільки для невідомих переміщень. Отже, програма була настільки ж ефективна, як спеціалізовані цільові програми, у яких було неповне число переміщень у вузлі.

У 1973 р. Клаус-Юрген Бате оновив динамічні гілки програми і створив варіант SAP IV [Bathe et al., 1993]. На час свого завершення SAP IV була однією з найшвидших і мала найбільші в світі можливості серед аналогічних розрахункових програм.



Клаус-Юрген Бате,
нім. Klaus-Jürgen Bathe

Але першим комерційним пакетом програм загального призначення, випущеним в 1969 році, став пакет ASKA

---

[1] AGARD (Advisory Group for Aerospace Research and Development) – консультативна група аерокосмічних досліджень – науково-технічна агенція, яка існувала в структурі НАТО з 1952 по 1996 роки.

(Автоматична система для кінематичного аналізу) [Argyris, 1969]. Він був розроблений в Німеччині в Інституті статики і динаміки аерокосмічних конструкцій (Institute of Statics and Dynamics of Aerospace Structures) під керівництвом Дж. Аргіріса.

Програма ASKA була орієнтована на певний тип машини, але швидкі темпи розвитку обчислювальної техніки привели до необхідності створення програми на мові, зрозумілій будь-якій машині. Можливості алгоритмічної мови ФОРТРАН зумовили її широке використання для програмування при розв’язанні задач методом скінченних елементів.

Програма NASA представляла собою спробу створення гнучкої програми для широких досліджень і розв’язання великих задач американської аерокосмічної промисловості. А створені в Суонсі програми FESS (Finite Element Solution Swansea) і FINESSE були більше орієнтовані на ефективне розв’язання інженерних задач будівельної механіки малих і середніх розмірів, таких, наприклад, як розрахунок мостів, гребель, ядерних реакторів. При їх розробці основна увага була приділена створенню простої системи, яку легко пристосувати до будь-яких конкретних задач.

Ця ідеологія була покладена в основу таких вітчизняних розробок, як програмна система ЛІРА або комплекс SCAD Office. Ці розробки, орієнтовані на використання масової комп’ютерної техніки, удосконалювалися разом зі зростанням технічних можливостей (але далеко не тільки за цей рахунок), і в даний час, коли їм доступні задачі з кількома мільйонами невідомих переміщень, їх уже важко вважати програмами для розв’язання малих і середніх задач. В той же час орієнтація на масового користувача позначилася на спрощенні вводу вихідних даних, розробці засобів контролю і візуалізації результатів.

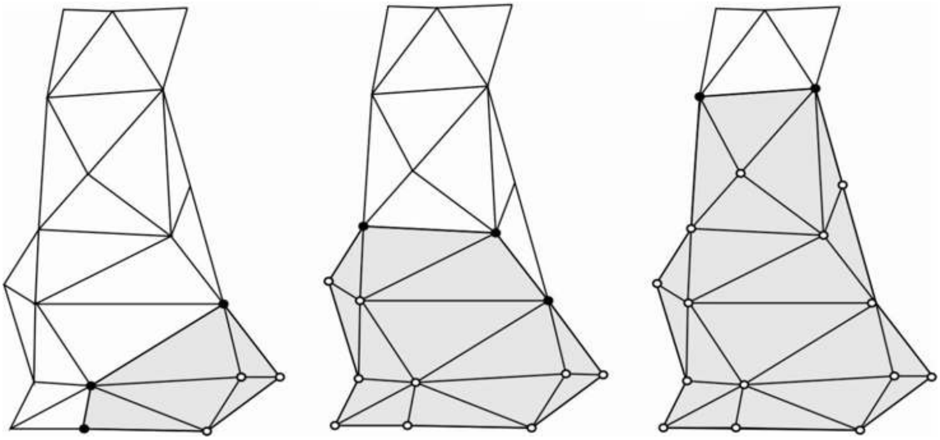
15.5.3. Пошук розв’язувальників

Серед методів розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями в МСЕ-програмах використовуються як прямі методи, так і ітераційні. Останні зазвичай застосовуються тоді, коли матриця системи рівнянь є позитивно визначеною.

Найперші програми використовували ітераційні розв’язувальники, оскільки розміри задач, які потрібно було розв’язувати, набагато перевершували можливості перших обчислювальних машин. Комп'ютери першого покоління мали достатню швидкість, але невелику пам'ять. Е. Вільсон пише «... мій перший комп'ютер Univac мав 1000 45-бітових слів, а IBM-701 - 2048 36-бітових слів. Зрозуміло, що розв’язання повної системи 100 рівнянь було тоді серйозним викликом» [Wilson, 1993].

Пізніше програми стали інтенсивно використовувати прямі методи, серед яких спершу переважав стрічковий метод, а потім і профільний метод [George & Liu, 1981], заснований на гауссовому виключенні. У 90-х роках більшої популярності набули методи, які тонко враховують розріджену структуру матриці. Завдяки ефективним алгоритмам упорядкування, які істотно зменшують заповненість в процесі факторизації, вдавалося значно скоротити розмір факторизованої матриці і тривалість обчислень. Однак ці програми ефективні тільки в тому випадку, коли вся матриця розташовується в оперативній пам'яті, тобто для відносно невеликих задач.

Це змусило розробників програм звернутися до технології запропонованого Брюсом Айронсом [Irons, 1970] фронтального методу, в якому збірка і виключення повністю зібраних рівнянь ведуться паралельно. Матриця жорсткості системи в явному вигляді не збирається, а замість цього додається елемент за елементом. Як тільки черговий вузол стає зібраним, тобто всі елементи, що примикають до нього, включені в ансамбль, то відразу невідомі, що належать цьому вузлу, і асоційовані з ними рівняння виключаються. При цьому додавання наступних елементів не вноситиме до них ніяких змін. В результаті гауссове виключення проводиться в щільній (фронтальній) матриці відносно невеликої розмірності, що складається з двох частин, одна з яких є повністю зібраною. Повністю зібрані рівняння відразу виключаються, і відповідна частина матриці записується на диск. Далі додається черговий скінченний елемент, і знову зібрані рівняння виключаються.



а *б* *в*

Рис. 15.12. Етапи методу Айронса (зібрана частина є затемненою):
● – вузли фронту, ○ – вузли з розв'язаними рівняннями)

Найвідповідальнішим моментом при використанні прямих методів є впорядкування рівнянь, націлене на зниження заповнюваності. В силу того, що оптимальне розв'язання проблеми є дуже затратним, на практиці використовують евристичні алгоритми, найбільш поширеними з яких є алгоритм мінімального ступеня, метод вкладених перерізів, метод паралельних перерізів і метод множинних перерізів [George & Liu, 1981].

При використанні зазначених методів впорядкування в поєднанні з технікою фронтального методу, як правило, виникає кілька фронтів, оскільки при заданій послідовності виключення вузлів скінченноелементної моделі протягом значної частини процесу збирання-виключення утворюються несуміжні групи елементів. Відповідний підхід, ефективний як для паралельних обчислень, так і для звичайних комп'ютерів, відомий як багатофронтальний (мультіфронтальний) метод. На сьогоднішній день це один з найбільш ефективних і, мабуть, єдиний метод факторизації розріджених матриць великої розмірності в програмних комплексах промислового типу [Фиалко 2009].

Розроблений С.Ю. Фіалком блоковий багатофронтальний метод відрізняється повною автоматизацією поділу вихідної конструкції на підконструкції, заснованому на природному об'єднанні рівнянь в групи, асоційовані з вузлами розрахункової моделі. У цьому сенсі метод є узагальненням методу суперелементів і відрізняється від останнього автоматичним розчленуванням конструкції на суперелементи.

Не залишилися без уваги і ітераційні методи розв’язання системи розв’язувальних рівнянь МСЕ, які зазвичай застосовуються тоді, коли досліджуються дуже великі задачі будівельної механіки. Особливо це стосується задач розрахунку тривимірних об'єктів з досить густою скінченноелементною розбивкою.

Найбільшого поширення серед вдосконалених ітераційних методів, які застосовуються зараз, отримав метод сполучених градієнтів з передобумовленням. Передобумовлення - це потужний спосіб прискорення збіжності ітераційних методів. Він полягає в побудові позитивно визначеної (зазвичай симетричної) матриці, на яку множиться дана матриця коефіцієнтів, в результаті чого відбувається перехід до перетвореної матриці, число обумовленості якої повинно бути меншим, ніж у відповідної вихідної.

Відомо, що для більшості задач статичного розрахунку споруд істотний внесок в розв’язок вносять плавні складові, для задовільної апроксимації яких потрібна скінченноелементна модель з невеликим числом вузлів. Для урахування цієї особливості застосовуються багаторівневі (багатосіткові) ітераційні методи. Детальна скінченноелементна модель з високим ступенем сіткового розбиття потрібна лише для апроксимації частини розв’язку, яка швидко змінюється. Більш того, кожному «діапазону плавності» для складових розв’язку відповідає певна необхідна ступінь дискретизації скінченноелементної розрахункової схеми. У зв'язку з цим цілком природно побудувати ітераційний процес розв’язання задачі на послідовності сіток, найдрібніша з яких збігається з самою детальною скінченноелементною розбивкою конструкції, а решта є допоміжними, причому розв’язок задачі на найбільшій сітці (моделі грубого рівня) доцільно здійснювати прямим методом.

Багатосітковий ітераційний метод розв’язання використовувався А.В. Вовкушевським [Вовкушевский, 1976], який продемонстрував значно кращу збіжність, ніж традиційні ітераційні методи. Вельми ефективний варіант багатосіткового напівітераційного методу для розрахунку тривимірних масивних конструкцій був запропонований О.Б. Золотовим, М.В. Бєлим і В.Є. Булгаковим [Золотов и др.,1985].

15.5.4. Крокова процедура

Для розв’язання нелінійних задач творці МСЕ ще в роботі 1956 р. рекомендували крокову процедуру (step by step methods), що було цілком природно для розглянутої задачі динаміки, коли ця процедура застосовується для розв'язання задачі Коші.

У задачах статики ідея продовження розв'язку за параметром в обчислювальних цілях вперше була реалізована М. Лаеєм [Lahaye, 1934]. Він ввів в трансцендентне рівняння параметр p таким чином, щоб при p = 0 можна було б легко отримати розв'язок, а при p = 1 рівняння перетворилося в вихідне. М. Лаей запропонував будувати розв'язок для кожного наступного значення pi методом Ньютона-Рафсона, використовуючи розв'язок, отриманий на попереднього кроку pi-1, в якості початкового наближення.

Інше формулювання методу належить Д.Ф. Давиденку [Давиденко, 1953], який застосував його (під назвою «метод варіації параметра») до широкого класу задач прикладної математики, які потребують розв'язання нелінійних операторних рівнянь виду F(x,p)=0. Він, мабуть, був першим, хто усвідомив процес продовження за параметром як рух і застосував до нього апарат диференціальних рівнянь. Ці рівняння були лінійними відносно похідних dx/dp і розв'язувались за допомогою будь-якого з відомих чисельних методів (Ейлера, Рунге-Кутти, Адамса тощо).

Найчастіше використовується метод Ейлера, який характерний тим, що в ньому не передбачена компенсація похибки обчислень, викликаної лінеаризацією нелінійних рівнянь на кожному кроці. Тому досягнення необхідної точності може бути отримано шляхом зменшення величини приросту навантаження. Є також варіанти неявних схем інтегрування задачі Коші за параметром із застосуванням різних способів поліпшення збіжності ітераційних процесів типу методу Ньютона-Рафсона.

Незалежно від робіт Давиденка, В.В. Петровим в розвиток ідеї В.З. Власова був сформульований відомий метод послідовних навантажень для розв'язання задач геометрично нелінійного деформування оболонок [Петров, 1959]. Виходячи з припущення про малість приростів прогинів і напружень при малих приростах навантаження, В.В. Петров сформулював рекурентну послідовність лінійних крайових задач для визначення цих приростів.

Вибір параметру продовження розв'язку є головним фактором, що забезпечує можливість продовження розв'язку в околі особливих точок. У статтях [Феодосьев, 1963] і [Ворович, Зипалова, 1965], мабуть, незалежно один від одного в рамках континуальної моделі було запропоновано здійснювати продовження розв'язку вздовж кривої станів рівноваги в просторі m+1 координат і параметра навантаження. В якості параметру продовження пропонувалося використовувати довжину приросту цієї кривої.

У задачах дискретної нелінійної будівельної механіки метод продовження за параметром, в якому в якості параметра використовується довжина дуги кривої рівноважних станів, вперше був запропонований Ріксом [Ricks, 1972] і Вемпнером [Wempner, 1971]. Наступні модифікації цього методу були виконані Крісфілдом [Crisfield, 1980]. Ним запропонована модифікація методу, в якій довжина хорди дуги кривої утримується постійною. Таким чином, розв'язок задачі відшукується на перетині істинної кривої рівноважних станів і сфери з центром в попередній обчисленій точці кривої і радіусом, рівним заданій довжині хорди.

В.І. Шалашилін і Є.Б. Кузнецов отримали математично строге доведення того, що такий вибір параметра продовження розв’язку у вигляді довжини дуги кривої, що представляє розв’язок нелінійного рівняння, є найкращим [Шалашилин, Кузнецов, 1999].

НАРИС 16

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наука будується з фактів, як будинок будується з цегли; але сума фактів не є наукою, так само як купа цегли ще не є будинком.

А. Пуанкаре

Вступ

Серед методів, які успішно використовуються для чисельного розв’язання складних задач будівельної механіки, одне з чільних місць займає метод граничних елементів (МГЕ). Разом з тим слід зауважити, що цей метод може бути застосований не тільки в задачах про НДС елементів конструкцій, але також для дослідження широкого кола головним чином лінійних задач фізики, електротехніки, теплотехніки, гідромеханіки, фільтрації тощо, тобто може розглядатись у якості доволі універсального чисельного засобу.

Найпривабливішою властивістю МГЕ є пониження геометричної розмірності задачі на одиницю, що значно зменшує витрати при підготовці вихідної інформації та обчисленнях. Це пов’язано з тим, що математичною основою методу є граничні інтегральні рівняння, побудова дискретного аналогу яких і складає суть МГЕ. При цьому в повному обсязі використовуються фундаментальні властивості розв’язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Ці властивості протягом багатьох років були предметом інтенсивних досліджень видатних математиків, результатом плідних інтелектуальних зусиль яких стало глибоке проникнення у властивості диференціальних рівнянь з частинними похідними та створення теорії потенціалу.

Одна з головних ідей МГЕ полягає у використанні залежності між значеннями шуканих функцій в точках всередині розглядуваної області (так званих точках спостереження) та значеннями цих функцій на границі. Така залежність має інтегральний характер і після винесення точки спостереження на границю призводить до утворення інтегральних рівнянь, що містять в якості невідомих тільки граничні значення функцій. Ці рівняння називають граничними інтегральними рівняннями (ГІР); вони у певному сенсі є еквівалентними диференціальним рівнянням задачі, розв’язок яких розшукується у всій розрахунковій області.

Метод граничних елементів за своєю сутністю є чисельною реалізацією розв’язання ГІР, тому МГЕ часто називають методом граничних інтегральних рівнянь або використовують обидві назви почергово як синоніми. В той же час необхідно усвідомлювати, що назва «метод граничних інтегральних рівнянь» є більш широкою, ніж «метод граничних елементів», оскільки передбачає можливість розв’язання інтегрального рівняння будь-яким можливим способом, не обов’язково застосовуючи процедуру розбиття границі на фрагменти з апроксимацією функцій в їх межах поліномами або якимось іншими наближеними виразами. Можна, наприклад, застосовувати послідовні наближення, замінювати ядра рівняння більш простими виразами, розкладати шукані функції в ряди тощо. Однак будь-який спосіб розв’язання пов’язаний з обчисленням інтегралів, яке без розбиття границі на елементи можна провести тільки для найпростіших розрахункових областей. Отже, при розв’язанні практичних задач терміни МГЕ і МГІР можна вважати еквівалентними.

Зрозуміло, що назва «метод граничних елементів», яка безпосередньо пов’язана з дискретизацією границі, з’явилась в комп’ютерну еру. З іншого боку, математичний апарат інтегральних рівнянь був розвинений набагато раніше і продовж довгого часу лишався не засобом чисельного розв'язання задач, а потужним знаряддям теоретичного дослідження проблем математичної фізики. За його допомогою доводились теореми існування і єдиності крайових задач, з'ясовувався характер сингулярностей в особливих точках, вивчалися спектри операторів тощо. Ці дослідження лишили помітний слід в історії математики і пов'язані з такими вченими як Е. Бетті, В. Вольтерра, Д. Гільберт, Ж. Ліувілль, Дж. Лаурічелла, О.М. Ляпунов, К. Нейман, А. Пуанкаре, К. Соміліана, Е. Фредгольм.

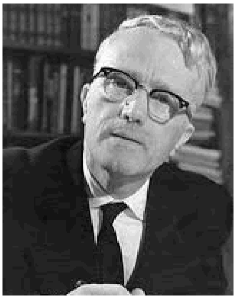

Енріко Бетті,
італ. Enrico Betti
(1823 – 1892)

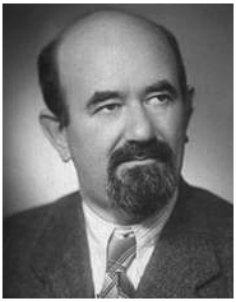

Карл Готфрід
Нейман,
нім. Carl Gottfried
Neumann
(1832 – 1925)


Ерік Івар
Фредгольм,
швед. Erik Ivar
Fredholm
(1866 – 1927)

Починаючи з 20-х років XX-го ст. центр інтенсивних теоретичних досліджень інтегральних рівнянь поступово перемістився до колишнього СРСР. Найбільш значний теоретичний внесок зробили такі вчені як І.Н. Векуа, Н.П. Векуа, Ф.Д. Гахов, В.Д. Купрадзе, С.Г. Міхлін, М.І. Мусхелішвілі, В.А. Фок, Д.І. Шерман, М.О. Кільчевський.


Ілля Несторович
Векуа
(1907-1977)


Віктор Дмитрович
Купрадзе
(1903 — 1985)


Соломон Григорович
Міхлін
(1908 — 1990)


Микола (Ніколоз)
Іванович
Мусхелішвілі
(1891 — 1976)


Микола
Олександрович
Кільчевський
(1909 — 1979)


Федір Дмитрович
Гахов
(1906 — 1980)

Розвитку методів потенціалу та їх застосуванню до розв'язання різних класичних і некласичних крайових задач значною мірою сприяли роботи І.С. Аржаних, С.М. Белоносова, М.М. Бородачева, А.І. Каландії, Б.Г. Коренева, Я.Б. Лопатинського, В. Новацького та багатьох інших вчених. Зауважимо, що досить повні відомості щодо робіт по теорії потенціалу і граничним інтегральним рівнянням можна знайти в монографіях [Михлин, 1947, 1962], [Мусхелишвили, 1966, 1968], [Векуа, 1970], [Купрадзе и др., 1976], [Партон, Перлин, 1981].

16.1. Становлення МГЕ. Від теорії до чисельної реалізації

Мабуть, справедливо буде пов'язати заснування методу ГІР з ім'ям Джорджа Ґріна, який в 1828 році сформулював інтегральне подання розв'язку задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа, ввівши для цих задач так звану функцію Ґріна [Green, 1828]. В 1872 р. Енріко Бетті [Betti, 1872] запропонував загальний метод інтегрування рівнянь пружності і вивів їх розв'язок в інтегральній формі. Загалом, його підхід можна розглядати як розповсюдження методології Ґріна на рівняння пружності Нав'є. В 1885 р. Карло Соміліана вивів, використовуючи теорему взаємності Бетті, інтегральне подання розв'язку задачі теорії пружності [Somigliana, 1885]. У вираз, який він отримав, входили масові сили, а також граничні переміщення і напруження. На початку 20 сторіччя Ерік Фредгольм вперше використав сингулярні граничні інтегральні рівняння для знаходження невідомих граничних величин в задачах теорії потенціалу [Fredholm, 1903].

Джордж Ґрін,
англ. George Green
(1793 — 1841)

Слід сказати, що продовж довгого часу роботи, пов'язані з методом ГІР, носили суто математичний характер, тобто його здебільшого використовували як математичний інструмент для визначення невідомих граничних умов при постановці задач математичної фізики, а не як метод розв'язання цих задач. Пов'язане це з тим, що знайти аналітичний розв'язок ГІР вдається тільки для областей з найпростішою геометрією границі, а в більшості задач зробити це неможливо. Разом з тим, зменшення на одиницю геометричної розмірності, яке досягається при переході до ГІР, є дуже привабливим з точки зору можливостей прикладного характеру. Навіть за відсутності обчислювальної техніки ця перевага стимулювала перші спроби чисельного розв'язання ГІР.

В 1926 р. Р. Міше [Miche, 1926] отримав ГІР для плоскої задачі теорії пружності при заданих на границі зусиллях і запропонував процедуру чисельного розв'язання рівняння за допомогою послідовних наближень. Вже в цій роботі при інтегруванні була

Карло Соміліана,
італ. Carlo Somigliana
(1860 – 1955)

використана заміна контуру скінченною сукупністю граничних елементів. Були розв'язані декілька прикладів, що продемонструвало точність та великі можливості методу. Дещо пізніше, в 1931 р., Е. Вейнель [Weinel, 1931], підтримуючи напрям Р. Міше на використання ГІР для чисельного розв'язання задач, поширив його результати на випадок, коли на границі задані переміщення та на задачі згину пластин.

Чітке розуміння тих перспектив, які відкриває скорочення геометричної розмірності задачі на одиницю, і передбачення того, що майбутнє розрахункових методів значною мірою пов'язане з використанням ГІР, ясно простежується і в роботах, опублікованих наприкінці 30-х та на початку 40-х років 20 сторіччя. Дуже показові в цьому відношенні дослідження Н.І. Мусхелішвілі, який, написавши серію чудових статей по створенню і дослідженню ГІР для плоскої задачі теорії пружності, завершив її в 1937 р. роботою [Мусхелишвили, 1937], спеціально присвяченою чисельному розв'язанню задач за допомогою отриманих ним рівнянь, а його учні А.Я. Горгідзе і А.К. Рухадзе реалізували розроблений підхід. Їх стаття [Горгидзе,. Рухадзе, 1940] містить всі компоненти комплексної процедури, яку зараз використовують під назвою «метод граничних елементів». Тут вже здійснюється розбиття границі на елементи, апроксимація функцій в межах цих граничних елементів, зведення до алгебраїчної системи, розв'язання останньої, яке дає невідомі значення функцій на елементах границі, обчислення напружень в точках тіла. Цим способом в роботі розв'язані дві задачі - тестова для круглого диска та ілюстративна для лемніскати. Переконливо показано, що ГІР можуть бути не тільки інструментом теоретичного аналізу, але і універсальним засобом для розв'язання різноманітних прикладних задач.

У тому ж 1940 р. вийшла ще одна робота, присвячена чисельному розв'язанню ГІР для плоскої задачі теорії пружності [Левина, Михлин, 1940]. У ній Ц.О. Левіна і С.Г. Міхлін розглянули площину з двома вирізами. Ця область конформно відображається на кругове кільце, для якого відома функція Гріна. В результаті отримане ГІР, яке розв'язане чисельно шляхом попереднього розкладання його ядра в ряд і переходу до близького рівняння з виродженим ядром, а останнє розв'язувалося зведенням до алгебраїчної системи. Зауважимо, що чисельний розрахунок зайняв у авторів близько півроку інтенсивної роботи.

Як справедливо зазначив А.М.Ліньков [Линьков, 1987], повторювати подібні досліди в епоху механічних арифмометрів могли лише поодинокі ентузіасти. Висока трудомісткість таких розрахунків сильно стримувала систематичну реалізацію цього напрямку на практиці, але було ясно, що за гострої необхідності розв'язати ту чи іншу задачу за допомогою випробуваного методу цілком можливо. Однак в ту пору трудомісткість розрахунків цим методом явно не відповідала гостроті проблем, що вирішуються за його допомогою. Основна перешкода була пов'язана із малою швидкістю виконання арифметичних операцій, які необхідно виконувати при чисельному інтегруванні і розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. З метою обійти ці труднощі, виявилось доцільним при обчисленні інтегралів використовувати в плоских задачах графомеханічні прилади типу інтеграторів. Якщо, крім того, не приводити ГІР до системи алгебраїчних рівнянь, а використовувати послідовні наближення, то можна виключити і арифметичні операції, необхідні для розв’язання системи. Такий спосіб був запропонований і реалізований Ш. Массоне, який докладно описав його в своїй роботі [Massonnet, 1949]. Це був перший конкретний крок на шляху автоматизації розрахунків при розв’язанні задач теорії пружності. Однак тріумфальний наступ електронних обчислювальних машин, який почався приблизно в той же час, природним чином примусив дослідників перемістити увагу на ці набагато досконаліші обчислювальні пристрої.

З огляду на успіхи в розвитку електронних цифрових машин, Ш. Массоне в 1957 році запропонував розв’язувати отримане їм ГІР для просторової задачі теорії пружності шляхом послідовних наближень [Massonnet, 1957]. Домінуюча ідея Массоне про необхідність переведення розрахунків на індустріальні рейки зробила його піонером використання комп’ютерів для систематичного розв’язання ГІР в задачах теорії пружності. Вже до 1960 року ця ідея була їм реалізована. В доповіді [Massonnet, 1961] детально описана комп’ютерна процедура чисельного розв’язання ГІР плоскої задачі теорії пружності за допомогою послідовних наближень і наведені приклади, що ілюструють високу ефективність розрахунків. Узагальнюючи попередні роботи по чисельному розв’язанню ГІР на комп'ютерах, Ш. Массоне опублікував в 1965 р. підсумкову роботу [Massonnet, 1965], в якій поєднуються простота викладу, високий теоретичний рівень і практична спрямованість. Він розглянув збіжність послідовних наближень, чітко виділив алгоритмічні риси методу граничних елементів в його «канонічному» вигляді і яскраво проілюстрував його на прикладах задач про кручення і плоску деформацію. Цікаво, що в цій чудовій за змістом і формою роботі Массоне, обговорюючи питання точності, вперше помітив і пояснив значну похибку, що виникає при розв’язанні задачі про згин балки, якщо використовувати МГЕ в найпростішому варіанті - при кусково-лінійній апроксимації функцій в межах елементів. Та й сам факт уваги до обмежень і недоліків вигідно відрізняє статтю [Massonnet, 1965] від багатьох подальших робіт, в яких часом переважає рекламна сторона, і рідко згадуються невдачі та аналізуються їх причини.

Приблизно тоді ж – на початку 60-х років XX ст. – М. Джесуоном і А. Понтером за допомогою комп’ютерної МГЕ-програми була розв’язана задача про кручення [Jaswon, Ponter, 1963]. У цій роботі питанням точності також приділено серйозну увагу.

Поява якісно нової електронної-обчислювальної техніки усунуло характерний для попередньої епохи дисбаланс між трудомісткістю розрахунків на основі МГЕ і практичною потребою в них. З кінця 60-х років почалося широке використання цифрових машин для розв’язання за допомогою МГЕ задач теорії пружності. Цей процес був відзначений появою чудових по ясності і глибині викладу робіт М. Джесуона зі співавторами [Jaswon et al., 1967], Ф. Ріццо [Rizzo, 1967], Т. Круза [Cruse, 1969], які застосували МГЕ до дво- та тривимірних задач теорії пружності. В 1968 р. Т. Круз і Ф. Ріццо [Cruse, Rizzo, 1968] розв’язали динамічну задачу, а Ю.Ігначак і В.Новацький [Ignaczak J., Nowacki, 1968] отримали інтегральні рівняння термопружності. Нарешті, в 1970 р. Ф.Ріццо і Д. Шиппі [Rizzo, Shippy, 1970] розповсюдили метод на плоскі задачі анізотропної пружності. З початку 70-х років кількість публікацій почала невпинно зростати. Дати їх короткий огляд важко, оскільки число робіт велике, а дослідження велися за багатьма напрямками.

Підсумки етапу становлення МГЕ підведені в монографіях [Бенерджи, Баттерфилд, 1984], [Бреббия и др., 1987], [Hartmann, 1989], [Becker, 1992], в яких містяться короткі історичні огляди та приведені основні роботи з МГЕ, перелік яких, мабуть, варто доповнити даними про роботи радянських вчених, які заслуговують бути відзначеними серед публікацій, що стосуються етапу становлення МГЕ як практичного засобу розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла [Александров, 1955, 1973, 1975], [Линьков, 1968, 1983], [Пєтухов и др., 1976], [Копейкин, 1970, 1971], [Гольдштейн и др., 1972, 1973], [Зиновьев, 1972], [Перлин, 1975], [Белоцерковский, Лифанов, 1985]. Необхідно зауважити, що помітне місце серед них займають роботи українських вчених. Так ще на початку 60-х років з'явилися публікації співробітників Київського національного університету будівництва і архітектури Д.В. Вайнберга та О.Л. Синявського [Вайнберг, Синявський, 1960, 1961], присвячені застосуванню методу потенціалу до розрахунку оболонок. Згодом до них приєднались Ю.В. Верюжський, І.З. Ройтфарб [Верюжський и др., 1969] та Г.Б. Ковнеристов [Ковнеристов, 1962]. Продовж 70-х та 80-х років під керівництвом зазначених вчених плідно працювали великі наукові групи, до складу яких входили, зокрема, О.І. Віннік, В.В. Савицький, В.В. Вусатюк, О.Я. Петренко, О.В. Глімбовський, Ю.В. Ворона, Є.І. Кременець та інші науковці. В роботах, очолюваних Ю.В. Верюжським, розвивався напрям, який його автори називали «чисельно-аналітичним методом потенціалу». Успішно розв'язувалися задачі про деформування комбінованих конструкцій, які складалися з пластинчастих та масивних елементів. Дослідження, керовані І.З. Ройтфарбом, стосувались задач про коливання та термопружне деформування масивів. Також розглядались непрямі варіанти методу ГІР. Під керівництвом Г.Б. Ковнеристова отримав розвиток комплексний метод ГІР для плоскої задачі теорії пружності. Характерною особливістю цих робіт була орієнтація на створення універсальних і ефективних програмних засобів, що призвело до створення комплексів прикладних програм «Потенціал» [Пакет прикладных программ для расчета…, 1987, 1988] та «Поле» [Глимбовский, Кременец, 1986], які реалізують МГЕ стосовно проблем будівництва, машинобудування, гірничої справи та механіки руйнування.

Давід Веніамінович
Вайнберг
(1905-1973)

16.2. Порівняння МГЕ і МСЕ

Озираючись назад і згадуючи, що широке використання ГІР почалося лише в 70-х роках, потрібно визнати, що розвиток МГЕ спочатку не був швидким, особливо в порівнянні з набагато більш раннім і стрімким злетом іншого універсального розрахункового методу, колишнього головного і процвітаючого конкурента МГЕ - методу скінченних елементів (МСЕ).

Причини затримки в розвитку методу граничних елементів цікаві й повчальні. Здавалося б теоретична оснащеність методу була настільки велика, що залишалося негайно перекласти його на мову обчислювальних машин і почати масове виробництво розрахунків. Однак, як це не здасться парадоксальним, саме дуже високий математичний рівень робіт по ГІР не сприяв зростанню його популярності. Справа в тому, що, як справедливо зазначено в [Бенерджи, Баттерфилд, 1984], роботи по теорії ГІР написані «на строгій математичній основі, яка не цілком знайома більшості вчених прикладників». Багатьом інженерам, які стикаються з чисельної реалізацією методів вирішення прикладних завдань, ці роботи зовсім недоступні. Але ж саме інженери і вчені-прикладники, а не математики-теоретики відразу ж окупували обчислювальні машини з метою отримати на них відповіді на практичні питання. Більшість з них були прекрасно знайомі з методами опору матеріалів та будівельної механіки, в тому числі і з матричними методами. Тому метод скінченних елементів, що виник як перекладення для ЕОМ матричних методів, які використовувалися для розрахунку стержневих і балочних систем, органічно, швидко і легко увійшов в практику розрахунків. Його першочерговий розвиток і популярність були зумовлені професійної та психологічної підготовкою споживачів.

Метод граничних елементів виявився в зовсім іншому становищі. Його ідеї лежать в стороні від технічних дисциплін, що вивчаються у вузах. Природно, що вони не могли відразу увійти в інженерну практику, і перевагу при розрахунках напружень і деформацій в твердих тілах було віддано МСЕ. Тому широка чисельна реалізація МГЕ почалася приблизно на десятиліття пізніше, ніж інтенсивні роботи по впровадженню МСЕ. Інженери на той час вже звикли за допомогою МСЕ систематично розв'язувати двовимірні задачі, в повній мірі оцінили переваги комп'ютерних розрахунків, відчули смак до таких розрахунків і головне відчули потребу проводити їх і для тривимірних областей. А тут вже обходитися без використання методу граничних елементів, що знижує геометричну розмірність завдань на одиницю, було абсолютно нерозумно, і затримка в його розвитку змінилася бурхливим прогресом.

Звичайно, можна навести й інші причини того, що на перших порах МСЕ розвивався набагато швидше, ніж МГЕ - розрідженість матриць, їх симетричність - але вони не мали такого впливу, як названа вище причина. Підтвердженням цьому служить не тільки очевидна важливість в будь-якій справі попередньої психологічної та професійної підготовки, а й непрямі свідчення. Так, виглядає закономірним, що фахівці з гідромеханіки, які не зазнали активного впливу ідей будівельної механіки, зайнялися систематичною чисельною реалізацією методу граничних елементів (зокрема, в формі методу дискретних вихорів, детально описаного в [Белоцерковский, Лифанов, 1985]) дещо раніше, ніж фахівці в області деформованого твердого тіла, і МСЕ не мав в гідромеханіці настільки значної переваги в порівнянні з МГЕ, як це було, наприклад, в теорії пружності. Зараз метод граничних елементів за своєю популярністю скорочує відставання від методу скінченних елементів. Цьому сприяють наступні його переваги:

- зменшення, особливо в тривимірних задачах, обсягу обчислень, пов'язане з тим, що дискретизируется не вся розглянута область, а тільки її границя;
- значне спрощення розбивки на елементи і скорочення часу на підготовку вхідної інформації;
- можливість обчислювати в лінійних задачах значення шуканих величин не тільки у вузлах, але і в будь-якій внутрішній точці області, не вдаючись до апроксимації; це особливо важливо для зон з великими градієнтами функцій;
- простота розв’язання задач для нескінченних областей;
- порівняльна простота і природність розв’язання різноманітних контактних задач, в тому числі задач про тріщини, системи шарів і блоків, обумовлена тим, що в прямих варіантах МГЕ легко пов'язувати зусилля і розриви зсувів на контактах.

Не слід, однак, думати, що МГЕ повністю витіснить МСЕ з арени розрахунків. МСЕ в свою чергу має важливі переваги. Головними з них в порівнянні з МГЕ є

- розрідженість і симетричність матриці;
- природне охоплення задач з безперервними або частими змінами властивостей середовища;
- більший набір засобів для урахування нелінійних ефектів в елементах об’єму середовища, що пов'язано з можливістю використовувати для цього не тільки послідовні наближення - така можливість є і при використанні МГЕ - а й перебудову локальних матриць жорсткості (або піддатливості).

До цього потрібно додати вже згадувану легкість сприйняття МСЕ інженерами, його звичність, високий рівень чисельного розвитку і хорошу оснащеність комерційними програмами (в тому числі програмами з елементами вищих порядків).

Сказане дозволяє зробити висновок, що розумним напрямком у розвитку МСЕ і МГЕ має бути не протиставлення цих методів, а використання переваг кожного з них. Це можна робити, вибираючи з арсеналу наявних програм МСЕ і МГЕ ту або ті, які краще відповідають особливостям конкретної проблеми, і застосовуючи їх в комбінаціях при розгляді різних аспектів задачі. Інший дуже важливий і перспективний спосіб об'єднувати перваги МСЕ і МГЕ полягає в створенні спеціальних гібридних алгоритмів, які суміщають їх ідеї. Так з'являються «суперелементи», які можна розглядати як об'єднання граничних елементів, а можна і трактувати як різновид скінченних елементів.

Докладне обговорення подібних алгоритмів міститься в монографіях [Бенерджи, Баттерфилд, 1984], [Бреббия и др., 1987]. В цілому в даний час програмна оснащеність МГЕ і МСЕ вирівнюється і виразно зживає себе протиставлення цих чудових засобів розв’язання задач, поступаючись місцем більш раціональній тенденції до об'єднання їх достоїнств.

16.3. Варіанти МГЕ

Варіанти методу граничних елементів зазвичай розділяють на три групи: прямий, непрямий і розривних зсувів. У прямому варіанті на границі безпосередньо зв'язуються механічні величини - зусилля і переміщення. Частина цих величин (наприклад, зусилля) задана, а значення енергетично пов'язаних змінних (зокрема, переміщень) визначаються на елементах границі при вирішенні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що приблизно відповідає граничному інтегральному рівнянню. Останнє, як згадувалося, не завжди або не відразу виписується в явній формі. Відшукавши значення невідомих величин в точках границі, легко обчислити напруження, деформації та переміщення в будь-якій внутрішній точці області.

У непрямому варіанті, який іноді називають методом фіктивних навантажень, роль невідомих грають вже не реальні переміщення або зусилля в точках границі, а деякі функції, які не мають прямої фізичної інтерпретації, які називають щільностями потенціалів або фіктивними навантаженнями. Знайшовши їх з дискретного аналога ГІР, як і в прямому методі, неважко обчислити величини, що характеризують напружено-деформований стан в середині області. Досить просто відновлюються і значення не заданих на границі фізичних величин. Варіант розривних зсувів в залежності від класу задач має різне трактування. Він примикає до непрямого варіанту в тому відношенні, що розриви зсувів, які визначаються в ньому, самі по собі в плоских задачах зазвичай не реалізуються і являють собою деякі фіктивні розриви. Їх можна трактувати як взаємні зміщення границь двох ізольованих одне від одного тіл: даного тіла і тіла з тими ж пружними властивостями, що доповнює його до нескінченної області без вирізів, причому вважається, що у відповідних точках границь прикладені рівні за величиною і протилежні за напрямком зусилля.

Звичайно, при цьому необхідно вжити заходів, щоб виключити жорстке взаємне зміщення згаданих тіл, тобто їх поступальний рух і поворот, що досягається закріпленням деяких точок. Реальні переміщення границі даного тіла знаходяться за допомогою спеціальних обчислень по знайденим при вирішенні ГІР розривам.

З іншого боку, зрозуміло, що варіант розривних зсувів стає різновидом прямого методу в задачах про тріщини в нескінченному просторі. Цьому випадку відповідає повне зчеплення двох згаданих тіл всюди, за винятком ділянок, які відповідають тріщинам. Тоді різниці зсувів перестають бути «фіктивними», а набирають форми фактичних взаємних зсувів берегів тріщин, тобто відповідають фізичним величинам, які реалізується в досліджуваній задачі.

Виразний фізичний зміст розриви зсувів набувають і в більш загальному випадку системи тіл, довільним чином взаємодіючих на границях. Ділянки зіткнення (контакти) можна розглядати як тріщини, що повністю розділяють тіла, а умови взаємодії пов'язують однакові зусилля в спільних точках границь із взаємними зміщеннями. Тут варіант розривних зсувів також виявляється різновидом прямого варіанта МГЕ - всі граничні значення мають ясний фізичний зміст.

Цей погляд стає особливо ясним, якщо розглянути систему взаємодіючих пружних тіл з довільними механічними властивостями [Линькою, 1983]. Отримувані при цьому рівняння представляють узагальнення (в комплексній формі) співвідношень для випадку однакових пружних властивостей. Як окремі випадки вони охоплюють задачі про матрицю з включеннями, про ізольовані тріщини і, звичайно, всі внутрішні і зовнішні, основні і змішані задачі.

У класифікації, прийнятій в роботі [Бенерджи, Баттерфилд, 1984], варіант розривних зсувів не розглядається, але поряд з прямим і непрямим варіантами МГЕ виділяється напівпрямий варіант. Він займає проміжне положення, оскільки хоча в цьому варіанті в ГІР входять величини, що не реалізуються фізично, вони мають сенс функцій напружень, за якими самі напруження визначаються простим диференціюванням.

Відмінності у варіантах МГЕ проявляються перш за все в прийомах виведення відповідних граничних інтегральних рівнянь і, частково, в способах обробки результатів їх розв’язання. Техніка ж розбиття границь, аппроксимацій, обчислення коефіцієнтів, розв’язання отриманих рівнянь, знаходження параметрів у внутрішніх точках залишається однією і тією ж. Тому структура і багато компонентів програм, що реалізують будь-який варіант, однакові, і розвиток обчислювальних алгоритмів здійснюється для методу граничних елементів в цілому. Порівнюючи переваги варіантів, можна все ж зазначити, що прямий метод, включаючи і варіант розривних зсувів в прямому його трактуванні, дуже привабливий для механіків і інженерів своєї головною рисою - тим, що в ньому невідомі функції мають фізичний зміст. Ця важлива перевага стає особливо цінною у випадках, коли достатньо знати лише значення зусиль і переміщень на границі, або коли необхідно врахувати додаткові співвідношення в кутових і інших особливих точках, а також в контактних задачах, де зусилля пов'язані із взаємними зміщеннями в дотичних точках границь. З іншого боку, в непрямих варіантах дещо скорочуються обчислення на заключному етапі, коли відбувається визначення напружень, деформацій і переміщень у внутрішніх точках області по знайденому розв’язку ГІР.

16.4. Метод Треффца

Значні успіхи в розвитку і практичному застосуванні МСЕ багато в чому зовдячують варіаційній природі вихідних співвідношень, яка забезпечує збіжність наближеного розв’язку до точного за енергією при згущенні сітки в даній області.

У широкому колі існуючих варіаційних підходів є ряд модифікацій, орієнтованих на зниження розмірності сум або інтегралів, що входять до функціоналів, які мінімізуються. Ці модифікації спираються на класи функцій, що свідомо задовольняють однорідним диференціальним рівнянням завдання. Для статичної задачі теорії пружності в якості таких функцій можуть бути використані системи спеціальним чином сконструйованих поліномів, як це зроблено в роботах [Бондаренко, 1962], [Гольдштейн и др., 1973, 1976]. У той же час в монографіях

Ерік Треффц,
нім. Erich Immanuel
Trefftz
(1888 – 1937)

М.А. Алексідзе [Алексидзе, 1978] і Ю.В. Верюжського [Верюжський, 1978] ці функції пропонується вибирати на основі фундаментальних розв’язків Кельвіна.

Самі функціонали можуть бути побудовані за методом найменших квадратів, однак стосовно до розв’язання задач теорії пружності найчастіше використовуються узагальнені функціонали Треффца. Метод Треффца, як відомо, полягає в побудові деякого додатного функціоналу, мінімум якого досягається на точному розв’язку задачі і який розшукується в класі функцій, що задовольняють диференціальні рівняння, але не підпорядковані ніяким крайовим умовам. Цей метод був запропонований без доведення збіжності Еріхом Треффцем стосовно до задачі Діріхле для рівняння Лапласа [Trefftz, 1926]. Доведення збіжності було виконано С.Г. Міхліним в монографії [Михлин, 1970]. У цій роботі для розглядуваної в області Ω крайової задачі доведено, що послідовності наближених розв’язків і похідних будь-якого порядку від цих розв’язків прямують до своїх точних аналогів рівномірно в будь-якій замкнутій області, яка цілком лежить всередині Ω.

У роботах М.Ш. Бірмана [Бирман, 1953, 1955, 1956] варіаційний принцип Треффца був узагальнений і теоретично обґрунтований для крайових задач, пов'язаних з рівнянням Пуассона, і для задачі про згин вільно опертої пластини. Надано рекомендації щодо використання отриманих результатів в разі загальних еліптичних рівнянь виду

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + bu = f$$

зі змінними коефіцієнтами при будь-якому числі незалежних змінних.

У згаданих роботах вивчені питання побудови функціоналу Трефтца, однак принципово важливим для реалізації цього напрямку є питання про вибір класу функцій, на якому передбачається здійснити мінімізацію функціоналів. Серед досліджень, пов'язаних з вибором повної лінійно-незалежної системи функцій, необхідно відзначити роботи К.Ректоріса [Ректорис, 1985] (бігармонічні рівняння), В.Д. Купрадзе [Купрадзе и др., 1976] (задачі теорії пружності), Д. Колтона і В. Вацлавека [Colton & Watzlawek, 1976] (параболічні рівняння).

У монографії М.А. Алексідзе [Алексидзе, 1978] наведені два методи розв’язання граничних задач шляхом розкладання по неортогональним функціям. Один з них полягає в тому, що розв’язок однорідного диференціального рівняння теорії пружності при заданих на границі переміщеннях (перша крайова задача) або напруженнях (друга крайова задача) розшукується у вигляді лінійної комбінації фундаментальних розв’язків цього рівняння, в яких один з параметрів збігається з точкою, що належить замкнутій області Ω, а інший пробігає дискретну сукупність точок, взятих поза областю. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації визначаються з системи алгебраїчних рівнянь, що відповідає умовам мінімуму функціоналу, отриманого або методом найменших квадратів, або методом Треффца. Запропонована в цій роботі система функцій в разі першої та другої крайових задач є повною і лінійно-незалежною, що дає можливість отримати мінімізуючу послідовність наближених розв'язків. Якість наближених розв'язків істотно залежить від вибору точок поза областю.

У роботах О.І. Віннік [Винник, 1978а, 1978б, 1981], [Винник и др., 1978а, 1978б], в яких провідну роль відіграв професор Є.С. Дехтярюк, для однорідного диференціального рівняння теорії пружності, що розглядається в скінченній області Ω, крім першої та другої крайових задач досліджені ще три типи задач. На одній частині границі задані переміщення, а на іншій - напруження (задача III); на всій границі задані нормальні компоненти переміщень і дотичні компоненти напружень (задача IV); на всій границі задані нормальні компоненти напружень і дотичні компоненти переміщень (задача V). Для перерахованих типів задач в цих роботах побудовані функціонали узагальненого методу Треффца, а також доведений основний мінімальний принцип, який полягає в наступному: мінімум функціоналу, розглянутого на класі функцій, що задовольняють однорідному рівнянню теорії пружності, досягається на точному розв'язку даної крайової задачі.

Мінімізувати отримані функціонали запропоновано на класі функцій, побудованих в такий спосіб. На поверхні Г даній області Ω введена дискретна сукупність фрагментів, $\Delta\Gamma_j$, $j=1,2,\ldots,n$; утворені потенціали з одиничною щільністю, областю інтегрування яких служать дискретні елементи границі. Вільний параметр потенціалу пробігає сукупність точок, що належать замкнутій області $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$. При такому виборі пробних функцій запропонований підхід можна розглядати як один з варіантів методу граничних елементів.

Вибір ядер потенціалів в різних крайових задачах здійснюється по-різному. У першій і другій крайових задачах в якості ядер використовуються компоненти матриці фундаментальних розв'язків Кельвіна, в третій - статичний тензор Гріна, побудований в роботі [Купрадзе, 1963]. У четвертій і п'ятій крайових задачах система функцій базується на фундаментальних розв'язка, спеціально побудованих для цих задач в монографії [Купрадзе и др., 1976]. Фундаментальні теоретичні результати, отримані в цій монографії, істотно використані при доведенні повноти і лінійної незалежності запропонованих систем функцій. Показано, що властивості запропонованих функцій і випливаючі з них властивості систем розв'язувальних рівнянь забезпечують збіжність отриманих наближених розв'язків до точних за енергією всередині області і в середньому по поверхні при згущенні граничноелементної сітки, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} w(u_n-u_0)\mathrm{d}\Omega=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}(u_n-u_0)^2\mathrm{d}\Gamma=0\ ,$$

де w – щільність пружного потенціалу, u_n – наближений розв'язок задачі, u_0 – точний розв'язок задачі, n – кількість граничних елементів.

Для випадку першої крайової задачі функціонал Треффца побудований у вигляді

$$\Phi(u)=\int_{\Gamma} ut\mathrm{d}\Gamma-2\int_{\Gamma} ft\mathrm{d}\Gamma+\beta\int_{\Gamma} u^2\mathrm{d}\Gamma-2\beta\int_{\Gamma} fu\mathrm{d}\Gamma\,, \tag{16.1}$$

де f – задані на границі значення шуканої функції u, t – напруження в точках границі, β – деякий параметр, змінюючи який можна вплинути на збіжність розв'язку.

В роботі [Винник, дис., 1981] показано, що функціонал (16.1), який розглядається на функціях, що задовольняють однорідне диференціальне рівняння задачі, досягає мінімуму на точному розв'язку крайової задачі. Умова його стаціонарності має вигляд

$$\left.\frac{\partial\Phi(u+\gamma\eta)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=0}=2\int_{\Gamma}(u-f)\left(\frac{\partial\eta}{\partial n}+\beta\eta\right)\mathrm{d}\Gamma=0\,.$$

Оскільки функція η є довільною, то

$$(u-f)|_{\Gamma}=0\,,$$

тобто рівнянню Ейлера для функціоналу (16.1) відповідає вимога щодо виконання граничних умов першої задачі теорії пружності.

Для чисельного розв'язання задачі відповідно до МГЕ границя тіла представляється сукупністю скінченного числа фрагментів, $\Delta\Gamma_k$, $k=1,2,\ldots,n$.. Наближений розв'язок представляється у вигляді потенціалу простого шару з кусочно-постійною щільністю:

$$u_{nj}(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{3}\mu_{kq}\int_{\Delta\Gamma_k}U_{jq}(P,Q)\mathrm{d}\Gamma_Q\,,\ j=1,2,3\,.$$

В роботі [Винник, дис., 1981] установлена лінійна незалежність і повнота системи функцій порівняння $V_k^{jq}(P)=\int_{\Delta\Gamma_k}U_{jq}(P,Q)\mathrm{d}\Gamma_Q$. Коефіцієнти μ_{kq} обираються так, щоб форма $\Phi(u_n)$ набувала стаціонарного значення. Ця умова виражається наступною системою алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{3}\left(a_{jkpq}+\beta b_{jkpq}\right)\mu_{qk}=\sum_{q=1}^{3}\left(c_{jpq}+\beta d_{jpq}\right),\ p=1,2,3,\ \ j=1,2,\ldots,n\,, \tag{16.2}$$

де

$$aa_{jkpq}=\int_{\Gamma}V_j^{pq}(P)T_l^{(P)}V_k^{(P)pq}(P)\mathrm{d}\Gamma_P\,,\quad b_{jkpq}=\int_{\Gamma}V_j^{pq}(P)V_k^{(P)pq}(P)\mathrm{d}\Gamma_P\,, \tag{16.3}$$

$$c_{jpq}=\int_{\Gamma}f(P)T_l^{(P)}V_j^{(P)pq}(P)\mathrm{d}\Gamma_P\,,\quad d_{jpq}=\int_{\Gamma}f(P)V_j^{(P)pq}(P)\mathrm{d}\Gamma_P\,.$$

Як показано в [Винник, дис., 1981], матриця системи рівнянь (16.2) є додатно визначеною, тому ця система має розв’язок, причому єдиний. Крім того, послідовність розв’язків системи рівнянь (16.2) є мінімізуючою при зростанні *n*. Встановлена можливість призначення такої дискретизації граничної поверхні, щоб в метриці побудованого функціонала наближений розв’язок відрізнявся від точного на заздалегідь задану малу величину. Мала відмінність наближеного розв’язку від точного відповідає малій, в сенсі максимуму, відмінності наближених значень переміщень на границі, а деформацій і напружень всередині області. Постійна β у виразі функціонала Треффца (16.1) має зміст регуляризуючого множника, в результаті вдалого призначення якого можна забезпечити переважну збіжність або при задовільненні граничних умов, або за значенням пружного потенціалу.

Аналогічні побудови функціоналів та їх граничноелементних аналогів здійснені в зазначеній роботі і для задач II-V. На тестових прикладах досліджена збіжність наближених розв’язків до точних. Визначені оптимальні значення регуляризуючого множника β.

Слід зауважити, що при обчисленні коефіцієнтів (16.3) алгебраїчного аналогу функціонала (16.1) інтегрування по границі розрахункової області необхідно виконувати двічі – спочатку, обчислюючи $V_k^{jq}(P) = \int\limits_{\Delta\Gamma_k} U_{jq}(P,Q)\mathrm{d}\Gamma_Q$, а потім вже інтегрувати знайдені значення. Зрозуміло, що така процедура є досить обтяжливою, хоча програш у швидкості компенсується впевненістю у збіжності результатів. Водночас треба відмітити, що описаний трудомісткий підхід поки що не отримав гідного продовження і розвитку.

16.5. Шляхи подолання недоліків МГЕ

Наразі поряд із безсумнівними позитивними рисами МГЕ можна виділити такі основні недоліки методу.

По-перше, чисельна реалізація МГЕ призводить до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які мають повністю заповнені і несиметричні матриці коефіцієнтів. Як відомо, матриці алгебраїчного аналогу розв’язувальних рівнянь МКЕ є, навпаки, стрічковими і симетричними. Цей недолік деякою мірою нівелюється значно меншою розмірністю матриць.

По-друге, що більш серйозно, застосування МГЕ вимагає наявності так званого фундаментального розв’язку задачі. Зазначимо, що для задачі теорії пружності коефіцієнти матриці фундаментальних розв’язків являють собою замкнені аналітичні вирази, які відповідають реакціям нескінченного пружного простору на на дію одиничних зосереджених сил, спрямованих у напрямку осей координат. У випадку температурної задачі, фундаментальним розв’язком є вираз для розподілу температури в просторі від дії зосередженного джерела тепла. В деяких задачах для фундаментального розв’язку не вдається отримати замкнений вираз, натомість, він має вигляд інтегралу з нескінченними границями. Але інколи фундаментальний розв'язок задачі взагалі є невідомим або невизначеним, я це має місце у випадку задач, які описуються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. В цьому разі МГЕ не може бути використаний. МГЕ, вочевидь, не можна також застосовувати до нелінійних задач, коли не виконується принцип суперпозиції. В цьому та багатьох інших подібних випадках виявляється третій недолік гранично-елементного підходу, а саме, бажання застосувати апарат МГЕ наштовхується на необхідність проводити інтегрування по разрахунковій області. Звісно, можна застосувати дискретизацію області і ввести невідомі всередині її, але такий підхід знищує всі переваги методу і є, по суті, зрадою граничного характеру та ідеології методу.

Однією із задач будівельної механіки, де виникає потреба у дискретизації розрахункової області є задача модального аналізу. Взагалі кажучи, визначення власних частот і форм за МГЕ може бути здійснено двома способами. Перший (кроковий спосіб) полягає в розв'язанні при різних значеннях частоти коливань Ω системи рівнянь відносно амплітудних значень граничних переміщень $\overset{*}{u_j}$ та напружень $\overset{*}{\tau_j}$:

$$0.5u_k^*(x,\Omega)+\int\limits_{\Gamma_\tau} u_j^*(y,\Omega)T_{jk}^*(y,x,\Omega)\mathrm{d}\Gamma_y = \int\limits_{\Gamma_u} \tau_j^*(y,\Omega)U_{jk}^*(y,x,\Omega)\mathrm{d}\Gamma_y, \qquad (16.4)$$

де U_{jk}^* та T_{jk}^* - відповідно фундаментальна матриця В.Д. Купрадзе задачі про гармонійні усталені коливання та її узагальнена похідна [Купрадзе, 1963]. Труднощі, пов'язані з реалізацією цього підходу, зумовлені складним характером залежності ядер U_{jk}^* і T_{jk}^* від частоти та необхідністю багаторазово повторювати всі етапи чисельного алгоритму для уточнення параметрів резонансного режиму.

Другий підхід базується на принципі Даламбера (інерційні сили розглядаються в якості розподіленого в об'ємі статичного навантаження). Згідно з цим підходом рух точок тіла, яке перебуває в режимі вільних коливань, підпорядкований рівнянню (формулі Соміліани)

$$0.5u_k^*(x)+\int\limits_{\Gamma_\tau} u_j^*(y)T_{jk}(y,x)\mathrm{d}\Gamma_y-\int\limits_{\Gamma_u} \tau_j^*(y)U_{jk}(y,x)\mathrm{d}\Gamma_y=$$

$$=\rho\Omega^2\int\limits_V u_j^*(z)U_{jk}(z,x)\mathrm{d}V_z,\ z\in V, \qquad (16.5)$$

де U_{jk} - фундаментальна матриця Кельвіна статичної задачі.

Співвідношення (16.5) в порівнянні з (16.4) є значно простішими, крім того вони дозволяють досить легко перейти до алгебраїчної проблеми власних значень, але, з іншого боку, рівняння (16.5) містять в правій частині об'ємний інтеграл, обчислення якого відчутно обтяжує алгоритм розрахунку за методом потенціалу. Для підвищення ефективності чисельної методики в Д. Нардіні та К.А. Бреббіа в 1982 р. запропонували прийом зведення об'ємного інтегралу до низки граничних [Nardini, Brebbia, 1982], який базується на поданні переміщень у внутрішніх точках розрахункової області у вигляді суми

$$u_i^*(z) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_j^{(k)} \delta_{ij} f^{(k)}(z) \qquad (16.6)$$

і трактуванні їх у якості своєрідного об'ємного навантаження. Складовим навантаження за допомогою рівнянь рівноваги ставляться у відповідність поля пружних переміщень:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_{im}^{(k)}(x)}{\partial x_j \partial x_m} + \mu \frac{\partial^2 v_{ij}^{(k)}(x)}{\partial x_m \partial x_m} = \delta_{ij} f^{(k)}(x)\,. \qquad (16.7)$$

Звісно, ці статичні переміщення і навантаження також пов'язані між собою формулою Соміліани

$$\begin{aligned} &0.5 v_{im}^{(k)}(x) + \int_{\Gamma} v_{jm}^{(k)}(y) T_{jk}(y,x) \mathrm{d}\Gamma_y - \int_{\Gamma} q_{jm}^{(k)}(y) U_{jk}(y,x) \mathrm{d}\Gamma_y = \\ &= -\delta_{im} \int_{V} f^{(k)}(z) U_{jk}(z,x) \mathrm{d}V_z\,, \quad x, y \in \Gamma,\ z \in V\,, \qquad (16.8) \end{aligned}$$

де $q_{im}^{(k)}$ - поля напружень, що відповідають переміщенням $v_{im}^{(k)}$.

В результаті підстановки (16.6), (16.8) в (16.5) отримуємо інтегральне рівняння, яке містить виключно поверхневі інтеграли:

$$\begin{aligned} &0.5 u_k^*(x) + \int_{\Gamma} u_j^*(y) T_{jk}(y,x) \mathrm{d}\Gamma_y - \int_{\Gamma} \tau_j^*(y) U_{jk}(y,x) \mathrm{d}\Gamma_y = \\ &= \Omega^2 \sum_{n=1}^{N} \alpha_m^{(n)} \left[0.5 v_{km}^{(n)}(x) + \int_{\Gamma} v_{jm}^{(n)}(y) T_{jk}(y,x) \mathrm{d}\Gamma_y - \int_{\Gamma} q_{jm}^{(n)}(y) U_{jk}(y,x) \mathrm{d}\Gamma \right]. \qquad (16.9) \end{aligned}$$

Оскільки формула Соміліани є математичним записом теореми про взаємність робіт, то викладену чисельну методику з повторним використанням вказаної формули часто називають методом граничних елементів з подвійною взаємністю або двоїстим взаємним методом граничних елементів (Dual Reciprocity BEM) [Кацикаделіс, 2007].

Зрозуміло, що ефективне застосування рівняння (16.9) для чисельного визначення власних частот і форм можливе лише за умови вдалого вибору функцій

$f^{(k)}$. Більшість робіт, присвячених цьому питанню (наприклад, [Agnatiaris et al., 1998], [Goldberg et al., 1998], [Chen, Tanaka, 2000]), використовують подання

$$f^{(k)}(z)=f(r^{(k)}(z)),$$

де $r^{(k)}(z)$- відстань між точкою z та деякою фіксованою точкою $y^{(k)}$. Якщо прийняти

$$f^{(k)}(z)=r^{(k)}(z)+c\ ,\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(T-U\right)\,\mathrm{d}t=0.$$

де c – деякий характерний розмір об'єкту розрахунку, то неважко знайти частинний розв'язок рівняння (16.7) [Баженов та ін., 2004]:

$$v_{jk}^{(m)}(z,y^{(m)})=\left\{\frac{(r^{(m)})^2}{6\mu}\delta_{jk}\left(c+0.5r^{(m)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-2\nu}\left[\delta_{jk}\left(\frac{c}{5}+\frac{r^{(m)}}{12}\right)+r_{,j}^{(m)}r_{,k}^{(m)}\left(0.4c+0.25r^{(m)}\right)\right]\right\}, \qquad (16.10)$$

де $r_{,j}^{(m)}(z)=\dfrac{z-y^{(m)}}{r^{(m)}}$, ν - коефіцієнт Пуасона.

В свою чергу,

$$q_{jk}^{(m)}(z,y^{(m)})=\lambda n_j\frac{\partial v_{ik}^{(m)}(z)}{\partial z_i}+\mu n_i\left(\frac{\partial v_{jk}^{(m)}(z)}{\partial z_i}+\frac{\partial v_{ik}^{(m)}(z)}{\partial z_j}\right)=$$

$$=\left\{\frac{r^{(m)}}{1-\nu}\delta_{jk}\left(c+0.5r^{(m)}\right)-\frac{1}{1-2\nu}\left[\delta_{jk}\left(\frac{c}{5}+\frac{r^{(m)}}{12}\right)+r_{,j}^{(m)}r_{,k}^{(m)}\left(0.4c+0.25r^{(m)}\right)\right]\right\}. \quad (16.11)$$

Отже, ефективність алгоритму визначення власних частот і форм суттєво залежить від того, наскільки точно обчислюється об'ємний інтеграл в правій частині рівняння (16.5), тобто – наскільки точною є наближена рівність

$$\int_V u_j^*(z)U_{jk}(x,z)\mathrm{d}V_z\cong\sum_{n=1}^{N}\alpha_m^{(n)}\left[0.5v_{km}^{(n)}(x,y^{(m)})+\int_\Gamma v_{jm}^{(n)}(y,y^{(m)})T_{jk}(y,x)\mathrm{d}\Gamma_y-\right.$$

$$\left.-\int_\Gamma q_{jm}^{(n)}(y,y^{(m)})U_{jk}(y,x)\mathrm{d}\Gamma\right]. \qquad (16.12)$$

Дослідимо це питання на чисельному прикладі. Розглянемо вільні поздовжні коливання кругового циліндру, вирізаного з пружного шару, товщина якого дорівнює

H. Радіус циліндру R=0.5H. Спрямуємо вісь x_3 вздовж осі циліндру. Амплітуди переміщень точок циліндру, що відповідають i-й формі коливань, змінюються в залежності від x_3 за законом

$$u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = 0;\ \ u_3^{(i)} = A\sin\frac{\Omega_i x_3}{C_1}, \tag{16.13}$$

де $\Omega_i = (2i-1)\dfrac{\pi C_1}{2H}$ - власна частота.

Якщо розташувати полюс інтегрування x в початку координат, то з урахуванням симетрії об'ємний інтеграл зводиться до одновимірного:

$$I(i)=\rho\Omega_i^2\int\limits_V u_3^{(i)}(z)U_{33}(x,z)\mathrm{d}V_z=\frac{A(2i-1)^2(\lambda+2\mu)\pi^2}{32\mu(1-\nu)H^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^H\left[\sin\left[\frac{(2i-1)\pi_i z_3}{H}\right]\cdot(3-4\nu)\sqrt{R^2+z_3^2}-\frac{z_3^2}{\sqrt{R^2+z_3^2}}-2(1-2\nu)z_3\right]\mathrm{d}z_3, \tag{16.14}$$

який є регулярним і легко обчислюється за квадратурними формулами. З іншого боку, цей об'ємний інтеграл за викладеною вище методикою може бути наближено поданий у вигляді суми поверхневих інтегралів:

$$I(i)=\rho\Omega_i^2\int\limits_V u_3^{(i)}(z)U_{33}(x,z)\mathrm{d}V_z\cong\rho\Omega_i^2\sum_{n=1}^{N}\alpha_3^{(n)}\Big[0.5v_{33}^{(n)}(x,y^{(n)})+$$

$$+\int\limits_\Gamma v_{j3}^{(n)}(y,y^{(n)})T_{3j}(y,x)\mathrm{d}\Gamma_y-\int\limits_\Gamma q_{33}^{(n)}(y,y^{(n)})U_{33}(y,x)\mathrm{d}\Gamma\Big]. \tag{16.15}$$

Після переходу до циліндричної системи координат інтеграли в правій частині рівності (16.15) обчислюються в межах кожного з фрагментів поверхні за квадратурними формулами. Особливої уваги потребує випадок, коли областю інтегрування є нижній круговий торець циліндру, що містить полюс x, внаслідок чого відповідні інтеграли є сингулярними. Другий з інтегралів після параметризації перетворюється на регулярний:

$$\int\limits_O q_{33}^{(n)}(y,y^{(n)})U_{33}(y,x)\mathrm{d}\Gamma=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^R q_{j3}^{(n)}(\rho,\theta,y^{(n)})\cdot\frac{(3-4\nu)}{16\pi\mu(1-\nu)}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,$$

обчислення якого не становить труда.

Перший з інтегралів після параметризації перетворюється на

$$\int_{\mathrm{O}} v_{j3}^{(n)}(y,y^{(n)})T_{3j}(y,x)\mathrm{d}\Gamma =$$

$$=\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[v_{13}^{(n)}(\rho,\theta,y^{(n)})\cos\theta - v_{23}^{(n)}(\rho,\theta,y^{(n)})\sin\theta\right]\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta, \qquad (16.16)$$

тобто на інтеграл, що має особливість при $\rho = 0$. Для регуляризації такого інтеграла зазвичай використовують формулу Гауса [Партон, Перлин, 1981]

$$\int_D T_{ij}(y,x)\mathrm{d}\Gamma = 0,$$

де D – замкнена поверхня.

Це дозволяє замість інтеграла

$$\int_\Gamma v_{j3}^{(n)}(y,y^{(n)})T_{3j}(y,x)\mathrm{d}\Gamma$$

обчислювати еквівалентний йому

$$\int_\Gamma\left[v_{j3}^{(n)}(y,y^{(n)}) - v_{j3}^{(n)}(x,y^{(n)})\right]T_{3j}(y,x)\mathrm{d}\Gamma.$$

Тоді (16.16) замінюється інтегралом

$$\int_{\mathrm{O}}\left[v_{j3}^{(n)}(y,y^{(n)}) - v_{j3}^{(n)}(x,y^{(n)})\right]T_{3j}(y,x)\mathrm{d}\Gamma =$$

$$=\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}\int_0^{2\pi}\int_0^R\Big\{\left[v_{13}^{(n)}(\rho,\theta,y^{(n)}) - v_{13}^{(n)}(0,0,y^{(n)})\right]\cos\theta -$$

$$-\left[v_{23}^{(n)}(\rho,\theta,y^{(n)}) - v_{23}^{(n)}(0,0,y^{(n)})\right]\sin\theta\Big\}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,$$

який є регулярним, оскільки при $\rho = 0$ вираз у фігурних дужках дорівнює нулю.

Тепер можна обчислити об’ємний інтеграл, як за формулою (16.14), так і за (16.15) при різній кількості перерізів N (в цих перерізах розташовані допоміжні точки, від яких вимірюються відстані $r^{(m)}$). Результати обчислень величини $I(i)$ при A=1*м* для перших трьох власних частот зведені в таблицю і свідчать про задовільну збіжність результатів при зростанні кількості допоміжних точок. Природно, що так само буде зростати точність визначення власних частот і форм.

Таблиця 16.1

N	Перша частота		Друг частота		Третя частота	
	$\int\limits_V$	$\sum\int\limits_\Gamma$	$\int\limits_V$	$\sum\int\limits_\Gamma$	$\int\limits_V$	$\sum\int\limits_\Gamma$
3	0,3983	0,3760	2,372	1,659	3,790	-4,609
4		0,3866		2,079		0,774
6		0,3914		2,241		2,234
9		0,3935		2,293		2,886
11		0,3952		2,325		3,106
15		0,3966		2,412		3,511

Слід зазначити, що двоїстий взаємний метод граничних елементів (ДВМГЕ) застосовують тоді, коли нестандартне (неоднорідне) лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних або нелінійне рівняння

$$L(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0 \qquad (16.17)$$

можна розділити на дві частини $L_1(\cdot)$ та $L_2(\cdot)$, першою з яких є стандартний однорідний лінійний оператор, а другою, яку трактують як масові сили, є нестандартна або нелінійна функція:

$$L_1(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})+L_2(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0. \qquad (16.18)$$

Більш того, ДВМГЕ можна використовувати лише тоді, коли є в наявності фундаментальний розв’язок суміжного диференціального рівняння, а саме частинний сингулярний розв’язок рівняння

$$L^*(u^*)=\delta(P-Q), \qquad (16.19)$$

де $L^*(\cdot)$ є суміжним оператором по відношенню до $L(\cdot)$, а $\delta(P-Q)$ − це дельта-функція Дірака.

На підставі зазначеного, очевидно, що ДВМГЕ не може бути використаний у тих випадках, коли, по-перше, диференціальний оператор не може бути поставлений у формі рівняння (16.18), і по-друге, коли немає в наявності фундаментального розв’язку рівняння (16.19), наприклад, коли оператор $L^*(\cdot)$ має змінні коефіцієнти. Очевидно, що ефективність ДВМГЕ зменшується у випадку задач, які описуються зв'язаними нелінійними рівняннями. Крім того для масових сил різного вигляду потрібні різні формулювання ДВМГЕ і, відповідно, різні комп'ютерні програми. Це саме стосується різних операторів $L^*(\cdot)$, навіть якщо порядок рівнянь однаковий.

Значною мірою вказані обмеження вдається пом’якшити за допомогою підходу [Katsikadelis, 1994], який його розробник, Джон Кацикаделіс, назвав методом подібних рівнянь (Analog Equation Method, в російському перекладі «метод аналоговых уравнений» [Кацикаделис, 2007]). В якості допоміжних в цьому підході використовуються прості фундаментальні розв’язки, які залежать лише від порядку диференціальних рівнянь. Наприклад, у випадку диференціальних рівнянь другого порядку як для статичних, так і для динамічних задач застосовується фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа. Згідно із концепцією аналогічного або подібного рівняння нелінійна задача замінюється еквівалентною простою лінійною задачею, в якій граничні та початкові умови співпадають з відповідними умовами вихідної задачі. Замінююча задача обирається так, щоб в ній інтегральне представлення розв’язку було відомим, при цьому фіктивні навантаження апроксимуються рядами радіальних функцій так само, як у ДВМГЕ. В результаті розв’язок вихідної задачі визначається за допомогою інтегрального представлення допоміжної задачі, яке використовується як математичний вираз. Відтак підхід досить успішно застосовується для розв’язання різноманітних нелінійних та лінійних інженерних задач, що описуються рівняннями в частинних похідних [Katsikadelis, 2002].

НАРИС 17

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ

Зараз велика кількість математичних моделей будується з розрахунком на те, щоб шуканий об'єкт був результатом розв'язку варіаційної задачі або задачі на екстремум.

І.І. Блехман, А.Д. Мишкіс, Я.Г. Пановко

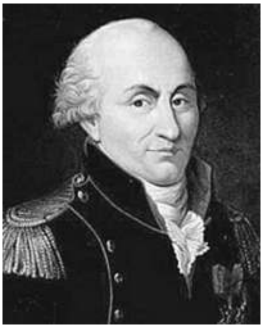
Істина завжди виявляється простішою, ніж можна було припустити.

Р. Фейнман

17.1. Передісторія

У 1773 р. до Паризької академії наук була представлена робота Шарля де Куло́на «Застосування правил знаходження максимумів і мінімумів до деяких задач статики, що відносяться до архітектури» [Coulomb, 1773].

Згодом роботі Кулона судилося накласти глибокий відбиток на розвиток теорії склепінь і підпірних стінок. В обох задачах йшлося про відшукання граничного навантаження, і їх рішення будувалося на основі аналізу ряду конкуруючих гіпотез про форму руйнування. Відбір істинної гіпотези реалізувався шляхом аналізу на екстремум, або, висловлюючись сучасною термінологією, задача вирішувалася кінематичним методом граничної рівноваги. В теорії підпірних стінок метод Кулона і до сьогоднішнього дня є панівним, але його теорія склепінь виявилася неточною.



Шарль Огюстен де Кулон, фр. Charles-Augustin de Coulomb (1736 - 1806) - французький військовий інженер і вчений-фізик, дослідник електромагнітних і механічних явищ; член Паризької Академії наук.

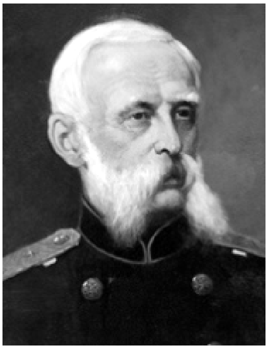
Шарль де Кулон навчався в одній з кращих шкіл для молодих людей дворянського походження - Коллежі Мазаріні. Після закінчення цього закладу витримав іспити і вступив до Військово-інженерної школи в Мезьєрі, одного з найкращих вищих технічних навчальних закладів XVIII ст. Закінчивши Школу і отримавши чин лейтенанта, протягом декількох років Кулон служив в інженерних військах на острові Мартініка в Форті Бурбон, в Ла-Рошелі і Шербурі. У 1781 р. влаштувався в Парижі, служив інтендантом вод і фонтанів. У тому ж році став членом Паризької академії наук. Після початку революції в 1789 р. пішов у відставку і перебрався до свого маєтку в Блуа.

Ще на початку 1770-х років, повернувшись з Мартініки, Кулон активно зайнявся науковими дослідженнями. Публікував роботи з технічної механіки (статика споруд, теорія вітряних млинів, механічні аспекти кручення ниток тощо). Кулон сформулював закони кручення; винайшов крутильні ваги, які сам же застосував для вимірювання електричних і магнітних сил взаємодії.

У 1773 р. опублікував статтю, що стала основою теорії Мора-Кулона, яка описує залежність дотичних напружень матеріалу від величини прикладених нормальних напружень. У 1781 р. описав досліди з тертя ковзання і кочення і сформулював закони сухого тертя. З 1785 по 1789 рік опублікував сім мемуарів, де сформулював закон взаємодії електричних зарядів і магнітних полюсів (закон Кулона), а також закономірність розподілу електричних зарядів на поверхні провідника. Ввів поняття магнітного моменту і поляризації зарядів.

Кулон правильно оцінив ступінь статичної невизначуваності задачі, яка дорівнювала двом (розпір і точка його прикладення). Він довільно розпорядився одним невідомим, помістивши замковий шарнір у верхній точці замкового шва, а друге невідоме розшукував з розв’язку задачі на екстремум.

Помилку Кулона в 1849 р. виправив військовий інженер Г.Є. Паукер, який запропонував представляти розпір у вигляді двох його складових *u* і *v*, прикладених у верхній і нижній точках замкового перерізу.



Герман Єгорович Паукер, рос. Герман Егорович Паукер (1822-1889) - механік і військовий інженер, відомий будівельник, почесний член Петербурзької академії наук, генерал-лейтенант інженерної служби.

У 1838 р. вступив до Головного інженерного училища в Санкт-Петербурзі і в 1842 р. закінчив його старший офіцерський інженерний клас; проведений в польові інженери поручиком зі залишенням при училищі репетитором математики. У 1853 р. призначений ад'юнкт-професором Миколаївської інженерної академії, в 1860 р. - інспектором класів Імператорського училища, а в 1866 р. - професором механіки; займав цю посаду до 1882 р. Читав лекції з будівельного мистецтва і механіки в Петербурзькому технологічному інституті.

За весь цей час не припинялася будівельна і інженерна діяльність Г.Є. Паукера, причому крім військового він займався як портовим, так і цивільним будівництвом.

Основні дослідження Г.Є. Паукер проводив в галузі будівельної механіки. На основі принципу можливих переміщень Паукер розробив метод розрахунку склепінь, який набув широкого поширення. Запропонував теорію необхідної глибини закладення фундаменту. Вніс істотний внесок в механіку грунтів.

Наукові праці Паукера за його життя публікувалися рідко. Головна його праця - книга «Будівельна механіка. Курс Миколаївської інженерної академії» (СПб., 1891) - вийшла в світ вже після смерті автора завдяки зусиллям професора В.Л. Кирпичова. Ця робота отримала високу оцінку фахівців і довгий час вважалася класичною працею в своїй галузі, відрізняючись винятковою ясністю і простотою викладення предмета.

Намітивши довільний шов руйнування, Паукер формує умови відсутності розкриття цього шва і умови відсутності ковзання в цьому шві у вигляді нерівностей

$$\left.\begin{array}{c} u\left(Y_0-y\right)+v\left(y_0-y\right)\ge Px\ge u\left(Y_0-Y\right)+v\left(y_0-Y\right) \\ \dfrac{P}{\sin\varphi-K\cos\varphi}\ge u+v\ge\dfrac{P}{\sin\varphi+K\cos\varphi} \end{array}\right\}. \qquad (17.1)$$

Кожному положенню шва руйнування на площині параметрів *u*0*v* відповідає деяка область несучої здатності, точки якої задовольняють нерівність (17.1), а перетин всіх таких областей визначає несучу здатність склепіння. Якщо перетин є порожнім, то склепіння не може нести навантаження, якщо ж область несучої здатності не порожня, то граничне навантаження визначає точка області, для якої сума *u* + *v* приймає найменше значення.

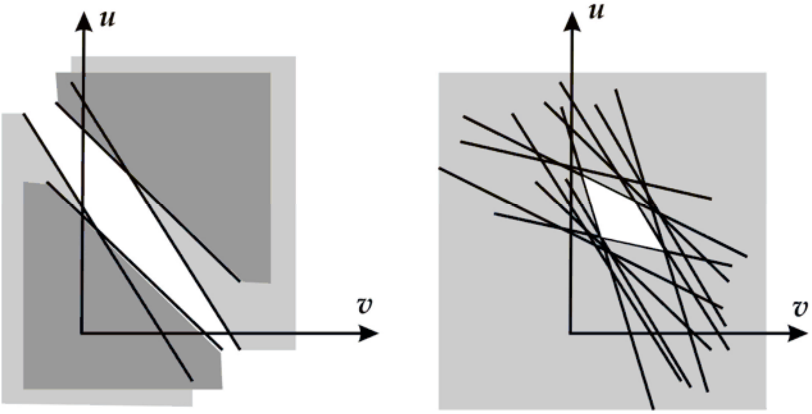


Рис. 17.1. Область несучої здатності за Паукером:
зліва для одного шва руйнування, праворуч для сукупності швів

Хоча поведінка балок, навантажених за межею пружною стадії роботи матеріалу, вивчена порівняно давно, перші статті про безпосереднє використання пластичності матеріалу для створення розрахунку інженерних конструкцій були опубліковані, мабуть, в 1914 р. в Угорщині Габором Казінці [Kazinczy, 1914] і в 1917 р. в Голландії Ніколасом Кістом [Kist, 1917].

Ніколас Кіст,
нід. Nicolaas
Christiaan Kist
(1867-1941)

Габор Казінці,
уг. Gábor Kazinczy
(1889-1964)

Казінці провів ряд випробувань із защемленими по кінцях балками і прийшов до висновку, що руйнування настає лише тоді, коли з'являється текучість в трьох поперечних перерізах, або, іншими словами, коли в цих перерізах виникають пластичні шарніри.

Результатом цих досліджень стало створення поняття пластичного шарніра, що не без підстави дозволяє вважати Габора Казінці основоположником методів розрахунку за руйнівними навантаженнями.

Той факт, що несуча здатність конструкції з пластичного матеріалу не буде вичерпана до тих пір, поки існує деякий розподіл внутрішніх напружень, які врівноважують зовнішні навантаження і не перевищують межі текучості, інтуїтивно усвідомлювався дуже давно. Проте, ця думка, яка згодом набула форми статичної теореми про руйнування, була чітко сформульована саме в роботі Г. Казінці [Kazinczy, 1914], хоча тільки стосовно нерозрізних балок.

У наступне десятиліття спостерігався підвищений ріст інтересу до досягнень у новій галузі. Досліди над простими і нерозрізними балками були проведені багатьма дослідниками, серед яких слід особливо відзначити роботи Майєр-Лейбніца [Maier-Leibnitz, 1928, 1929], опубліковані в 1928 і 1929 рр. Можна відзначити, що ці експерименти Майер-Лейбніца і відповідні теоретичні узагальнення поставили розрахунок нерозрізних балок за руйнівними навантаженнями на міцну основу.

Гейнц Майєр-Лейбніц,
Heinz Maier-Leibnitz
(1911-2000)

Дослідження поведінки стержневих пружно-пластичних конструкцій, що піддаються впливу навантажень, які довільно змінюються в заданих межах, було виконано Гансом Блейхом в 1932 р. [Bleich, 1932].

Блейх, мабуть, був першим, хто звернув увагу на особливості поведінки пружно-пластичної конструкції під дією повторно змінюваного навантаження. Досліджуючи просту один раз статично невизначену ферму, він виявив явище пристосовності, яке полягає в тому, що після декількох циклів пластичного деформування система починає працювати чисто пружним способом. Більш загальна теорема для ферм з довільним числом зайвих невідомих була вказана в 1936 р. Ернстом Меланом [Melan, 1936].

Ернст Мелан,
Ernst Melan
(1890–1963)

Ганс Блейх,
Hans Bleich
(1909–1985)

Таким чином до 30-х років XX ст. було накопичено серйозний досвід вирішення ряду окремих задач теорії пластичності, і актуальним постало питання про розробку загальних методів і теоретичних обґрунтувань.

Як випливало з досвіду розвитку інших розділів механіки деформованого твердого тіла, в якості фундаментальної основи тут могли виступити варіаційні принципи, що розуміються, правда, в широкому сенсі, без вимоги, щоб розв'язок обов'язково перетворював у нуль першу варіацію деякого енергетичного функціонала.

17.2. Задачі граничної рівноваги

Класичні варіаційні принципи механіки призводять нас до пошуку стаціонарних точок відповідних функціоналів, і лише в деяких випадках (потенціали Лагранжа і Кастільяно) ця стаціонарна точка є точкою екстремуму. Тому обережно говорять про варіаційні та екстремальні принципи. Але в задачах теорії пластичності, пов'язаних з відшуканням граничної несучої здатності, слід говорити саме про екстремальні принципах.

Їх відшукання має складну і заплутану історію, деякі елементи цієї історії пов'язані з напівінтуїтивними уявленнями початку XX ст., але усвідомлення екстремальних принципів, пов'язаних з дослідженням несучої здатності конструкцій, виконаних з матеріалів, що володіють властивостями пластичності, мабуть, почалося з досліджень О.О. Гвоздьова.

Його дослідження, присвячені визначенню величини руйнівного навантаження для статично невизначуваних систем, відносяться до початку 1930-х років [Гвоздев, 1934/1]. Вони були ініційовані пропозиціями його вчителя А.Ф. Лолейта, спрямованими на вдосконалення норм проектування і на перехід до розрахунку залізобетонних конструкцій у стадії руйнування.

Олексій Олексійович Гвоздьов (1897-1986) - учений-будівельник, Герой Соціалістичної Праці (1971), фахівець в галузі залізобетону і будівельної механіки.

Після закінчення Тульської гімназії вступив до Московського інституту інженерів шляхів сполучення, який закінчив в 1922 р. У 1923 р. почав викладати будівельну механіку і будівельні конструкції в цьому інституті, а з 1927 р. працював спочатку в лабораторії бетонних і кам'яних конструкцій Центрального науково-дослідного інституту промислових споруд (ЦНДІПС), а потім керував Центральною лабораторією теорії залізобетону і нових видів арматури науково-дослідного інституту бетону та залізобетону. Педагогічну роботу вів в Московському інженерно-будівельному інституті і Військово-інженерній академії. У 1933 р. йому присвоєно звання професора, а в 1936 р. присуджено науковий ступінь доктора технічних наук.

Наукові роботи О.О. Гвоздьова відносяться до будівельної механіки стержневих систем, теорії пластин і оболонок, теорії пластичності і повзучості, розрахунку залізобетонних споруд. Він брав активну участь у створенні різних, в тому числі таких унікальних як Московський метрополітен і висотні будівлі, споруд. У 1936 р. довів статичну і кінематичну теореми граничної рівноваги, які дають нижню і верхню оцінки граничного навантаження.

Пропозиції Лолейта піддалися експертизі, проведеній спершу в Інституті споруд, який пізніше називався ЦНДІПС, і в інших організаціях (наприклад, у Військово-інженерній академії). Експертиза полягала перш за все в експериментальній перевірці передумов цієї теорії і у встановленні меж її застосовності. У цих роботах активну участь брав О.О. Гвоздьов. Одночасно він працював над більш загальними проблемами, і звіти про обидві сторони його діяльності з'явилися практично одночасно [Гвоздев, 1934/1, 1934/2].

У 1936 р. на Першій Всесоюзній конференції з пластичних деформацій О.О. Гвоздьов виступив з доповіддю, яка була опублікована в 1938 р. в Працях цієї конференції [Гвоздев, 1938]. У цій доповіді вперше було чітко визначено поняття «гранична рівновага» і, що важливіше, сформульовані три основні теореми теорії граничної рівноваги для пружно-пластичних конструкцій, які задовольняють наступним вимогам:

a. Умови текучості пластичних елементів є опуклими.

b. Конструкція не є геометрично змінюваною.

c. Навантаження є квазістатичним і одноразовим.

d. Деформації системи є малими в порівнянні з габаритними розмірами конструкції аж до її руйнування, і ними можна знехтувати.

e. Пластична конструкція не знаходиться в стані пластичної течії під впливом одного лише постійного навантаження.

f. Змінна частина навантаження пропорційна змінному параметру навантаження *p*.

Перша теорема (статична) говорить:

> *Граничне навантаження p* є найбільшим з тих, які можуть бути врівноважені на системі.*

Друга теорема (кінематична) говорить:

> *Граничне навантаження p* є найменшим з тих, яким відповідає будь-який варіант перетворення системи на пластичний механізм (рух якого є можливим при незмінному навантаженні за рахунок пластичної течії деяких в'язей системи).*

Третя теорема (двоїстості) об'єднує дві перші і стверджує:

> *Для систем, у яких всі власні елементи пластичні, зовнішня і внутрішня границі несучої здатності збігаються між собою.*

Слід зазначити, що теореми теорії граничної рівноваги в формулюванні О.О. Гвоздьова були доведені для систем зі скінченним ступенем статичної невизначеності і, таким чином, більше пов'язані з будівельними конструкціями, ніж з розв’язанням крайових задач механіки твердого тіла. Перехід до загальних задач такого роду почався, мабуть, з формулюванням статичної теореми в її загальній формі, яку дав С.М. Фейнберг [Фейнберг, 1948].

> *Тіло може витримати зовнішні навантаження, що додаються в будь-якій послідовності, якщо на кожному етапі програми навантаження можна знайти безпечний статично можливий розподіл напружень.*

Савелій Мойсейович Фейнберг (1910-1974) – фізик, керівник сектору теорії ядерних реакторів Інституту атомної енергії ім. І.В. Курчатова, Лауреат Ленінської і трьох Державних премій СРСР, премії ім. І.В. Курчатова АН СРСР.

У 1932 р. С.М. Фейнберг закінчив Азербайджанський політехнічний інститут за спеціальністю «інженер-архітектор». У 1933-1934 рр. навчався в аспірантурі інституту.

Свою трудову діяльність почав в 1934 р. в інституті «Азнафтапроект». У 1942 р. С.М. Фейнберг перейшов на будівництво авіаційного заводу в Баку. У 1942-1943 рр. він викладав у Вищому військово-морському училищі, в 1943-44 рр. - на фронті, демобілізований через поранення. У 1944-1945 рр. працював інженером з міцності - начальником групи міцності в льотно-дослідному інституті Народного комісаріату авіаційної промисловості.

У 1945 р. С.М. Фейнберг перейшов працювати в Інститут хімічної фізики Академії наук СРСР, займаючись дослідженнями з прикладної математики - теорії пружності і пластичності. У 1946 р. С.М. Фейнберга активно долучився до розвитку атомної науки і створення теорії ядерних реакторів. З цього часу і до відходу з життя наукова діяльність С.М. Фейнберга була пов'язана з Інститутом атомної енергії ім. І.В. Курчатова. Він працював старшим науковим співробітником, начальником теоретичного сектора, заступником завідувача відділу інституту.

Основні праці С.М. Фейнберга відносяться до галузі теорії пружності і пластичності, ядерної енергетики. Він показав можливість отримання узагальнених рівнянь математичної теорії пластичності при граничній напруженості.

На відміну від основної роботи Гвоздьова [Гвоздев, 1938], яка довго була невідома за кордоном і тільки в 1960 р. була переведена і опублікована в журналі International Journal of Mechanical Sciences, 1960, Vol. 4, стаття Фейнберга, яка була опублікована в перекладеному на англійську мову журналі, стала відразу доступною і широко цитувалася.

Оскільки результати О.О. Гвоздьова залишалися по суті недоступними для міжнародної наукової спільноти, то вони були перевідкриті групою В. Прагера на початку 1950-х рр. Ця група представляла собою міжнародний колектив учених, в якому Праґер був неформальним лідером і який виконував міжнародну програму досліджень з теорії пластичності, а її центром був Відділ математики Браунівського університету.

Браунівський університет з його надихаючою науковою атмосферою був тоді свого роду колискою подальшого розвитку теорії пластичності. Крім Прагера також необхідно згадати Друккера, Саймондса, Грінберга і Ніла, як найбільш активних в галузі дослідження феноменів теорії пластичної течії. Активну участь в цій «sturm und drang» акції брали фахівці Кембріджського університету. Тут, у Великобританії, працювала група Джона Бакера, яка проводила дослідження в напрямку розвитку граничного аналізу сталевих конструкцій. Важливу роль в цих дослідженнях зіграли виконані в лабораторії британської зварювальної асоціації повномасштабні випробування портальних рам (рис. 17.2). За результатами досліджень була зроблена узагальнююча публікація [Baker et al., 1956].

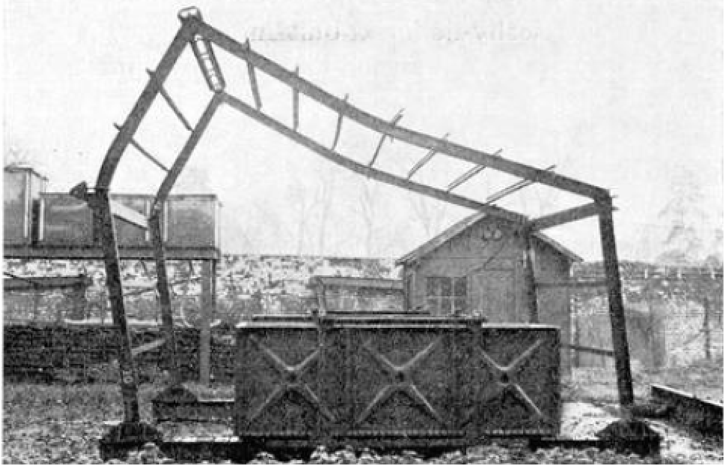


Рис. 17.2. Випробування до руйнування портальної рами

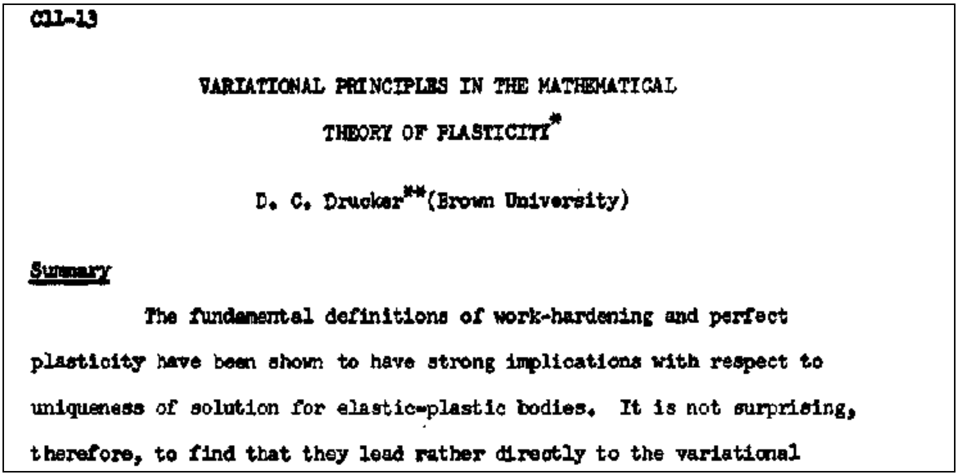
Відмінною особливістю робіт цієї групи була націленість на вирішення крайових задач механіки твердого тіла і на використання загальних принципів. До їх числа належить і сформульований Друккером універсальний квазітермодинамічний постулат про невід'ємність роботи зовнішніх сил у замкнутому циклі пластичного навантаження, наслідком якого є властивість опуклості поверхні текучості [Drucker, 1956, 1959].

Положення про опуклість поверхні текучості має виключно важливе значення в теорії пластичності, воно лежить в основі доведення більшості теорем математичної теорії пластичності.

Наприклад, принципово важливим є твердження про так звані множники пластичності, яке доводиться наступним чином. Нехай в пружно-пластичному тілі напружений стан характеризується узагальненими напруженнями Q_1, ..., Q_n, яким відповідають узагальнені деформації $q_1,\ldots,q_n$, так що

$$\mathrm{d}A = Q_1\mathrm{d}q_1 + \ldots + Q_n\mathrm{d}q_n$$

є роботою узагальнених напружень на нескінченно малому прирості деформацій.



C11-13

VARIATIONAL PRINCIPLES IN THE MATHEMATICAL
THEORY OF PLASTICITY*

D. C. Drucker**(Brown University)

Summary

The fundamental definitions of work-hardening and perfect plasticity have been shown to have strong implications with respect to uniqueness of solution for elastic-plastic bodies. It is not surprising, therefore, to find that they lead rather directly to the variational

Рис. 17.3. Перша публікація постулату стійкості матеріалу

Нехай границя текучості задана функцією $\Phi\left(Q_1,\ldots,Q_n\right)=0$.

Тоді нескінченно малі зміни напружень, які досягли межі текучості і не ведуть до розвантаження, повинні задовольняти умову

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Q_1}dQ_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial Q_n}dQ_n = 0\,,$$

що означає, що вектор зміни напружень спрямований по нормалі до поверхні текучості.

Звідси випливає, що прирости напружень не здійснюють роботи на приростах пластичних деформацій

$$dq_1^{(p)} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial Q_1};...;dq_n^{(p)} = \frac{\partial \Phi}{\partial Q_n} = 0,$$

де λ — довільний коефіцієнт пропорційності (множник пластичності). Оскільки під час пластичної деформації має відбуватися розсіювання енергії, то приріст роботи

$$dA = Q_1 dq_1^{(p)} + ... + Q_n dq_n^{(p)} = \lambda \left[Q_1 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_1},...,Q_n \frac{\partial \Phi}{\partial Q_n} \right] > 0,$$

а для опуклої поверхні текучості вираз в квадратних дужках є додатнім, отже $\lambda \geq 0$.

Якщо розглянути граничну точку p, якій відповідають напруження $Q_1,...,Q_n$ і пов'язані з ними швидкості деформацій $\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$, то видно (рис. 17.4), що вектор швидкостей деформації спрямований перпендикулярно дотичній до поверхні текучості, яка проходить через т. p.

Питома потужність розсіювання (дисипації) енергії визначається як

$$D = Q_1 \dot{q}_1 = ... + Q_n \dot{q}_n = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}.$$

З опуклості поверхні текучості випливає, що для будь-якого іншого довільного вектора швидкостей деформації $\dot{\mathbf{q}}^0$ буде справедливою нерівність

$$D(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}} < \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}^0 = D^0\left(\dot{\mathbf{q}}^0\right). \quad (17.2).$$

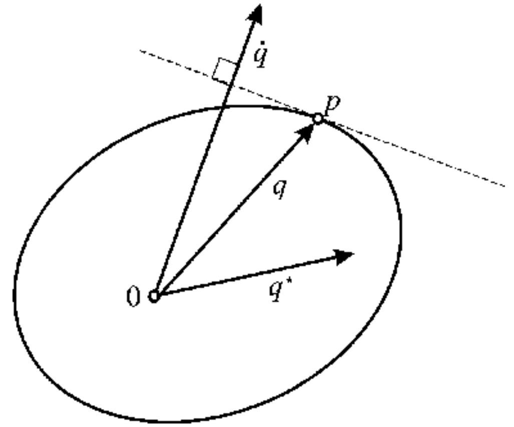
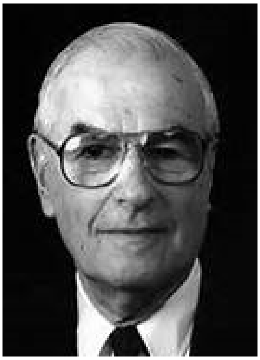


Рис. 17.4. Илюстрація до доведення



Даніель Чарльз Друккер, Daniel Charles Drucker (1918-2001) - американський учений-механік, який працював в галузі прикладної механіки і займався питаннями пластичності. У 1983 р. нагороджений Медаллю Тимошенка.

Він навчався в Колумбійському університеті, де в 1940 р. отримав ступінь магістра, спеціалізуючись на оптичному методі вимірювання тиску. Після цього до 1943 р. він навчався в Корнелльському університеті і служив під час Другої світової війни в авіації. Друккер викладав в Браунівському університеті з 1946 по 1968 рік, після чого перейшов в університет штату Іллінойс на посаду декана Інженерного факультету. У 1984 р. він покинув Іллінойс, перейшовши на посаду професора в Університет Флориди, де працював до відставки в 1994 р. У 1988 р. Друккера нагородили Національною медаллю науки. Він неодноразово обирався почесним доктором, в тому числі Браунівського університету, Ізраїльського Техніона, університету штату Іллінойс в Урбана-Шампань. Був членом Національної інженерної академії та американської Академії мистецтв і наук. На честь його заслуг Американське товариство інженерів-механіків (ASME) заснувало медаль Друккера.

> Його ключові здобутки в галузі пластичності включають поняття стійкої деформативності матеріалу, сформульоване у вигляді універсального квазітермодинамічного постулату Друккера, і критерій пластичності Друккера-Прагера.

Родні Хілл,
Rodney Hill
(1921- 2011)

Паралельно з дослідженнями пружно-пластичних конструкцій йшла інтенсивна робота, пов'язана з аналізом жорстко-пластичних систем. У середовищі останнього типу всякі деформації відсутні, поки навантаження не досягли значень навантажень текучості, після чого може виникнути необмежена течія. Строга теорія граничного стану жорстко-пластичних тіл представлена Р. Хіллом в 1951 р. [Hill, 1951].

Ця теорія розвивалася одночасно з теорією пластичного руйнування, розробленою на основі законів деформування пружно-пластичних середовищ. Іноді перевага віддається жорстко-пластичному аналізу, оскільки він виключає можливість появи великих (або навіть нескінченних) локальних деформацій, характерних для пружно-пластичного аналізу руйнування.

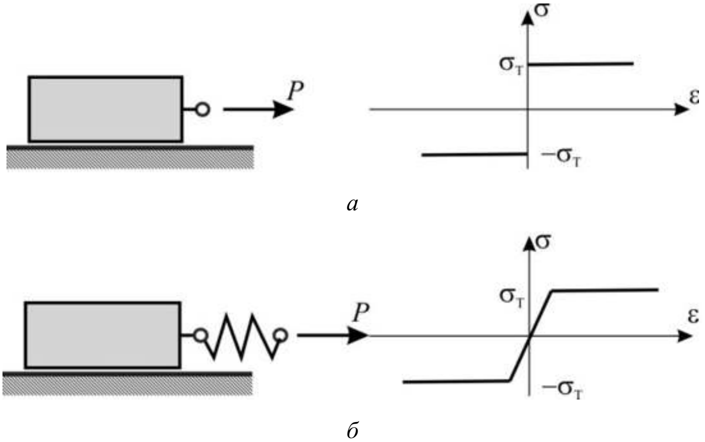


Рис. 17.5. Модель жорсткопластичного (*а*) и пружнопластичного (*б*) тіла

У роботах групи Прагера було отримано задовільний доказ статичної теореми граничної рівноваги для матеріалів з регулярною поверхнею текучості, а також отримана друга кінематична теорема. Ці результати були опубліковані Друккером, Грінбергом і Прагером спочатку для плоскої деформації [Drucker et al., 1951], а дещо пізніше і для загальної тривимірної задачі [Drucker, 1956].

Розглядаючи жорстко-пластичну задачу граничної рівноваги вони отримали доказ наступного екстремального принципу:

> *У жорстко-пластичному суцільному середовищі не може виникнути поле пластичних деформацій (тобто досягнуто граничного стану) при навантаженнях, для яких можна задати відповідне їм поле напружень, що ніде не порушує умов пластичності.*

Іншими словами, серед всіх варіантів розподілу напружень, що виконують умови рівноваги і не порушують умов пластичності, граничному стану відповідає варіант з максимальною інтенсивністю навантаження (перша теорема Гвоздьова).

Доведення було проведено від супротивного, виходячи з того, що або задане навантаження P_k і відповідне йому поле напружень з компонентами Q_i^0, або ще менше навантаження λP_k $(0 < \lambda \leq 1)$ і його поле напружень приведуть до появи пластичного механізму руйнування. Якщо позначити через Q_i напруження, що відповідають механізму руйнування, а через $\dot{q}_i$, $\dot{p}_k$ - швидкості деформацій і швидкості переміщення точок прикладання навантаження в цьому механізмі, то з принципу віртуальних швидкостей витікає

$$\lambda \sum_{k=1}^{p} P_k \dot{p}_k = \int \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \mathrm{d}V = \lambda \int \sum_{i=1}^{n} Q_i^0 \dot{q}_i \mathrm{d}V. \tag{17.3}$$

З нерівності (17.2) слідує, що

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^0 \dot{q}_i < \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \,,$$

І оскільки додатний множник λ в (17.3) не може бути більшим за одиницю, то це призводить до протиріччя. Кінематична теорема доводилася аналогічно, і одне з її можливих формулювань свідчить:

> *З усіх кінематично допустимих розподілів швидкостей переміщень при пластичному руйнуванні жорстко-пластчної системи дійсним розподілом є те, при якому швидкість дисипації енергії мінімальна.*

Обидва доведення відносяться до матеріалів з регулярною поверхнею текучості. У 1952 р. Праґер поширив теорію на випадок сингулярної умови текучості [Prager, 1952]. При цьому він сформулював кінематичну теорему як енергетичну:

> *Дані навантаження будуть мати величину вище граничної, якщо можна знайти поле швидкостей, для якого швидкість роботи цих навантажень перевищить швидкість дисипації внутрішньої енергії.*

Таке формулювання крім усього іншого дозволило розглядати розривні поля швидкостей і напружень.

Перехід від жорстко-пластичного аналізу до пружно-пластичного був елементарним. Слід зауважити, що з фізичної точки зору немає суттєвої різниці між ідеалізованими схемами, що лежать в основі обох підходів [Lee, 1952], [Prager, 1952]. Еквівалентність критичного навантаження жорстко-пластичного середовища і руйнівного навантаження пружно-пластичного середовища є простим наслідком того факту, що доведення теорем про руйнування не пов'язане з будь-якими обмеженнями величини пружних сталих.

Вільям Праґер, William Prager (1903-1980) - американський вчений, який працював в галузі механіки деформівного твердого тіла

Навчався в Дармштадтському технічному університеті за спеціальністю «машинобудування», в 1925 р. отримав диплом інженера. У наступному 1926 р. захистив в Дармштадтському технічному університеті докторську дисертацію і ще два роки читав там лекції. У 1929 р. Праґер став викладати в Геттінгенському університеті, а в 1932 р. був призначений професором технічної механіки Університету Карлсруе і директором Інституту механіки при цьому університеті, ставши на той момент наймолодшим професором в Німеччині.

Після приходу до влади Гітлера Праґер через своє єврейське походження був звільнений з роботи. Він звернувся до суду, протестуючи проти свого звільнення, і виграв процес. Йому було дозволено відновити свою викладацьку діяльність в Німеччині, але він відмовився і в 1933 р. емігрував з Німеччини до Туреччини, де став професором теоретичної механіки в Стамбульському університеті.

Після початку Другої світової війни в 1940 р. Праґер отримав пропозицію з Браунівського університету і вирішив емігрувати в США. У Браунівському університеті було створено відділення підготовки фахівців з прикладної математики, його в 1946 р. очолив Праґер, який залишався його керівником до 1953 р. Його зусиллями Браунівський університет в 1950-х і 60-х роках став центром прикладної механіки, особливо в галузі пластичності і механіки ґрунтів.

У 1963 р. Праґер пішов з Браунівського університету (де був пізніше почесним професором) і став консультантом в Цюріху в науково-дослідній лабораторії компанії IBM. З 1965 р. і до своєї смерті він був професором прикладної механіки Каліфорнійського університету в Сан-Дієго.

17.3. Аналіз поведінки пружно-пластичних систем

Задачі аналізу напружено-деформованого стану пружно-пластичних систем принципово відрізняються від задач граничного аналізу, в яких система аналізується тільки в стадії пластичного руйнування. Тут досліджується напружено-деформований стан як на певному шляху навантаження, так і під час розвантаження. Такі дослідження виконувалися починаючи із зародження теорії пластичності і пов'язані, перш за все, з іменами Треска, Сен-Венана, Леві і Мізеса. В їх дослідженнях в кінці XIX початку XX століть були закладені фундаментальні основи сучасної математичної теорії пластичності. Побудова теорії пластичності слідувала принципу пластичної течії, тобто установленню зв'язку між швидкостями тензора деформацій і тензором напружень.

Першим екстремальним принципом в цій теорії, висунутим ще в 1909 р., був принцип Хаара-Кармана [Haar, von Karman, 1909]:

> *До тих пір поки не відбувається розвантаження, серед усіх можливих станів рівноваги здійснюється той, при якому робота пружних деформацій буде мінімальною; при цьому напруження в конструкції ніде не повинні перевищувати межу текучості.*

В цілому цей принцип за своєю формою збігається з принципом Кастільяно. Його доведення за умови відсутності розвантаження після появи пластичності дано Грінбергом [Greenberg, 1949]. Однак в цьому доведенні істотним було обмеження на відсутність розвантаження з пластичного стану. Якщо опустити вимогу про відсутність розвантаження, напруження і деформації стають залежними від історії навантаження, і екстремальні принципи, які описують поведінку пружно-пластичних систем, формулюються в швидкостях деформацій $\dot{q}_i$ і в швидкостях зміни напружень $\dot{Q}_i$.

Вважається, що розглядуване пружно-пластичне тіло займає об’єм V, усередині якого задані масові сили X_i, на частині його поверхні S_p задані відомі напруження p, а на іншій частині поверхні S_u задані переміщення u_i^0.

Розподіл швидкостей напружень $\dot{Q}_i^*$ називають статично допустимим, якщо він задовольняє рівняння рівноваги в об’ємі тіла та статичні крайові умови на S_p і не порушує умови текучості. Швидкості деформації, відповідні статично можливим швидкостям зміни напружень $\dot{Q}_i^*$, будемо позначати $\dot{q}_i^*$.

Мінімальний принцип для швидкостей зміни напружень для зміцнюваних середовищ з регулярною поверхнею текучості спочатку був сформульований в 1942 р. Прагером [Prager, 1942] для регулярних умов текучості тільки частинного виду. У більш загальному випадку для зміцнюваних середовищ з регулярною поверхнею текучості він був сформульований в 1948 р. в роботі Ходжа і Прагера [Hodge, Prager, 1948] в такій формі:

Абсолютний мінімум виразу

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \dot{Q}_i^* \dot{q}_i^* \,\mathrm{d}V - \int_{S_u} \sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i^* \dot{u}_i \,\mathrm{d}S ,$$

визначеного для всіх статично допустимих розподілів швидкостей зміни напружень $\dot{Q}_i^*$*, відповідає дійсному розподілу швидкостей зміни напружень* $\dot{Q}_i$.

У доведенні Ходжа і Прагера [Hodge, Prager, 1948] передбачалося, що всі конкуруючі статично можливі поля швидкостей зміни напружень $\dot{Q}_i^*$ відповідають розвантаженню матеріалу, виключаючи області, в яких *дійсні* швидкості зміни напружень призводять до навантаження. Це обмеження було знято в 1949 р. Грінбергом [Greenberg, 1949], який, окрім того, встановив справедливість принципу мінімуму для швидкостей зміни напружень в разі ідеально пластичних середовищ з регулярною поверхнею текучості.

Мінімальний принцип для швидкостей деформації як для зміцнюваних, так і для ідеально пластичних середовищ з регулярною поверхнею текучості встановлений

Грінбергом в 1949 р. [Greenberg, 1949]. Тут також принципу абсолютного мінімуму передував слабший варіаційний принцип, виведений Прагером [Prager, 1942]. Мінімальний принцип для швидкостей деформації в формулюванні Грінберга говорить:

Абсолютний міінімум виразу

$$\frac{1}{2}\int \dot{Q}_i^0 \dot{q}_i^0 \,\mathrm{d}V - \int \dot{X}_i \dot{u}_i^0 \mathrm{d}V - \int\limits_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i^0 \mathrm{d}S\,,$$

визначеного для всіх кінематично можливих розподілів швидкостей деформації $\dot{q}_i^0$*, відповідає дійсному розподілу швидкостей деформації* $\dot{q}_i$ *і відповідних їм швидкостей* $\dot{u}_i$*.*

Тут поле швидкостей деформації $\dot{q}_i^0$ названо кінематично можливим, якщо воно відповідає полю швидкостей переміщень $\dot{u}_i^0$, які відповідають крайовим умовам на S_u. Швидкості зміни напружень, що відповідають кинематично можливому розподілу швидкостей деформації, позначені як $\dot{Q}_i^0$ (ці швидкості не задовольняють рівнянням рівноваги, якщо кинематично можливе поле швидкостей деформації вибрано довільно). Узагальнення обох принципів на випадок зміцнюваних і ідеально пластичних матеріалів з сингулярної поверхнею текучості зроблено в 1953 році Койтером [Koiter, 1953].

Екстремальні принципи для швидкостей напружень і деформацій зовні виявилися схожими на екстремальні принципи теорії пружності, природно, доповнені умовами течії. Це відкрило можливості для використання апарату теорії пружності при розв'язанні задач аналізу пластично деформівних систем, але до появи потужної обчислювальної техніки успіхи такого аналізу залишалися скромними.

Ворнер Тьярдус Койтер, гол. Warner Tjardus Koiter (1914-1997) - учений у галузі механіки, професор прикладної механіки Делфтського технічного університету в Нідерландах з 1949 по 1979 рік.

В 1936 р. закінчив з відзнакою Делфтський технологічний університет, інженер-механік.

Після закінчення інституту працював в голландському Національному авіаційному науково-дослідному інституті (НБЛ) в Амстердамі. Займався перевіркою льотної придатності авіаційних конструкцій. У 1938 р. перейшов в патентне відомство уряду, в 1939 р. увійшов до керівництва Управління цивільної авіації.

Під час Другої світової війни працював в НБЛ за своєю тематикою. Підготував докторську дисертацію «Про стійкість пружної рівноваги», яку захистив в Делфті в листопаді 1945 р. Дисертація була написана голландською мовою, оскільки окупаційна влада дозволяла представляти дисертаційні роботи тільки німецькою або голландською мовами. Як наслідок, зміст дисертації став відомий широкій науковій громадськості тільки після того, як через 15 років з'явився її англійський переклад NASA, який був сприйнятий з ентузіазмом.

У 1949 р. він був призначений професором прикладної механіки в Делфті, на цій посаді залишався до своєї відставки в 1979 р.

У той же самий час Койтер зробив фундаментальні внески в інші галузі механіки, такі як теорія оболонок, механіка руйнування і теорія пластичності. Він був без сумніву найвпливовішим голландським фахівцем XX ст. в галузі прикладної механіки.

Койтер нагороджений медаллю фон Кармана і медаллю Тимошенка, він почесний доктор університетів Лестера, Глазго, Бохума і Гента. Був членом Нідерландської королівської академії наук, Королівського товариства і Національної академії інженерних наук.

У 1996 р. Американське товариство інженерів-механіків заснувало медаль Койтера за досягнення в галузі механіки деформівного твердого тіла.

17.4. Практична реалізація екстремальних принципів

На перших етапах більшість практичних розрахунків конструкцій виконувалася кінематичним методом. При цьому розглядалися кінематичні схеми пластичного механізму, що залежать від одного параметра. Кінематична схема призначається на підставі будь-яких міркувань про характер роботи системи, серед яких основним є випробування моделі. Були й спроби підійти до вибору схеми руйнування теоретично. До таких спроб можна віднести роботу О.Р. Ржаніцина [Ржаницын, 1949], де кінематичний механізм руйнування пластини будувався на основі уявлення про зосереджені лінійні шарніри пластичності (рис. 17.6).

Олексій Руфович Ржаніцин (1911-1987) – автор численних досліджень в найрізноманітніших галузях будівельної механіки.

Після закінчення школи навчався на креслярсько-будівельних курсах і деякий час працював на виробництві. У 1931 р. поступив до МІБІ імені Куйбишева, який він закінчив у 1936 р., і почав працювати в Цнтральному науково-дослідному інституті промислових споруд (ЦНДІПС), одночасно займаючись в аспірантурі (науковий керівник В.З. Власов). У 1940 р. О.Р. Ржаніцин захистив кандидатську дисертацію, в 1945 р. – докторську. У 1952 р. став керівником лабораторії міцності ЦНДІПСа. Коли У 1957 р. ЦНДІПС реорганізували в ЦНДІБК ім. Кучеренко, він очолив лабораторію, а згодом відділення розрахунку споруд. Паралельно він викладав в МІБІ імені Куйбишева, куди в 1972 р. перейшов остаточно на посаду професора кафедри будівельної механіки.

У 1937 – 1938 рр. О.Р. Ржаніцин розробив теорію складених стержнів, а потім і метод розрахунку складених стержнів за граничним станом. Його монографія «Деякі питання механіки систем, що деформуються в часі» була однією з перших в світі в галузі прикладної теорії повзучості. В галузі розрахунку конструкцій методом граничної рівноваги О.Р. Ржаніциним було вирішено ряд задач щодо визначення схеми руйнування пластин, і запропонована схема роботи перерізу тонкостінного стержня на стиснуте крутіння в стадії граничної рівноваги. Він досліджував граничну рівновагу пластин і оболонок, застосувавши для знаходження найбільш небезпечної форми руйнування симплекс-метод.

Багато уваги А.Р. Ржаніцин приділяв розробці імовірнісних методів розрахунку будівельних конструкцій і споруд.

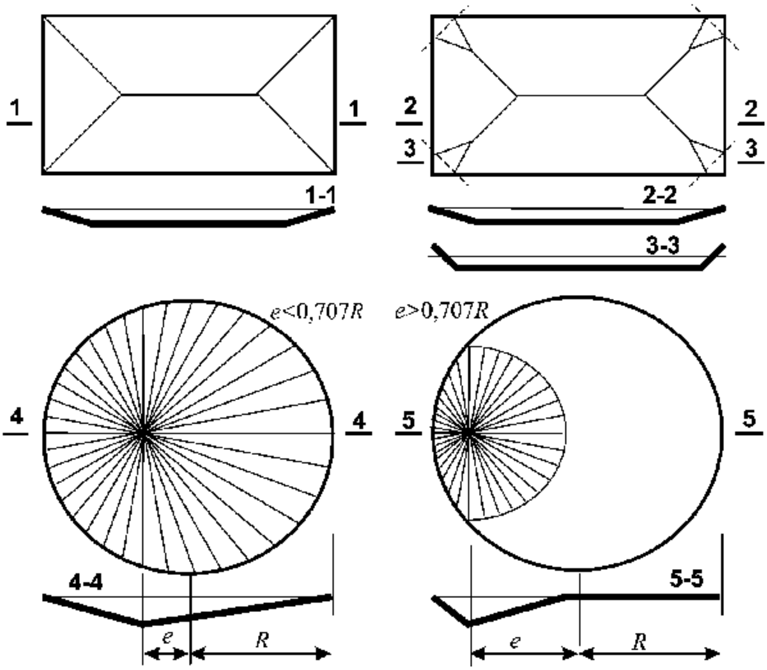


Рис. 17.6. Схеми руйнування пластин за Ржаніциним

Однак розрахунок за гіпотези про лінійні шарніри пластичності, по-перше, обмежений малим числом схем руйнування і часто немає гарантії, що використовувана схема буде реалізована при завантаженні реальної конструкції, а, по-друге, кінематична теорема встановлює, що реальна граничне навантаження не перевищить цю величину, але вона може бути (і для більшості випадків буде) нижче розрахованої. Стосовно ж використання статичної теореми, то тут гальмом служили обчислювальні труднощі.

Відповідним апаратом розв'язку задачі статичним методом виявилося параметричне лінійне програмування, і, головне, такий спосіб виявився у великій мірі алгоритмічним.

Слід зазначити, що інтерес до застосування методів лінійного програмування став проявлятися майже одночасно з розробкою симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування. Так, в 1951 р. Чарнес та Грінберг поставили «заявочний стовп» на застосування лінійного програмування [Charnes, Greenberg, 1951]. У цій односторінковий замітці немає ніяких конкретних результатів, але повідомляється про можливість розв'язання задач за допомогою лінійного програмування. Пізніше, в 1959 р., Чарнес вже з іншими співавторами представив задачу в досить повному вигляді, де докладно розглянув граничну рівновагу рами (з урахуванням тільки згинальних моментів) і використав параметричне лінійне програмування [Charnes et al., 1959].

Цікаво відзначити, що розв'язок Паукера для руйнівного навантаження склепіння по суті був графічним варіантом розв'язання задачі лінійного програмування, в чому не важко переконатися, аналізуючи рис. 17.1.

У 1964 р. Купманом і Лансом була опублікована стаття, присвячена чисто статичному методу граничної рівноваги [Koopman, Lance, 1965]. Розглядалася сталева пластина за умови текучості Тріска. Диференціальні рівняння записувалися в скінченних різницях, і оскільки система отриманих лінійних рівнянь є недовизначеною, то вона допускає множину розв'язків. Ця множина, доповнена умовами текучості Тріска, які представляються з певною похибкою у вигляді системи лінійних нерівностей, визначила обмеження задачі, а в якості цільової функції, максимум якої розшукується, була обрана інтенсивність навантаження.

У загальному випадку, якщо позначити через $u_1,...,u_m$ переміщення точок тіла у напрямку прикладених до них навантажень $P_1,...,P_m$ і вважати, що деформації можуть бути обчислені виходячи з рівнянь кінематичної зв'язності

$$\sum_{j=1}^{m} B_{ij} u_1 = q_i, \quad i = 1,...,n,$$

то рівняння рівноваги будуть мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} Q_i = P_j, \quad j = 1,...,m.$$

Тут B_{ij} — елементи матриці розміром $m \times n$, яка має ранг $m<n$ і залежить тільки від геометрії конструкції.

Інтенсивність λ^* граничного навантаження визначається як розв'язок наступної задачі лінійного програмування

$$\lambda \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} Q_i = \lambda P_j, \quad j = 1,...,m;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki} Q_i \le 0, \quad k = 1,...,s ,$$

де обмеження текучості $\Phi(Q_1,...,Q_n) \le 0$ апроксимовані набором лінійних нерівностей.

Робота [Koopman, Lance, 1965] фактично довела можливість досить простої постановки і розв’язання статичної задачі граничної рівноваги методом лінійного програмування, а також дала початок ряду аналогічних досліджень стосовно пологих оболонок і пластин.

Олександр Олександрович Чирас, лит. Aleksandras Ćyras (1927-2001)

Приблизно в той самий час розпочалася успішна робота литовської школи дослідження граничного стану пружно-пластичних конструкцій. У роботах О.О. Чираса і його учнів розглянуті різні способи постановки і розв’язання задач як прямим, так і параметричним методами лінійного програмування [Чирас, 1968, 1969, 1982]. Поряд зі стержневими системами розглянуті пластини і оболонки. Задача граничної рівноваги розглядалася досить широко, в числі іншого було встановлено зв'язок між двоїстими задачами математичного програмування і двома теоремами граничної рівноваги [Чирас, 1968, 1969].

У ці ж роки Гаваріні розглянув досить широко задачу граничної рівноваги і встановив зв'язок між двоїстими математичними задачами і двома теоремами граничної рівноваги [Gavarini, 1966].

Протягом кількох наступних років подальші дослідження розвивалися в напрямку використання дискретних розрахункових моделей, причому спосіб дискретизації (скінченнорізнецевий, скінченноелементний або інший) не відігравав суттєвої ролі.

Джуліо Майер, італ. Giulio Maier

Аналіз двоїстих задач квадратичного програмування, яким відповідають екстремальні принципи типу Хаара-Кармана, був предметом дослідження Джуліо Майера [Maier, 1968]. Він сформулював двоїстий кінематичний принцип для переміщень і пластичних деформацій, а також показав, яким чином з цих принципів можуть бути отримані статична і кінематична теореми теорії граничної рівноваги.

Д. Майер належить до тієї групи молодих учених, які були стажерами в Браунівському університеті, натхненно працювали в складі сильної групи пластичності і продовжили свої дослідження в цій галузі після повернення додому. Серед них був і Майер, який після стажування в 1964 р. продовжив свою роботу в Мілані, Італія.

Як і в інших галузях механіки деформівного твердого тіла, в задачах про пластичні деформації революційну роль зіграв метод скінченних елементів. Що стосується задач аналізу пластичного деформування при заданій програмі навантаження, він був розвинений як розширення методу скінченних елементів для задач теорії пружності. Мабуть, першою публікацією тут можна вважати роботу Маркала і Кінга [Marcal, King, 1967], яка була опублікована в 1967 р. У цій роботі булла використана крокова процедура обчислень, координати вузлових точок і компоненти напружень оновлювалися після кожного кроку обчислення додаванням відповідних збільшень.

Подальший аналіз методики побудови скінченних елементів для розв'язання крайових задач теорії ідеальної пластичності показав, що якщо вважати, що кінцевий елемент знаходиться цілком або в пружному або в пластичному стані, то це призводить до необхідності використовувати елементи, у яких поле напружень постійне в межах елемента. А це означає, що можуть використовуватися тільки лінійні координатні функції. Це обмеження зазвичай обходиться шляхом введення гіпотези про наявність у матеріалу деякого (зазвичай малого) зміцнення.

НАРИС 18

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ
У ТЕОРІЇ СПОРУД

Le mieux est l'ennemi du bien.
Краще – ворог хорошого.

Вольтер

Справжній інженер повинен вірити своєму оку більш, ніж будь якій формулі; він повинен пам'ятати слова натураліста і філософа Гекслі: «Математика, як жорно, перемелює те, що під нього засипають», – і ось на цю засипку перш за все інженер і повинен дивитися.

О.М. Крилов

Вступ

Як зазначив відомий іспанський архітектор і інженер Едуардо Торроха [Torroja, 1967] «Кращою спорудою є та, надійність якої забезпечується головним чином за рахунок її форми, а не за рахунок міцності її матеріалу». При проектуванні будівельних конструкцій перед інженером постає задача дотримання таких вимог як міцність, жорсткість, стійкість, довговічність, економічність, технологічність, тривалість термінів проектування і будівництва, використання певних ресурсів і матеріалів. Всі ці вимоги мають досить суперечливий характер, тому оптимізація проекту є головною метою кожного інженера, який прагне створити окремий елемент, конструкцію або споруду, що задовольняють певним критеріям.

Проблеми оптимального проектування давно привертають велику увагу, їм присвячена значна кількість робіт, а історія розвитку оптимального проектування налічує вже майже чотири століття і походить від основної для будівельної механіки роботи Галілео Галілея [Galilei, 1638]. Даний нарис не ставить собі за мету дати вичерпну історію розвитку проблеми з усіма її відгалуженнями в різноманітні області та додатки. Звісно ж, що самостійний інтерес може становити історія виникнення та розвитку основних ідей, яку можна проілюструвати зупинившись, головним чином, на стержневих системах, які довгий час були єдиним об'єктом дослідження в будівельній механіці.

Більш того, навіть серед стержневих систем можна виділити ферми, які мають ту особливість, що кожен елемент системи характеризується тільки одним параметром, а саме площею поперечного перерізу (аналогічна ситуація реалізується в разі тришарових систем, які піддаються згину, якщо товщина заповнювача задана, а визначенню підлягають однакові зверху і знизу товщини несучих пластин [Prager, Taylor, 1968]). Ця особливість суттєво спрощує аналіз, і саме на фермах відпрацьовувалися основні прийоми розв’язання задач оптимізації. Такого роду підхід дозволяє описати історію розвитку в «чистому» вигляді, тобто без впливу багатьох додаткових факторів, важливих з практичної точки зору, але суттєво ускладнюючих аналіз.

Сказане не означає, що інші задачі оптимізації в якомусь сенсі є другорядними. Більш того, цілі класи задач оптимізації, наприклад, такі, як пошук оптимальної конфігурації тривимірного пружного тіла [Баничук, 1980] або відшукання оптимального обрису поверхні тонкої оболонки [Banichuk et al., 2005], які залишаються за межами розгляду, є дуже важливими. Але задачі такого роду, де конструкція описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, пов'язані з математичними ідеями іншого роду і в цьому сенсі лежать трохи осторонь від тематики цього нарису. Виняток становлять лише ті варіанти згаданих задач, де використовується перехід до дискретних змінних, наприклад, шляхом застосування методу скінченних елементів.

18.1. Обернена задача будівельної механіки

Класична теорія споруд традиційно орієнтована на аналіз напружено-деформованого стану. Однак здавна поряд з цим напрямом були присутні елементи синтезуючого напряму, пов'язаного з такими проблемами як оптимальне проектування і як розв’язання обернених задач будівельної механіки. Зазначені проблеми не еквівалентні, оскільки при розв’язанні обернених задач будівельної механіки може бути відсутньою мета щодо досягнення деякого найкращого (оптимального) розв’язку або відшукання для даної системи деякої екстремальної якості.

Напружено-деформований стан деякої системи (для простоти обмежуємося стержневими конструкціями), пошук якого є прямою задачею будівельної механіки, можна знайти якщо відомі:

- топологічна схема і геометричні розміри конструкції;
- опорні закріплення і інші умови зв'язку;
- типи перерізів і їх розміри;
- фізична модель роботи матеріалу;
- зовнішні впливи.

Всі ці дані визначаються деяким набором параметрів, і якщо не всі вони задані, то можна задатися деякими елементами напружено-деформованого стану, а решту його елементів і невідомі параметри конструкції підібрати так, щоб задача виявилася повністю розв’язаною. Така задача будівельної механіки називається оберненою.

Обернена задача часто не має однозначної відповіді, і її умови може задовольняти ціла множина значень розшукуваних параметрів. У цих випадках умови оберненої задачі часто доповнюють вимогою вибору найкращого в деякому сенсі варіанту розв’язання, і виникає задача оптимального проектування.

Найчастіше відшукується розв’язок, оптимальний з точки зору витрат матеріалу або з іншого економічного показника. Але в оберненій задачі не обов'язково виходять з умови оптимальності, тут для пошуку шуканих параметрів часто використовують умови приналежності до певного класу систем з деякими бажаними властивостями (рівноміцність, сталість розподілу по системі пружної питомої деформації, вимога про належність частот власних коливань до деякого бажаного діапазону тощо).

Однак необов'язковість не є умовою відсутності, тому відомі зворотні задачі, в яких невідомі параметри відшукуються для системи з екстремальними властивостями, і це не обов'язково властивості мінімуму ваги або вартості. Типовим прикладом може слугувати задача про пошук системи з заданою витратою матеріалу, яка витримує максимальне навантаження (так звана задача складування). Або можна ще назвати приклад задачі про пошук місць установки додаткових опор (з числа заздалегідь дозволених позицій), які максимально збільшують критичне навантаження втрати стійкості.

Якщо ж говорити про економічні цілі, то є цілий ряд задач, які послідовно ускладнюють і уточнюють постановку, утворюючи ланцюг: мінімум обсягу (ваги), мінімум вартості матеріалу, мінімум собівартості конструкції, мінімум початкових і експлуатаційних витрат протягом усього життєвого циклу. Але корисно відзначити, що всякого роду уточнення цільових показників не завжди істотно позначається на результаті, тому тут доречно вдатися до вельми цікавого зауваженням, зробленого в книзі [Хог, Арора, 1983] щодо реакції інженера і математика на результат оптимізації. В якості прикладу автори наводять відому задачу про оптимальну висоту сталевої двотаврової балки, для якої показано, що зміна оптимальної висоти h_{opt} на 20% в ту або іншу сторону призводить до збільшення маси її погонного метра всього на $3-4\%$.

З точки зору математика нев'язка відраховується по осі h і тому точки $0{,}8h_{opt}$ та $1{,}2h_{opt}$ розглядаються як дуже грубе наближення через їх значне віддалення від глобального мінімуму функції мети (рис. 18.1). А з точки зору інженера чотиривідсоткове відхилення від глобального мінімуму функції мети можна вважати хорошим наближенням до оптимального проекту і, з огляду на прийнятність для практики отриманого результату, проектувальник не повинен упускати цю сприятливу можливість при виборі розв'язку поставленої задачі проектування.

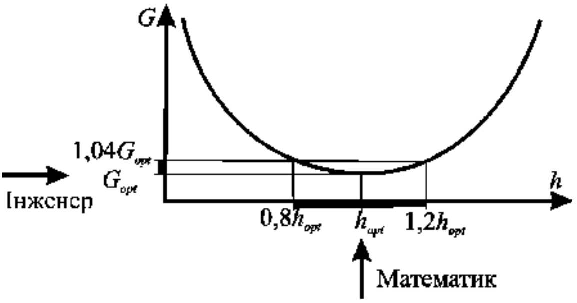


Рис. 18.1. Дві точки зору на задачу оптимізації

Ця ідея, мабуть, вперше була висловлена і широко розглядалася В.М. Гордєєвим, який запропонував замість відшукання точки екстремуму розшукувати, а потім більш детально аналізувати всю множину розв'язків, що примикають до цієї точки [Гордеев, 1974], [Шимановский, Гордеев, Гринберг, 1987]. Оскільки більшість реальних оптимізаційних задач мають «пологий екстремум», тобто навіть помітний відступ від ідеального розв'язку не набагато змінює значення цільової функції, то існує можливість, не виходячи з простору розв'язків, близьких до оптимального, враховувати додаткові умови, які важко формалізуються (наприклад, дискретність деяких параметрів).

18.2. Початок шляху

Спроби розв'язання задач оптимізації робилися ще в давнину. Так, вже у часи Піфагора було відомо, що фігура, яка має найменше відношення периметра до площі - це круг. У 1638 р. Галілей, який поклав початок науці про міцність, продемонстрував параболічну форму балки рівного опору [Galilei, 1638]. При цьому використовувалася ідея рівнонапруженості, яку Галілей, очевидно, вважав цілком природною для розглядуваної задачі, і яка в майбутньому знайшла собі численних послідовників.

У 1807 р. Томас Юнг вказав, що оптимальна форма шарнірно опертої балки є даремною через її нульову висоту на опорах. Він запропонував визначити форму балки на ділянці, суміжній з опорою, за допомогою тангенса кута нахилу до теоретичної лінії обрису зігнутої балки, передбачивши деякою мірою формулу Журавського для поперечної сили [Young, 1807].

Але перша, чітко сформульована задача оптимального проектування стержневих конструкцій була поставлена і розв’язана Лагранжем в 1770 - 1773 рр. Це була задача про колону найменшої ваги, жорстко затиснену на одному кінці і завантажену стискаючою силою на іншому [Lagrange, 1773].

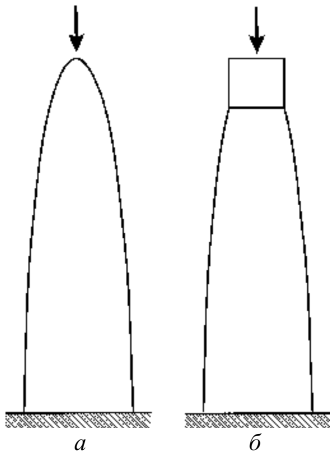


Рис. 18.2. Розв’язок задачі Лагранжа

Потрібно було визначити форму колони, що відповідає мінімуму ваги при заданій поздовжній силі. Розв’язок Лагранжа був помилковим, і неточність, яка в ньому містилася, була усунена лише через вісімдесят років в роботі російського академіка Т. Клаузена [Clausen, 1851], який найшов оптимальну форму колони (рис. 2,*а*), у якій при наближенні до вершині стержня товщина прямує до нуля, а напруження необмежено зростають. Для усунення цієї особливості Е.Л. Ніколаї [Николаи, 1907] ввів додаткові обмеження на величини допустимих напружень. Отриманий в цьому випадку розподіл товщини представлений на рис. 2,*б*. Продовжили дослідження цієї задачі М.Г. Ченцов [Ченцов, 1936] та ін.[1] Було проведено докладне дослідження даної задачі для різних типів стержнів і умов закріплення. При цьому були розглянуті як зазначена задача мінімізації ваги стержня при фіксованій величині сили втрати стійкості, так і двоїста до неї задача максимізації критичної сили при заданому об’ємі.

Підхід Лагранжа, коли явно формулюється задача пошуку механічної системи, яка має певні наперед задані властивості (в даному випадку мінімальну вагу), дозволяє вважати Лагранжа засновником напряму в будівельній механіці, орієнтованого на розв’язання задач синтезу. Крім того, використання Лагранжем варіаційного числення для розв’язання таких задач надовго визначило панування цього методу при розв’язанні задач синтезу.

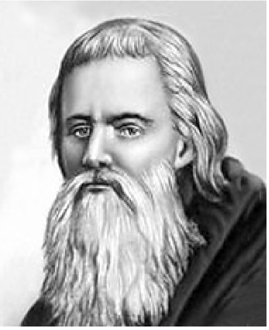
Роботи Галілея та Лагранжа мали академічний характер і жодним чином не були орієнтовані на технічне застосування. Ця ситуація зберігалася ще дуже довго, і задачі синтезу були скоріше деякими вправами у варіаційному численні, яке швидко розвивалось.

---

[1] У повоєнні роки задача Лагранжа стала популярною в США. Кліффорд Трусделл, не знаючи про Т.Клаузена і його російських послідовників, запропонував задачу Лагранжа американським вченим Дж. Келлеру і Г. Вайнбергеру. Обидва вчених з цим завданням успішно впоралися. Однак робота Г. Вайнбергера залишилася неопублікованою, а Дж. Келлер не тільки повторив рішення Клаузена, але і показав, що для опуклих поперечних перерізів оптимальна колона має форму рівностороннього трикутника.

Але був один виняток, який пов'язаний з інтересом до розрахунку мостових склепінь, що стимулював дослідження арочних систем. Одним з найбільш цікавих питань теорії арок є питання про так звану раціональну форму осі арки, тобто про підбір найвигідніших геометричних параметрів осі арки і її поперечних перерізів. Це питання дуже давно привертає до себе увагу інженерів і породило велику літературу.

Одним з яскравих прикладів може служити проект моста через Неву, представлений у 1772 р. І.П. Кулібіним. Він прийняв обрис арки за формою експериментально вивченого їм мотузкового багатокутника, справедливо вважаючи, що арка такої форми буде працювати тільки на осьовий стиск. Слід зауважити, що це судження Кулібіна не можна вважати піонерним. Більш ніж за сто років до Кулібіна фахівець з експериментів Королівського товариства Роберт Гук опублікував анаграму яка розшифровувалась наступним чином: «*Як провисає гнучка лінія, такою ж, але в перегорнутому вигляді, буде жорстка арка*» [Hooke, 1675].



Іван Петрович Кулібін,
рос. Иван Петрович
Кулибин
(1735-1818)

Першу спробу аналітично визначити обрис арки по кривій тиску зробив в 1787 році Салімбені, однак його розв’язок містив помилку, оскільки він вважав, що крива тиску збігається з віссю склепіння при будь-якій його формі [Salimbeni, 1787]. Минуло ще приблизно шістдесят років, поки Вілларсо правильно розв’язав задачу про створення склепіння, вісь якого збігається з кривою тиску [Villarceau, 1846].

Вже на початку XX ст. було розв’язано багато задач про оптимальні арки. Особливо інтенсивно досліджувалося питання про визначення раціональної осі арки заданого прольоту і заданої стріли підйому, при якій необхідні за умовами міцності поперечні перерізи арки будуть найменшими [Белзецкий, 1904, 1907]. Подальші дослідження цієї задачі уточнювали її постановку. Так, наприклад, В.І. Руднєв висунув нову точку зору щодо раціональної осі, встановивши для арок скінченної товщини відмінність між обрисом по кривій тиску, уздовж якої M=0, але $Q \neq 0$, обрисом по векторіальній кривій, уздовж якої Q=0, але M≠0, і обрисом по проміжній кривій. Для тонкої арки можна шукати обрис по мотузковій кривій, уздовж якої M=0 і Q=0. Для ряду інтегрованих випадків В.І. Руднєв вивів рівняння цих кривих, що належать до симетричних арок з вертикальним навантаженням [Руднев, 1930].

Дослідження, присвячені пошуку раціонального обрису вісі арки, були продовжені в роботах [Смирнов, 1950], [Филин, 1953], [Киселев, 1953], [Гуревич, 1954] та ін. Але задача про арку була не єдиною з числа оптимізаційних, якими цікавилися дослідники в кінці XIX і в першій половині XX століття. Так, наприклад, інженер Г.С. Семіколенов стосовно нерозрізних балок ставив задачу «... придумати таку систему влаштування мостових покриттів, щоб уникнути невигод, представлених ними, і по можливості зберігати їх істотну вигоду, заощадження в матеріалі» [Семиколенов, 1871]. У своїх «урівноважених» багатопрольотних балках він відшукував місця оптимального розміщення шарнірів, поліпшивши таким чином консольно-балочну систему мостів, запропоновану Гербером [Gerber, 1866].

У зв'язку з розробкою сортаментів металопрокату великий інтерес викликала проблема оптимізації форми поперечного перерізу стержня, що піддається згину. Однією з перших була опублікована робота Е.Р. Пацкевича [Пацкевич, 1894], в якій автор вперше обґрунтував загальний метод аналізу профілів і створив основи теорії сортаменту. Користуючись питомим моментом опору $k = W / A^{3/2}$, Е.Р. Пацкевич встановив, що «балка тим краще працює на згин, чим більшим є k і що за k можна перевірити не тільки міцність, але і раціональність перерізу». Розглядаючи профілі з рівними питомими моментами опору, автор робить висновок, що подібні профілі представляють частинний випадок профілів рівного питомого опору. Рівність питомих моментів опору обумовлена рівністю відношень лінійних розмірів (питомі моменти опору залежать лише від форми профілю). Пізніше підхід Е.Р. Пацкевича з деякими вдосконаленнями застосував Ф.С. Ясинський, який використовував його при створенні Російського нормального метричного сортаменту [Ясинский, 1900]. У 1924 році Н.П. Пузиревський вводить важливе поняття про теоретичну вагу споруди, яке відіграло важливу роль в подальших дослідженнях [Пузыревский, 1924].

Досить близьким до даної проблеми є пошук закономірностей, які можна знайти при вивченні вже побудованих споруд різного типу. Так систематичне зіставлення різних схем мостових споруд з метою вибору найкращого рішення почалося з роботи Е. Колінгтона [Collington, 1865], аналіз був продовжений в роботах Гейнцерлінга [Heinzerling, 1867], Дірксена [Dirksen, 1905], Н.Б. Богуславського [Богуславский, 1907], Є.О. Патона [Патон, 1914], М.С. Стрілецького [Стрелецкий, 1925]. Зокрема, у згаданій роботі М.С. Стрілецького, в основу якої покладено аналіз проектних рішень 320 мостів, були висловлені і деякі загальні теоретичні положення, які були пізніше розвинені стосовно споруд інших типів як самим автором, так і вченими його школи.

Цей напрямок досліджень в якійсь мірі є не теоретичним, а експериментальним, оскільки можна вважати, що кожна реальна споруда є одиничним, хоча і спеціально не запланованим експериментом, спрямованим на дослідження закономірності поведінки всієї сукупності однотипних конструкцій. Велика кількість такого роду експериментальних даних дозволяє їх використовувати для виявлення прихованих закономірностей.

Сам процес проектування в значній мірі є неформалізованим експериментом в сенсі розв’язання певної конкретної задачі. Дані зазначених експериментів з давніх часів склали фонд для вибору раціональних дій, хоча такі експерименти, взагалі кажучи, призводять до випадкових результатів, і час, присвячений марним або невдалим експериментам, іноді становить сотні років. Наприклад, пошук раціональної схеми для решіток мостової ферми був тривалим процесом, який почався з римських дерев'яних арок, пройшов через велику кількість дивних форм, таких як схеми Боллмана, Фінка та Лонга [Перельмутер, 2015], і нарешті прийшов до сучасних структур.

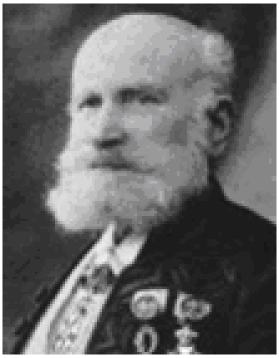
18.3. Виникнення теорії

Згадані вище дослідження були розрізненими спробами підійти до створення якоїсь більш-менш загальної теорії оптимізації, теорії, потреба в якій почала відчуватися в 20-х роках XX століття і яка вже неявно, в зародковому вигляді спостерігається, наприклад, в роботах по дослідженню закономірностей, властивих побудованим раніше спорудам.

Рівноміцність і метод заданих напружень

В основу такої теорії була покладена ідея рівноміцності, або конструкції, у якій для всіх розрахункових перерізів вимога міцності виконується в формі рівності (реалізуються задані напруження). Тобто метою синтезу конструкції оголошувалося досягнення рівноміцності.

Попередником зазначеного підходу можна вважати Моріса Леві. В роботі [Levy, 1874] він встановив, що об'єм стержнів статично невизначуваної рівноміцної ферми буде таким же, як у стержнів статично визначуваної ферми, утвореної із заданої шляхом видалення зайвих в'язей. Крім того в цій роботі було показано, що теоретична вага рівноміцної ферми пропорційна потенціальній енергії деформації.



Моріс Леві,
фр. Maurice Lévy
(1838-1910)

Варто відмітити, що сам Леві, досліджуючи властивості рівноміцної конструкції, не припускав, що пошук таких конструкцій може стати досить загальним підходом до проблеми оптимізації, деяким новим методом будівельної механіки.

Нагадаємо, що поняття рівноміцності ввів ще Г. Галілей, який визначив форму рівноміцної балки. Їм розглядався випадок згину консольної балки під дією зосередженої сили, яка прикладена до вільного кінця, і було показано, що умова рівноміцності виконується, якщо висота перерізу балки *h* змінюється за параболічним законом. Як виявилося згодом, задача про форму балки мінімальної ваги за умови, що нормальні напруження не перевищують заданої величини σ_0, зводиться до задачі, розв'язаної Г. Галілеєм. Таким чином, рівноміцна консольна балка в той же час є балкою мінімальної ваги. Були знайдені і інші приклади, коли умова рівноміцності забезпечує мінімальну вагу конструкції.

Ця обставина значною мірою визначила інтерес до відшукання рівноміцних конструкцій – задачі, яка має сенс у випадку одного навантаження.

Перші загальні роботи в області пошуку рівноміцних стержневих конструкцій належать А. Піппарду [Pippard, 1922] і Г. Гейману [Heimann, 1928]. Вони містять рецептурне описання методу розрахунку статично невизначуваних ферм, який полягає в тому, що задаються зусилля в зайвих (умовно необхідних) стержнях, з урахуванням яких перерізи всіх інших стержнів підбираються з умови рівності напружень в них граничному значенню. Таким чином ферма (за винятком зайвих стержнів) виявляється «повнонапруженою». Ні Піппард, ні Гейман не помітили можливість отримання суперечливого розв’язку, коли розрахована таким способом ферма отримує знаки зусиль в зайвих стержнях, протилежні заданим.

Повне обґрунтування методу і аналіз його як позитивних, так і негативних сторін були виконані в класичній праці І.М. Рабіновича, опублікованій в 1933 році. Монографія [Рабинович, 1933] справила величезний вплив на подальший розвиток синтезуючого напрямку в будівельній механіці. У ній були вивчені питання зміни деформацій, зусиль і площ поперечних перерізів стержнів і встановлені межі таких змін. Критерієм оптимальності була рівноміцність основних стержнів. Було доведена важлива пропозиція про можливість створення ферми найменшої ваги за умови використання попереднього напруження (значно пізніше цей результат був перевідкритий заново Хофмейстером і Фелтоном [Hofmeister & Felton, 1979]).


Ісаак Мойсеєвич Рабінович,
рос. Исаак Моисеевич Рабинович
(1886-1977)

Була узагальнена теорема Моріса Леві про утворення статично невизначеної ферми найменшої ваги шляхом її перетворення в статично визначену за рахунок обернення на нуль зусиль в деяких умовно необхідних стержнях. Детально розібрані випадки виникнення протиріч при невдалому завданні зусиль в зайвих стержнях. Нетривіальною проблемою, що виникла в зв'язку з методом заданих напружень, була наступна. Оскільки для статично невизначуваних систем пропонувалося задатися зусиллями в зайвих стержнях, то слід знати допустимі границі їх зміни (вихід за ці границі приводив до від'ємних значень площ). Деякі рекомендації з цього приводу дано в 1938 р. Хуберяном [Хуберян, 1938], який розвивав метод заданих напружень. Пізніше до проблеми допустимих меж зверталися і інші дослідники [Слюсарчук, 1952], [Ізраеліт, 1956].


Костянтин Михайлович Хуберян,
рос. Константин Михайлович Хуберян
(1911-1994)

Інша проблема методу заданих напружень пов'язана з необхідністю оперування абсолютними значеннями зусиль, оскільки саме від них залежали значення шуканих геометричних характеристик перерізів (площ, моментів опору тощо). Цій проблемі зобов'язані своєю появою «модулярні функції» Ю.А. Радцига [Радциг, 1946], за допомогою яких розв’язувалася задача про найвигідніше виключення зайвих в’язей, а також «функції змін знака» у

Олексій Іванович Виноградов, рос. Алексей Иванович Виноградов (1912- 1974)

О.І. Виноградова [Виноградов, 1948], що визначають місця нульових точок епюри моментів в оптимальних стержневих системах з переважаючим згином.

О.І. Виноградов вперше вирішив питання про розрахунок за заданими напруженнями на дію тимчасових навантажень і вперше ввів поняття про найвигідніші лінії впливу. Він і надалі інтенсивно розвивав теорію обернених задач, використовуючи введене ним в обіг поняття про множину конструкцій з заданим контуром осей, серед якої розшукується найвигідніший (з точки зору мінімізації ваги) розподіл внутрішніх зусиль. Було доведено, що мінімум досягається на деякій підмножині основної множини, при цьому можуть реалізуватися не тільки системи без зайвих в'язей, а й деякі статично невизначувані рішення без попереднього напруження [Виноградов, 1954].

Крім досліджень Виноградова ряд робіт, що розвивають метод заданих напружень, був виконаний К.М. Хуберяном. У своїй роботі [Хуберян, 1938] він запропонував при розробці практичної схеми розрахунку зберегти найвигідніший розподіл напружень, відмовившись від найвигіднішого розподілу зусиль. В іншій його роботі [Хуберян, 1949] метод розрахунку ферми по заданих напруженнях був поширений на багаторазово статично невизначувані ферми при постійному і при тимчасовому завантаженні. Пізніше К.М. Хуберян вивчав застосування методу заданих напружень до ферм з хрестоподібною решіткою і знайшов значне спрощення задачі для розглянутого їм окремого випадку [Хуберян, 1951].

Отже, статично невизначувана ферма мінімальної ваги може бути реалізована тільки у виняткових випадках, на відміну від конструкцій, елементи яких знаходяться в неоднорідному напруженому стані. Такі конструкції завжди можна зробити рівноміцними, якщо міняти форму поперечного перерізу елементів [Гольдштейн, Соломещ, 1980]. Правда, при цьому можуть бути отримані конструкції вельми екзотичного виду.

Приклад проектування портальної рами, для якої розшукуються розміри поперечного перерізу, і орієнтація його головних осей, показані на рис. 18.3 .

Якщо ж відмовитися від пошуку кута повороту перерізу, вважаючи напрям головних осей фіксованим, то також можна знайти рівноміцний розв’язок, який виявляється на 23,4% важчим.

Поряд із умовою рівноміцності як критерій раціональності конструкції стали використовувати умови рівностійкості, сталості питомої потенціальної енергії пружної деформації тощо.

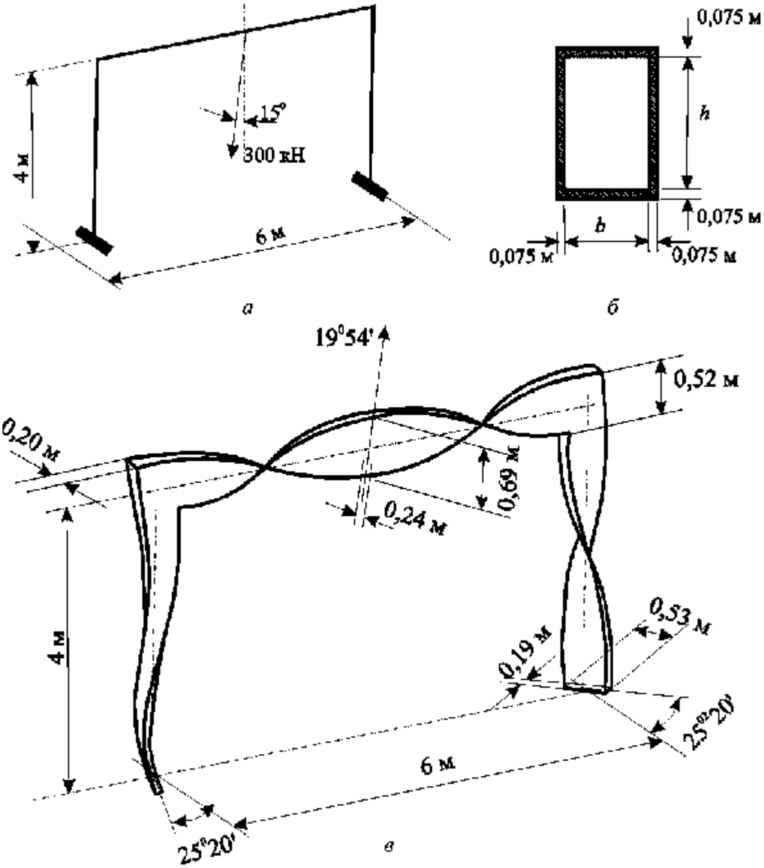


Рис. 18.3. Оптимальний розподіл матеріалу вздовж вісі рами:
а - схема рами, *б* - тип поперечного перерізу, *в* – розв’язок задачі

Енергетичний підхід

Енергетичні характеристики оптимальних конструкцій можуть бути використані як критерії, що забезпечують мінімальну вагу, і служити основою для побудови методів їх синтезу. При цьому задача про пошук мінімуму замінюється задачею про синтез систем з наперед заданими властивостями.

Так, наприклад, для повністю напруженої фермової конструкції, у якій площа поперечного перерізу будь-якого стержня виражається через зусилля в ньому N_i і допустиме напруження σ_0 як $A_i = |N_i| / \sigma_0$, потенціальна енергія деформації дорівнює

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \int_l \frac{N_i^2}{EA_i} dx = \frac{1}{2} \sum_i \frac{|N_i| l_i \sigma_0}{E},$$

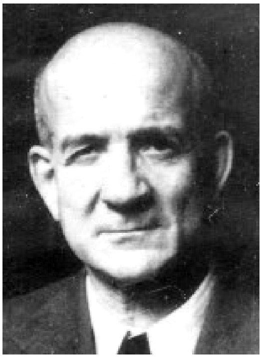
а її об’єм дорівнює

$$V=\sum_i A_i l_i=\sum_i \frac{|N_i| l_i}{\sigma_0}.$$

Порівнюючи ці вирази, неважко помітити, що $U=kV$, де $k=\sigma_0^2/2E$. На факт пропорційності, мабуть, вперше звернув увагу Мічелл [Michell, 1904]. Цей зв'язок став відправною точкою для А.І. Кефелі для обчислення найменшого теоретичного об'єму ферми, який визначався з умов мінімуму енергії деформації [Кефели, 1927].

Крім умови пропорційності було виявлено, що мінімум об'єму можна отримати, якщо вдається досягти рівномірного по конструкції розподілу питомої потенціальної енергії деформації. Дійсно, постійний для всієї конструкції коефіцієнт $k=\sigma_0^2/2E=(\sigma_0/E)(\sigma_0/2)=\sigma_0\varepsilon/2$ дорівнює щільності потенціальної енергії деформації.

Але дослідження Кефелі не знайшли тоді свого продовження і тільки через десятиліття книга З. Васютиньского [Wasiutynski, 1939] поклала початок цілої серії робіт в області теорії оптимальних систем, які базувались на зв'язку між перерозподілом матеріалу в пружній лінійно деформівній системі і потенціальною енергією деформації. З. Васютиньский поставив собі за мету розв'язати задачу проектування конструкції як задачу на мінімум потенціалу пружних деформацій при збереженні постійного об'єму матеріалу [Wasiutynski, 1950].


Збігнєв Васютиньский,
пол. Zbigniew Wasiutyński
(1902-1974)

Цей напрям дозволив також вивчати питання синтезу інженерних споруд, чому був присвячений ряд цікавих робіт групи польських вчених, очолюваних З. Васютиньскім (див., наприклад, [Brandt et al., 1957], [Brandt & Ignaczak, 1958], [Biernawski & Grochowski, 1960], [Grycz, 1960] та ін.). Велике значення для узагальнення результатів, виявлених спершу для фермових конструкцій, мала робота Мазура [Masur, 1970], в якій доведено, що міцність пружної конструкції заданої ваги є мінімальною, якщо питома енергія деформації в «розрахункових волокнах» постійна у всій системі. При цьому під розрахунковими волокнами розуміють нескінченно малі ділянки поперечного перерізу, на напружений стан яких мають вплив малі зміни параметрів конструкції. Деякі роботи з оптимізації лише за формою відрізнялися від досліджень, в яких оптимізація пов'язана з потенціальною енергією деформації.

Так А.О. Комаров проводив свої дослідження, виходячи з ідеї, що будь-яка конструкція призначена для сприйняття деяких зовнішніх навантажень і передачі їх на опорні закріплення, і, отже, вигідність проектованої силової схеми


Андржей Брандт
пол. Andrzej M. Brandt

буде залежати від величини зусиль, що передаються, і від довжини шляхів, за якими відбувається ця передача [Комаров, 1952, 1965].

У зв'язку з цим порівняння варіантів силової схеми здійснювалося через особливу характеристику конструкції – її «силову вагу» *M*. Вона одночасно враховує обидві якості передачі сил – величину і протяжність дії внутрішніх зусиль в конструкції. І чим меншою є її величина, тим досконаліша силова схема.

Однак, як кажуть, нове – це добре забуте старе. Майже на сто років раніше К. Калман [Calmann, 1866] запропонував розташовувати вузли ферми таким чином, щоб мінімізувати величину $M = \sum |N_i| l_i$. Але величина силової ваги *M* пропорційна потенціальній енергії. Дійсно, вираз для енергії

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \frac{N_i^2 l_i}{EA_i} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{N_i^2 l_i A_i}{EA_i^2} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\sigma_i^2 l_i A_i}{E}$$

при рівності всіх напружень граничному значенню σ_0 набуває вигляду

$$U == \frac{1}{2}\sum_i \frac{\sigma_0^2 A_i l_i}{E} = \frac{\sigma_0}{2E}\sum_i \sigma_0 A_i l_i = \frac{\sigma_0}{2E}\sum_i N_i l_i \ .$$

Таким чином, роботи А.О. Комарова також слід віднести до енергетичного напрямку оптимізації. В цілому ж використовуваний в рамках цього напрямку критерій постійної щільності розподілу енергії реалізує мінімум ваги в тих випадках, коли є лінійна залежність критерію якості (цільової функції) і функції обмежень від змінних проектування.

Оптимізація як задача математичного програмування

Перший метод відшукання пластичних рамних систем мінімальної ваги був запропонований Жаком Хейманом [Heyman, 1951]. Він ґрунтувався на дослідженні можливих механізмів руйнування і зіставленні відповідних їм ваг. Оскільки розглядалися нерозрізні балки і рами, на які діють тільки зосереджені сили, то побудова таких механізмів не викликала труднощів. Крім того вважалося, що вага одиниці довжини стержня пропорційна граничному пластичному моменту. Трохи пізніше В. Праґер розглянув випадок, коли вага одиниці довжини пропорційна деякому ступеню (меншому за одиницю) граничного моменту [Prager, 1956].

Важливі теореми про верхню і нижню границі для мінімальної ваги рамних конструкцій були доведені Фолкісом [Foulkes, 1953], який ввів поняття механізму, відповідного вазі. Цей механізм характеризується тим, що в рівнянні робіт коефіцієнти при кожному граничному пластичному моменті такі ж, як і у виразі для ваги. Теореми Фолкіса стверджують, що якщо механізм, відповідний вазі, не забезпечує появу статично допустимого і безпечного розподілу зусиль, то вага такої рами буде менше ваги оптимальної конструкції. І навпаки, якщо в цьому механізмі реалізується статично допустимий і безпечний розподіл зусиль, то вага такої рами більше або дорівнює мінімальній вазі.

Виходячи з цих теорем Фолкіс прийшов до використання лінійного програмування в задачах оптимального проектування. Його підхід полягав у

Люсьєн Шміт,
англ. Lucien A. Schmit

знаходженні конструкції мінімальної ваги при недопущенні пластичного руйнування конструкції. У цих умовах значний клас задач оптимізації конструкцій можна сформулювати як задачу лінійного програмування [Foulkes, 1954, 1955], при цьому розглядається лише одна умова навантаження.

У 1958 р. Пірсон, розвиваючи теорію пластичного руйнування, звернувся до задачі проектування ферм і рам мінімальної ваги за наявності декількох варіантів навантаження [Pearson, 1958]. Ця робота зіграла важливу роль, оскільки використаний в ній підхід послужив предтечею трьох ключових ідей, які згодом лягли в основу розробки сучасних методів оптимізації конструкцій, які працюють за межами пружності. Вони полягають у тому, що одночасно розшукуються оптимальний проект і критичні схеми появи пластичних шарнірів.

Великий вплив на розвиток сучасних методів оптимізації конструкцій справила робота [Klein, 1955], в якій було показано, що для досить загального класу задач оптимального проектування можлива постановка задач нелінійного програмування, а також було визнано фундаментальне значення обмежень у вигляді нерівностей при коректній постановці задач оптимального проектування конструкцій.

Але найбільш загальний підхід до розв’язання задач оптимізації був запропонований Шмітом [Schmit, 1960]. В межах цього підходу для створення системи автоматичного проектування вводиться ідея застосування скінченноелементного розрахунку конструкцій у зв'язці з методами нелінійного математичного програмування. В загальній постановці задачі, яка була запропонована Шмітом, наголошувалося на важливості врахування неєдиності різних умов навантаження і накладення обмежень по різним формам досягнення границі несучої здатності за допомогою системи обмежень-нерівностей.

Іншим важливим аспектом, який враховувався в цій постановці задачі, була наявність обмежень на мінімальні і максимальні розміри елементів конструкції. Крім того, Шміт вказував, що на противагу широко поширеній думці проект статично невизначуваної конструкції мінімальної ваги, на який накладено тільки обмеження по напруженням, не обов'язково буде такою конструкцією, в якій кожен елемент навантажений повністю, принаймні, при одному з варіантів навантаження. Протягом наступного десятиліття з 1960 по 1970 р. підхід на основі нелінійного програмування застосовувався до самих різних задач оптимізації конструкцій та до розробки варіантів реалізації алгоритмів нелінійного програмування.

Були випробувані методи послідовної безумовної оптимізації [Pope & Schmit, 1971], підхід, який використовує розширені функції Лагранжа [Gruver & Shafroth, 1976], метод проекцій градієнта Розена і різні модифікації методів найшвидшого спуску [Gellatly & Gallagher, 1966], [Moses & Onoda, 1966] та інші способи розв’язання задачі нелінійного програмування. Алгоритм, що обирався дослідником, мав істотний вплив і на формулювання задачі, і на те, що вважалося її розв’язком, оскільки, як відомо, методи нелінійного програмування в більшості випадків не гарантують досягнення абсолютного мінімуму цільової функції через неопуклість області допустимих розв’язків. Ця ситуація призвела до застосування методів цілочисельного [Toakley, 1968], динамічного [Kalaba, 1962], [Palmer, 1968] програмування і різних ітераційних методів [Reinschmidt et al., 1966] навіть для ідентичних задач.

До початку 70-х років стало очевидно, що наявні можливості оптимізації конструкції на глобальному рівні, засновані на розрахунку за методом скінченних елементів в поєднанні з методикою математичного програмування, вимагають надзвичайно великих витрат часу для розв’язання задач проектування конструкцій доволі обмежених розмірів.

Вважали, що вихід із ситуації полягає у використанні альтернативного підходу, ідея якого була запропонована в роботі Прагера і Тейлора [Prager & Taylor, 1968] і який став відомим як "підхід критеріїв оптимальності". Цією методикою передбачено, що спочатку необхідно вивести умови, яким повинен задовольняти оптимальний проект. Потім розробляється алгоритм (як правило, ітераційний), метою якого є пошук конструкції, яка задовольняє визначені критерії, і водночас відбувається досягнення деякого локального мінімуму. У цьому сенсі методи, засновані на критеріях оптимальності, потрапляють в категорію непрямих методів оптимізації.

У піонерній роботі [Prager & Taylor, 1968], наприклад, розглянута задача пошуку конструкції мінімальної ваги із заданим значенням віртуальної роботи навантаження $P(x)$ на прогинах $y(x)$. Оскільки віртуальна робота навантаження має задане значення C, то принцип мінімуму потенціальної енергії стає принципом мінімуму енергії деформації, а остання, як показано в [Prager & Taylor, 1968], пропорційна вазі конструкції. Далі було показано, що підхід такого роду може бути використаний, коли розглядається величина, яка характеризується мінімальним принципом будівельної механіки (наприклад, використаною в зазначеній вище задачі роботою зовнішніх сил).


Вільям Прагер,
нім. William Prager
(1903-1980)

Непрямі методи оптимізації використовувалися в задачах проектування систем мінімальної ваги [Venkayya, 1971], [Klusalaas, 1972], [Dobbs & Nelson, 1976], а також в ряді інших задач, де можна було спертися на варіаційні принципи будівельної механіки. До них відносяться, наприклад, такі задачі, в яких в якості критерію оптимізації виступають основна частота власних коливань [Гринев и Филиппов, 1971], коефіцієнт граничного навантаження в разі пластичного руйнування [Чирас и др., 1974], величина критичної сили втрати стійкості [Turner & Plaut, 1980].

До цього напрямку примикають також дослідження з проблеми раціональної розстановки в'язей в задачах стійкості та власних коливань. Однією з перших робіт цього напрямку була робота [Бубнов, 1912-1914]. У роботах [Нудельман, 1949], [Дольберг, 1951], [Смирнов, 1958], [Ляхович и др., 1978] були обґрунтовані правила вибору місць постановки в'язей для максимального зсуву першої власної частоти або критичної сили. Було обґрунтовано їхню мінімально необхідну кількість. Показано, що установкою в стержневій системі *s* додаткових в'язей можна підвищити величину першої власної частоти або критичної сили максимально до значення (*s*+1)-ї. При цьому в'язі повинні бути поставлені у вузлові точки форми власних коливань (втрати стійкості), яка відповідає (*s*+1)-й власній частоті (критичній силі) системи без додаткових в'язей. Були запропоновані методи, що дозволяють максимально збільшувати величину першої власної частоти (критичної сили) при мінімальній сумарній жорсткості додаткових зв'язків.

В роботі [Ляхович, Плахотин, 1986] розглянута інша постановка задачі, згідно з якою потрібно вибрати місця установки пружних дискретних в'язей з числа можливих і визначити їх жорсткості таким чином, щоб перша власна частота (критичне навантаження) досягала б заздалегідь заданого значення, дотримувалися конструктивні обмеження, і вага або об'єм матеріалу додаткових в'язей набували б мінімального значення. Розв’язані задачі, пов'язані з необхідністю в одних випадках розміщувати на споруді додаткові вантажі, а в інших - знімати частину навантаження. При цьому зміна частоти власних коливань не повинна виходити за встановлені межі. У задачі про довантаження споруди шукається положення максимально можливого додаткового навантаження, що не виводить зменшену частоту власних коливань за встановлену межу. При цьому величини кожного з додаткових вантажів обмежені.

Іноді критерій оптимізації конструюється на підставі інтуїтивних міркувань. Наприклад, найважливіша вимога, яку повинна задовольняти будь-яка конструкція, зводиться до необхідності дотримання критерію міцності в кожному елементі. Обмеження міцності входить до числа інших обмежень, що накладаються на проект конструкції. На практиці критерії міцності задовольняються за допомогою концепції повністю напружених (fully stressed) конструкцій; ця концепція стала одним з перших критеріїв оптимальності.

Важко назвати автора ідеї повністю напруженої конструкції, яка інтуїтивно, здавалось, приводить до системи найменшої ваги і була реалізована в багатьох розрахункових програмах, але науковий аналіз цього питання почався лише в у другій половині XX століття. Інтерес становили співвідношення між повністю напруженою конструкцією і конструкцією мінімальної ваги, оскільки ніякі очевидні відношення між ними явно не були видні. В роботі [Schmidt, 1958] стверджувалося, що проект мінімальної ваги може бути відібраний серед повністю напружених конструкцій. Але вже через два роки було показано [Schmit, 1960], що повністю напружений проект не обов'язково є проектом мінімальної ваги, і навіть при невеликій кількості умов навантаження метод повного напруження може привести до неефективного проекту.

І мабуть, першою серед робіт, які чітко проаналізували зв'язок між повністю напруженою конструкцією і конструкцією мінімальної ваги була робота Р. Разані [Razani, 1965], в якій було показано що ітераційний метод пошуку повністю напруженої конструкції не завжди збігається до проекту мінімальної ваги, і знайдена необхідна умова для еквівалентності двох методів проектування. Пізніше О.І. Виноградов проаналізував збіжність міцнісного перерахунку, орієнтованого на пошук повністю напруженої системи, і показав на прикладах, що такий перерахунок може привести не до системи мінімальної ваги [Виноградов, 1971].

Використовуване припущення про те, що у більшості практичних конструкцій розподіл зусиль по елементам є невідчутним до розмірів поперечних перерізів цих елементів, є причиною того, що розглянутий алгоритм для деяких конструкцій призводить не тільки до неоптимального проекту, але і до проекту з неефективним розподілом зусиль в елементах конструкції. Щоб позбутися цього недоліку, було запропоновано на кожній ітерації змінювати змінні проектування всього лише на кілька відсотків, тоді до оптимального проекту можна прийти лише за 4-5 ітерацій [Gallagher, 1973].

Але по справжньому труднощі розв’язання великих задач оптимізації почали долатися лише при заміні загальної задачі оптимізації конструкції на послідовність відносно невеликих явних наближених задач оптимізації конструкцій. Реалізація цього переходу досягалася за рахунок скоординованого використання концепцій апроксимування, якими передбачалося:

- зменшення кількості незалежних змінних проектування шляхом їх об’єднання в групи;
- зменшення кількості обмежень, які враховуються на кожному етапі, шляхом тимчасового відкидання неактивних і зайвих обмежень;
- побудова високоякісних явних апроксимацій для залишених функцій обмежень.

Взагалі кажучи, це нагадує звичайну практику проектування, коли виконується ряд кроків з поступовою деталізацією та уточненням задачі.

На початку 80-х років була зроблена спроба створити новий потужний метод мінімізації ваги будівельних конструкцій, заснований на поєднанні концепцій апроксимування з двоїстим методом [Schmit & Fleury, 1980].

Аналіз цього підходу показує, що для значного класу задач оптимізації розмірів конструкцій мінімальної ваги методи, засновані на узагальнених критеріях оптимальності, і методи математичного програмування утворюють єдиний метод розв’язання задач оптимізації конструкцій. Як показав Флері [Fleury, 1982], підходи теорії математичного програмування і підходи, засновані на використанні критеріїв оптимальності, аж ніяк не виключають один одного, а труднощі, властиві звичайним методам, заснованим на критеріях оптимальності, долаються за допомогою комбінованого застосування концепцій апроксимування і двоїстого підходу.

18.4. Синтез схеми

Можна простежити, як з плином часу розширювалося коло задач оптимізації конструкцій. Враховувалися все більш складні обмеження, різноманітнішими ставали постановки задач, використовувалися різноманітні прийоми розв’язання зазначених задач. Однак довгий час геометрична схема і топологія конструкції вважалися заданими.

Лише в небагатьох випадках, як в задачі про оптимізацію осі арки, коли в якості розв’язку, що заздалегідь вважався оптимальним, приймалася мотузкова крива, можна було відшукати деякі параметри геометрії системи. Типовою можна вважати задачу про визначення оптимального значення стріли підйому арки. І мабуть першою роботою, де було поставлене це питання, було дослідження [Legay, 1900]. У 1925 р. І.М. Рабінович знайшов, що найвигідніше відношення стріли до прольоту вагомої гнучкої нитки або стиснутої арки, окресленої по кривій тиску від власної ваги, виражається формулою $f/l = \sqrt{3}/4 = 0,433$. Я.Г. Пановко в своїй роботі [Пановко, 1934] дав розв’язок тієї ж задачі, але в якості навантаження прийняв вагу самої арки і суцільного заповнення, яке знаходиться над аркою. Ряд інших важливих випадків було розглянуто в роботах [Киселев, 1953], [Филин, Филалаева, 1973].

Суцільні перехресні системи

Однак топологія конструкції в згаданих роботах покладалася заданою і незмінною. Першим порушив цю традицію Дж.К. Максвелл [Maxwell, 1869], який поставив задачу відшукання оптимальної конфігурації ферми при заданих навантаженнях і опорах. Максвеллу належить теорема, яка стверджує, що в такій фермі при заданих навантаженнях і без урахування втрати стійкості виконується умова

$$V^+R^+ - V^-R^- = \text{const},$$

де V^+, V^- – об’єм розтягнутих і стиснутих стержнів, R^+, R^- – границі міцності матеріалу при розтягу і стисненні.

Е. Мічелл, продовжуючи роботу Максвелла, в 1904 році запропонував замінити плоску двовимірну конструкцію системою криволінійних стержнів, орієнтованих уздовж траєкторій головних напружень [Michell, 1904].


Джеймс Клерк Максвелл,
англ. James Clerk Maxwell
(1831-1879)

В результаті було отримано конструкції, які є статично визначуваними і можуть не забезпечувати несучу здатність при навантаженні альтернативними силами.

Мічелл довів, що з усіх конструкцій ферм, які передають на опори задане навантаження, мінімальний об’єм має та, для якої виконується умова

$$V^{+}R^{+}+V^{-}R^{-}=\sum_{i=1}^{m}P_i u_i,$$

де u_i – переміщення за напрямком сили P_i, а модуль деформації всіх стержнів є постійною величиною.

Сама форма конструкції Мічелла виявляється подібною до звичайних пластичних ліній ковзання (сітки Генки – Прандтля) при плоско-напруженому або плоско-деформованому стані [Strang & Kohn, 1983].

Ентоні Мічелл,
англ. Anthony George
Maldon Michell
(1870 – 1959)

У конструкції Мічелла зазвичай входить невизначено велика кількість нескінченно довгих елементів, тому вони в окремих випадках можуть бути безпосередньо використані при проектуванні інженерних конструкцій. Проте конструкції Мічелла можуть бути корисні при проектуванні, особливо при домінуванні однієї умови навантаження і наявності, головним чином, обмежень по напруженням. Подальшим розвитком підходу Мічелла до проектування конструкцій мінімальної ваги виявилися роботи Хемпа [Hemp, 1958] і Чана [Chan, 1960], проте пізніше цей напрям досліджень потроху було згорнуто, оскільки одержувані розв’язки мало задовольняли практичні запити (рис. 18.4,*а*), хоча деяке застосування схеми такого роду знайшли в задачах конструювання склопластиків.

Але підхід Мічелла залишався привабливим тим, що він мало пов'язаний з апріорними припущеннями про структуру системи і не залежав від матеріалу конструкції. Саме в рамках такої постановки задачі було виконано дослідження О.Р. Ржаніцина, в якому автор робить спробу синтезуючого підходу до розрахунку стержневих систем [Ржаницын, 1949]. Використовуючи поняття віріалу сил, Ржаніцин встановив деякі загальні закономірності, властиві оптимальним системам, зокрема було доведено, що в оптимальній фермі об’єми стиснутих і розтягнутих стержнів дорівнюють один одному (цей результат ще в 1890 р. отримав Максвелл [Maxwell, 1890]). Для деяких задач були отримані схеми мінімальної ваги (рис. 18.4,*б*), що, як і схеми Мічелла, мало нагадували реальні конструкції.

Приблизно за сімдесят років після Мічелла його теорія була поширена на системи, що піддаються згину (ростверки). Вільям Праґер і Георг Рожвани сформулювали першу загальну теорію оптимізації топології, яку називають «теорія оптимізації конфігурацій» [Prager & Rozvany, 1977]. Вони застосовували її перш за все до точної, аналітичної оптимізації конструкцій, подібних перехресним балковим клітинам, але ця теорія також має важливе значення для чисельних методів і структур типу континууму.

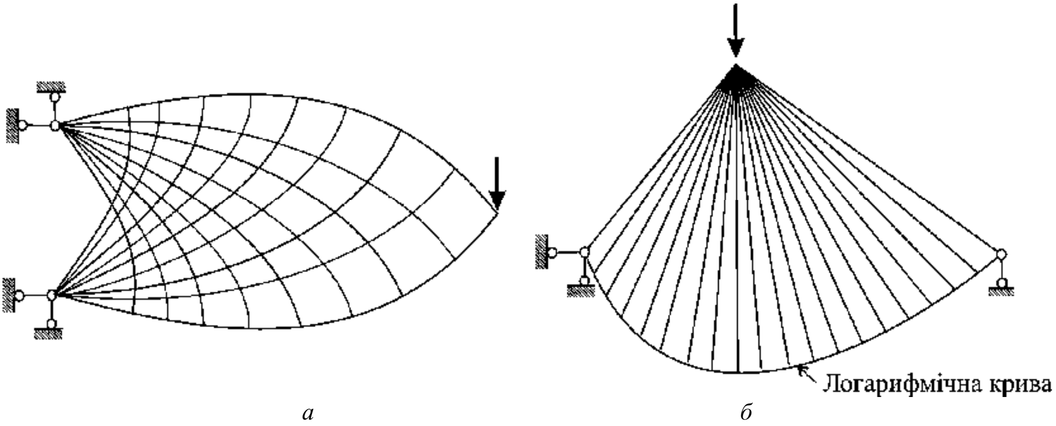


Рис. 18.4. Оптимальна конфігурація: *а* – ферма Мічелла, *б* – ферма Ржаніцина

Для ферми Мічелла функція питомої вартості визначається як $\psi = k|N|$, де ψ — вага одиниці довжини, N — зусилля, k — задана константа, а для балочного ростверку функція питомої вартості записується у вигляді $\psi = k|M|$, де M — згинальний момент [Prager, 1974], що дозволяє підійти до розв'язання задачі про оптимальну компоновку таких конструкцій. Так само як і в фермах Мічелла розв'язок складається з нескінченної кількості компактно розташованих елементів (фермоподібний континуум у разі задачі Мічелла і ростверкоподібний континуум в задачі Прагера). Детально проблема оптимальної компоновки представлена в монографії Рожвани [Rozvany, 1976]. Деякі приклади отриманих компоновок показані на рис. 18.5.

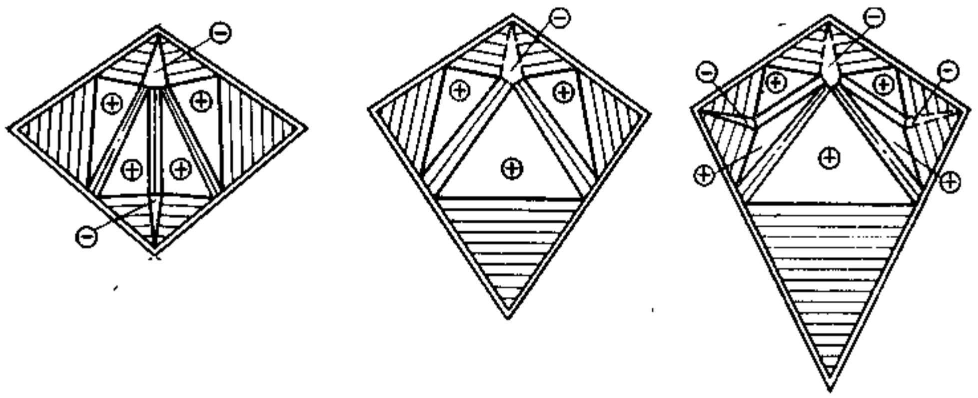


Рис. 18.5. Приклади компоновки ростверку для ромбовидної області

Використання спеціальних моделей методу скінченних елементів

Більш реалістичною виявилася наступна постановка задачі структурного синтезу. Якщо задано множину вузлів ферми з діючими на них навантаженнями, то поєднуючи всі ці вузли стержнями, складаючи для всіх вузлів рівняння рівноваги і мінімізуючи об’єм матеріалу, отримаємо задачу лінійного програмування для синтезу ферми мінімального об’єму. Такий підхід до задачі вперше описано Пірсоном [Pearson, 1958]. Дещо більш загальний підхід розвинений в статті У.С. Дорна, Р.Е. Гоморі і Дж. Грінберга [Dorn et al., 1964], де використано поняття про множину допустимих вузлів (в тому числі і ненавантажених), з'єднаних попарно стержнями, а також в роботі Д.А. Мацюлявічюса [Мацюлявичюс, 1965], який запропонував кілька модифікацій задачі при урахуванні багатьох завантажень. Аналогічну просторову задачу трохи раніше розглянув Г.С. Чен [Chan, 1964].

Урахування власної ваги було запропоновано в роботі [Мацюлявичюс, 1969]. Було виявлено існування критичного габариту конструкції, досягнення якого викликає настільки великий ріст власної ваги, що конструкція з матеріалу заданої міцності не спроможна його сприйняти. А саме по собі явище «нестійкості за вагою» було, мабуть, вперше описано за десять років до цього в роботі [Виноградов, 1959].

Детальний аналіз підходу роботи [Dorn et al., 1964] виявив залежність одержуваних розв’язків від початкової щільності сітки вузлів.

В роботі [Kohn & Strang, 1986] ця особливість пояснена тим, що в будь-якій точці допустимої геометричної області з урахуванням дискретності використовуваних математичних моделей реалізується одне з двох можливих «крайніх» станів: конструкційний матеріал або є, або відсутній. Тому в постановці задачі структурної оптимізації силових конструкцій було запропоновано використовувати специфічні пористі матеріали [Комаров, 1984], [Bendsoe & Kikuchi, 1988]. Такий підхід (метод гомогенізації), який використовує тверде деформівне тіло зі змінними за об’ємом характеристиками матеріалу, допускає можливість появи в моделі конструкції «перехідних» зон між «крайніми» варіантами стану пружного середовища.

У дослідженнях цього напрямку пружне середовище, вписане в допустиму геометричну область, ділиться на скінченні елементи. За цільову функцію приймається податливість пружного середовища, а обмеженням є маса матеріалу. Враховуються обмеження на еквівалентні напруження, узагальнені переміщення і критичні зусилля втрати стійкості. Варіації проектних змінних призводять до виродження елементів, передача зусиль через які нераціональна, і, навпаки, виділяють з конструкції елементи, що забезпечують раціональні шляхи передачі сил. В результаті визначається топологія теоретично оптимальної конструкції.


Валерій Андрійович
Комаров,
рос. Валерий Андреевич
Комаров

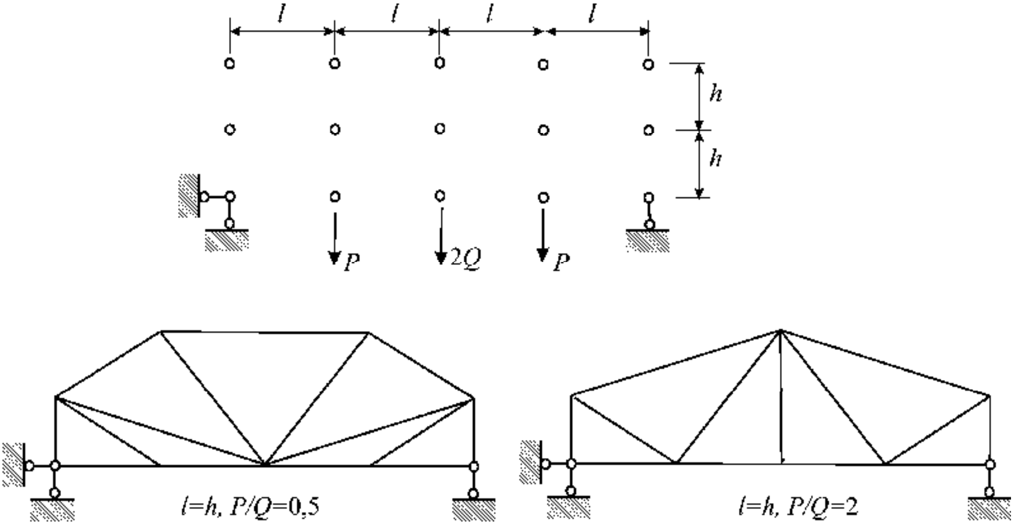


Рис. 18.6. Оптимальний обрис ферм за Дорном, Гоморі та Грінбергом (нерухомі вузли)

Перші підходи до розв’язання задач топологічної оптимізації з урахуванням обмежень на напруження були закладені в роботі [Xie, Steven, 1993], де розглядається так званий «еволюційний» метод оптимізації конструкції. При його використанні поступово збільшується граничне значення приведених напружень RR, за якого елементи з напруженнями, що не перевищують RR, виключаються зі схеми (див. рис. 18.7).

Інший підхід ґрунтувався на вирішенні задачі оптимізації анізотропних властивостей двовимірних елементів конструкцій з локально-ортотропного матеріалу [Баничук и др., 1984]. Відшукується найкраща орієнтація осей ортотропії пружного середовища з умови мінімуму функціонала інтегральної жорсткості. Отриманий розподіл орієнтації осей ортотропії може бути використано для формування конструктивно-силової схеми, оскільки знайдені лінії напрямку осей можуть розглядатися в якості зосереджених елементів (типу ребер жорсткості).

А взагалі проблема оптимального проектування тонкостінних конструкцій в повному своєму обсязі надзвичайно складна, і в ряді випадків для конструкцій з композиційних матеріалів не має закінченого математичного формулювання [Баничук и др., 1988], [Немировский, Старостин, 1975], [Черевацкий, 1966]. Ця складність зумовлена тим, що задачі оптимізації конструкцій відносяться до числа нелінійних задач механіки. Також ускладнюють задачу велика кількість форм використовуваних в техніці конструкцій, широкий спектр вимог, які висуваються до них, і різноманітність умов їх експлуатації.

Найбільш поширеними критеріями оптимальності є вимоги мінімуму ваги або мінімуму вартості (коли матеріал конструкції неоднорідний), оскільки при цьому цільова функція характеризується інтегральним функціоналом. Виконані в цьому напрямку дослідження в достатній мірі відображені в монографіях [Арман, 1977], [Баничук, 1986], [Баничук и др., 1988] тощо. З аналізу зазначеної літератури випливає, що в абсолютній більшості випадків розглядаються лише плоскі конструкції або циліндричні оболонки. Це обумовлено труднощами розв'язання відповідних задач оптимізації.

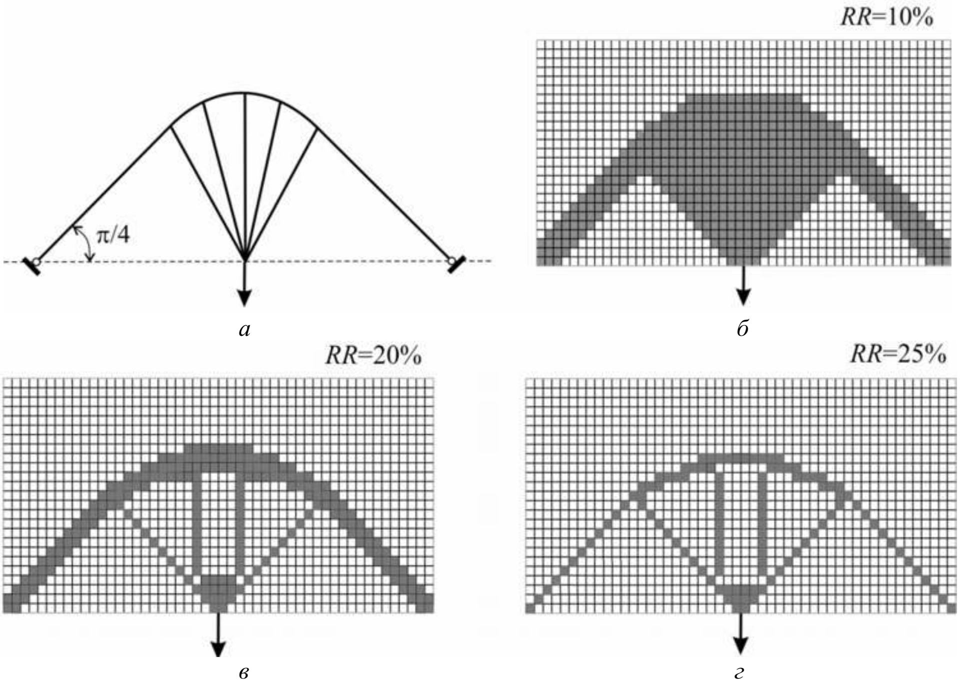
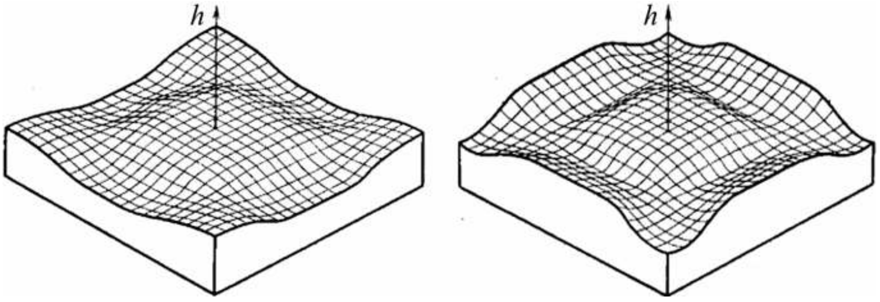


Рис. 18.7. Еволюція синтезу: *а* – розв'язок Мічелла; *б*-*г* – розв'язки при збільшенні порога *RR*

Що стосується результатів оптимізації, то вони часто демонструють досить витончену форму оптимальних конструкцій з незвичними для традиційних конструктивних рішень обрисами границі пружного тіла. На рис. 18.8 показані розподіли товщини квадратної пластини з шарнірно опертим (рис. 18.8, *а*) і затисненим (рис. 18.8, *б*) краєм [Баничук и др., 1980].

В рамках континуальної постановки задачі оптимального проектування умова оптимальності разом з рівняннями стану і рівняннями для сполучених змінних утворюють замкнену нелінійну крайову задачу щодо змінних стану, проектування і сполучених функцій [Арман, 1977]. Загальні аналітичні методи розв'язання таких задач відсутні, тому розвиток теорії оптимального проектування та ефективні методи розв'язання прикладних задач, як правило, пов'язані з дискретизацією задач оптимізації. Однак, щоб звузити простір параметрів проектування (і спростити тим самим задачу), дискретизація здійснюється досить грубо (зазвичай конструкцію розбивають приблизно на 10 елементів), що знижує достовірність отриманих результатів.



а *б*

Рис. 18.8. Оптимальна пластина

Інший шлях спрощення нелінійних задач оптимізації конструкцій полягає у звуженні підпростору керуючих функцій і параметрів проектування. Він дозволяє в ряді випадків отримати розв’язок задачі оптимізації в аналітичній формі або перейти до задачі мінімізації функції кількох змінних. Але це знижує ефективність оптимального проекту. Так, в роботах [Гололобов, Ильин, 1970], [Малков, Строгин, 1971], [Немировский, 1978], [Соболь, Статников, 1981] методами математичного програмування за рахунок відповідного вибору анізотропії матеріалу визначені оптимальні параметри пластин і оболонок.

18.5. Розрахунок, орієнтований на оптимальне проектування

Популярні програми розрахунку конструкцій за методом скінченних елементів розроблялися без урахування особливостей задачі оптимізації проекту. Маються на увазі такі особливості: необхідність отримання даних про чутливість конструкції до зміни параметрів розрахункової моделі, а також необхідність ефективного аналізу великого числа різних проектів, що мають певною мірою подібні конфігурації. Наприклад, в більшості програм, заснованих на методі скінченних елементів, будується матриця жорсткості системи **К** для повного опису конкретного проекту. Однак, якщо врахувати необхідність розв’язання задачі оптимізації конструкції, то виникає задача виділення інваріантних елементів матриці **К** [Bhatia, 1971]. І вже перший досвід розв’язання задач оптимального проектування показав, що розрахунок конструкцій для вибору оптимального проекту є специфічним завданням, коли потрібно виконувати розрахунок багатьох конструкцій, які в якійсь мірі близькі одна до одної [Сергеев, 1975].

Аналіз чутливості грає важливу роль при розрахунку конструкцій і при їх оптимізації [Хог, Арора, 1983]. В рамках аналізу чутливості відшукуються градієнти розрахункових характеристик поведінки конструкції (наприклад, переміщень, напружень, власних частот і нормальних форм коливань) у вигляді частинних похідних від цих характеристик по змінним проектування (наприклад, площам поперечного перерізу, товщинам, просторовому положенню вузлів). Нагальна необхідність отримання інформації щодо аналізу чутливості як невід'ємної частини будь-якої сучасної програми розрахунку за методом скінченних елементів диктується наступними міркуваннями. При проведенні аналізу чутливості отримують цінну кількісну інформацію, яка може служити орієнтиром в процесі взаємодії людини і машини, крім того, інформація про чутливість є основою побудови явних наближених виразів для характеристик поведінки конструкцій через змінні проектування.

Слід додати, що аналіз чутливості важливий ще і з точки зору перевірки стабільності отриманого оптимального рішення. Справа в тому, що є випадки, коли навіть незначна зміна параметрів задачі призводить до різкої зміни результату. Так, наприклад, в роботі [Овчинников, Бочкарев, 2003] показано, що оптимальні проекти пластин вельми чутливі до відхилень товщини від оптимальних, а для пластин, запроектованих на роботу в режимі близькому до граничного, навіть неповне прикладання проектного навантаження на деякій частині поверхні може привести до руйнування.

На цю особливість результату оптимізації може вказати перевірка чутливості розв'язку до зміни параметрів. І не тільки змінних проектування, які варіювались в процесі розв'язання, але і тих параметрів, які належали до числа заданих.

Основні напрямки в галузі досліджень з розрахунку конструкцій, орієнтованому на їх оптимальне проектування, розпадаються на три основні категорії:

1) методи обчислення градієнтів параметрів поведінки конструкції по змінним проектування, тобто аналіз чутливості конструкції [Fox, 1965] і [Fox & Kapoor, 1968];

2) методи побудови наближених розв'язків за допомогою підмножини змінних стану, відібраного за даними детального аналізу [Fox & Miura, 1971], [Noor & Lowder, 1974];

3) поліпшення методики розбиття на скінченні елементи в напрямку більшої підпорядкованості задачі оптимізації проектування конструкцій [Bhatia, 1971].

Дві останні категорії пов'язані з особливостями об'єкта проектування і навряд чи можуть бути універсальними.

18.6. Оптимізація і антиоптимізація

Оптимізація конструкцій, що знаходиться під дією змінних навантажень, природно вимагає, щоб були враховані найбільш несприятливі варіанти навантаження. Проблема знаходження найкращого рішення в ситуації, коли є невизначеність в умовах роботи конструкції (не тільки в умовах навантаження, але і, наприклад, за наявності невідомої початкової неправильності), отримала назву проблеми «оптимізації і антиоптимізації» [Elishakoff, Makoto Ohsaki, 2010]. При розробці конструкції вимагається, щоб було мінімізовано ризик і максимізовано ефективність - іншими словами, слід дотримуватись освяченого століттями правила «створення кращого з гіршого».

Така постановка задачі характерна для методів оптимізації, заснованих на ігрових підходах [Воробьев, 1967], [Исаев, 1968]. Але визначення умов найбільш невигідного навантаження конструкції представляє інтерес не тільки в рамках створення оптимальних конструкцій. Це класична задача про невигідне навантаження, задача якою будівельна механіка цікавиться ще з XIX ст. Особливо

Еміль Вінклер
нім. Emil Winkler
(1835-1888)

чітко вона була описана в теорії ліній впливу - апарату дослідження дії рухомих навантажень, створеного працями Еміля Вінклера і Отто Мора.

Стаття Вінклера [Winkler, 1962] з'явилася у пресі в 1862 р. В цей час автор її цікавився будівництвом мостів, і тому велика частина статті присвячена питанням невигідного завантаження.

Для великих мостів, прольоти яких *l* перевищують довжину залізничного поїзда *L* (рис. 18.9), він переміщав поїзд по прольоту моста і шукав положення *x*, яке приводить до максимального згинального моменту або поперечної сили в певному перерізі балки.

У 1876 р. Готфрід Асимонт виявив [Asimont, 1876], що при дії рухомої групи зв'язаних вантажів на балку максимальний момент реалізується не в середині прольоту, а під вантажем, найближчим до рівнодійної вантажів, що знаходяться на балці, коли навантаження розташоване так, що середина відстані між цим вантажем і рівнодійною співпадає з серединою прольоту (у вітчизняній літературі це називається правилом Вінклера).

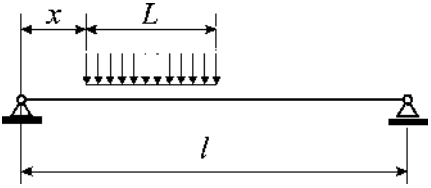


Рис. 18.9. Переміщення поїзда по балці

Це правило відноситься до трикутних ліній впливу. Для багатокутних ліній впливу методи відшукання невигідного положення групи вантажів розроблялися Л.Ф. Николаї [Николаи, 1877], Л.Д. Проскуряковим [Проскуряков, 1887] і іншими ученими.

Більш загальна проблема відшукання невигідного поєднання навантажень різної природи привернула до себе увагу значно пізніше. Тут також робилися спроби використовувати лінії впливу [Tanabashi, 1937], але практика пішла по іншому шляху.

На перших порах, коли практика оперувала з відносно невеликою кількістю варіантів навантаження системи, користувалися простим правилом, сенс якого полягає в наступному. Виконувався розрахунок на всі види навантажень, і далі шляхом підсумовування внутрішніх зусиль одного і того ж знаку вибиралися екстремальні значення якогось з внутрішніх зусиль (наприклад, поздовжньої сили N). Потім екстремальному значенню одного із зусиль ставилася у відповідність сукупність решти зусиль. Наприклад, $N_{\text{макс}}$–$M_{\text{відп}}$, $M_{\text{макс}}$–$N_{\text{відп}}$ тощо.

Важко сказати хто перший запропонував такий підхід, але він дожив і до наших днів і навіть присутній в деяких університетських підручниках, хоча вже давно було показано, що у такий спосіб можна пропустити небезпечне поєднання [Александров, 1968], [Garstecki, Ścigałło, 2001] і ін.

Дійсно, якщо розглянути рис. 18.10, де точками в координатах M, N показані значення для деяких навантажень і їх комбінацій, то екстремальні значення визначають прямокутник, що проходить через точки 1, 3, 6, 8. Хай несуча здатність підібраного несучого перетину, пов'язана з екстремальними напруженнями і визначається як $-R^- \le N/A \pm M/W \le R^+$ (R^- і R^+ - міцність матеріалу на стиск і розтяг відповідно) і нею визначається затемнений прямокутник, який безумовно накрив розрахункові точки 1, 3, 6, 8. Проте інші точки, наприклад 4 і 7, залишилися поза областю несучої здатності.

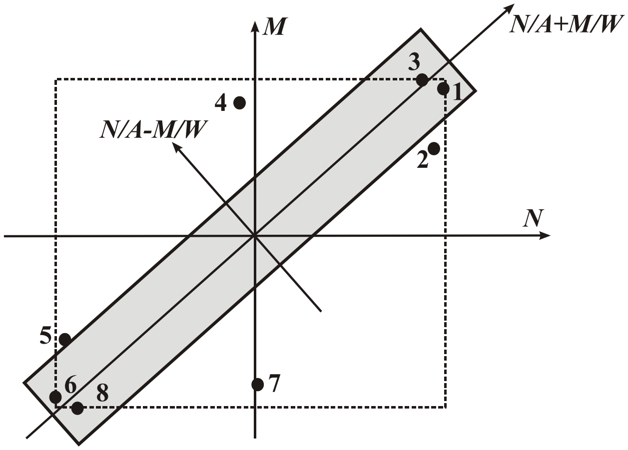


Рис. 18.10. Приклад використання правила «екстремального зусилля і відповідні йому інші зусилля»

При пошуку екстремального значення деякого внутрішнього зусилля вказаний метод припускав, що розглянуті всі можливі поєднання незалежно від діючих навантажень. Повний перебір всіх можливих поєднань таких навантажень приводить до того, що в загальному випадку повна кількість поєднань досягає числа $2n$, де n – кількість прикладених незалежних навантажень. Таке було можливим при невеликих значеннях n, але, починаючи з кількості дій порядку 25–30, задача стає нерозв'язною навіть для сучасних комп'ютерів через велику кількість обчислень і обмеженість оперативної пам'яті.

Тому до початку ери комп'ютеризації, коли розрахунковий аналіз обмежувався відносно нескладними системами, мирилися з проблемою повного перебору варіантів. Але перехід до автоматизованих розрахунків і до аналізу складних систем з великим числом варіантів навантаження поставив задачу знаходження критерію, на підставі якого можна було б обмежити кількість даних поєднань навантажень, до числа $m<<2n$.

До розв’язання цієї задачі активно приступили в середині XX ст., і першими тут були радянські дослідники, які на відміну від своїх зарубіжних колег були вимушені використовувати більш скромні обчислювальні засоби.

Були розроблені методи, засновані на знаходженні екстремумів деякого чинника поведінки системи (найчастіше напруження у вказаному перетині) від дії багатьох навантажень. Цілеспрямований пошук таких екстремумів приводив до обмеженої (набагато менш $2n$) кількості даних поєднань, які і є найбільш небезпечними. Такий пошук відносно просто виконувався, коли аналізувались незалежні завантаження, для яких їх будь-яка комбінація була допустимою.

Але поєднання навантажень можуть бути визнані неприпустимими через неможливість або знехтувано малу вірогідність їх сумісної дії. По відношенню даного завантаження до інших завантажень можна виділити чотири типи логічних зв'язків:

- незалежні (наприклад, власна вага і корисне навантаження);
- взаємовиключні (наприклад, вітер зліва і вітер справа, або ж сейсмічна дія уздовж різних осей координат);
- супутні (наприклад, гальмівні, такі, що вимагають обов'язкової присутності вертикальних навантажень кранів);
- що одночасно діють (наприклад, вітровий натиск і відсмоктування, задані в різних завантаженнях).

Способи опису логічних взаємозв'язків між завантаженнями можуть бути різними, один з найбільш наочних для аналізу був запропонований в роботі [Артеменко, Гордеев, 1967] і пов'язаний з використанням спеціально побудованого орієнтованого графа. Пошук невигідного навантаження у такий спосіб був зведений до відомої задачі про відшукання мінімального шляху на графі.

Зусилля, що діють в перерізі елементу, можна представити у вигляді векторів в просторі внутрішніх силових чинників або у вигляді точок, що є вершинами цих векторів, якщо помістити їх початок в нульову точку.

Відомо, що будь-яка опукла вниз критеріальна функція, визначена на опуклому многограннику, досягає свого максимуму в одній з вершин цього багатогранника.

Якщо в якості багатогранника узяти опуклу оболонку *M* скінченної множини точок X_i (на рис. 18.11 вона вказана пунктиром), то, незалежно від виду опуклого критерію, точка, де цей критерій досягає максимуму, знаходиться серед вершин ***M*.** Кількість таких вершин набагато менша, ніж загальне число точок X_i, і для відшукання розв'язку можна влаштувати перебір вказаних вершин.

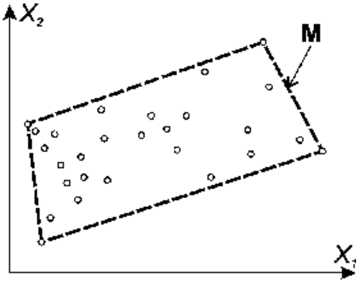


Рис. 18.11. Множина точок і її опукла оболонка

Пошук розв'язку шляхом перегляду вершин опуклої оболонки був запропонований в роботі [Гордеев, Артеменко, Минькович, 1989]. Пізніше в роботі [Лебедев, Трубников, 2010] був вказаний прийом прискорення пошуку вершин *M*.

Більшість досліджень була пов'язана з розрахунком конструкцій в лінійній постановці з використанням властивості суперпозиції, притаманної таким системам. При цьому активно використовувався принцип крайніх значень тимчасового завантаження, а саме якщо якесь завантаження виявляється невигідним, то його включають в комбінацію в повному об'ємі, інакше (розвантажувальна дія) таке завантаження ігнорують. Було виявлено, що для нелінійних систем (зокрема, для конструкцій з однобічними в'язями) невигідним може виявитись неповне навантаження, коли змінне завантаження приймає деяке проміжне значення [Перельмутер, 1969].

Взагалі, для нелінійних систем проблема пошуку невигідного навантаження залишається невирішеною, тут окрім повного перебору поки нічого не вдалося запропонувати. Спроба вирішити задачу на основі використання методів оптимального управління [Перельмутер, 1970] не привела до практичних результатів.

18.7. Нетрадиційні задачі оптимізації

Традиційний підхід до оптимізації конструкцій передбачає пошук найбільш раціональної структури і розподілу матеріалу в конструкції, що знаходиться під дією заданого навантаження або декількох навантажень із заданої множини, дискретного або безперервного. Більш широкий підхід розглядає задачі, в яких поряд з визначенням оптимальної конструктивної форми з'ясовується оптимальний розподіл зовнішніх силових впливів [Мацюлявичюс, 1968], [Литвинов, 1975], [Кашковская, Ляхович, 1998]. Варіювання розподілом і значеннями силових впливів на конструкцію в тих випадках, коли це можливо, дозволяє додатково поліпшити критерій якості без зайвої витрати матеріалу. Варіювання зовнішніми впливами можливо, наприклад, при проектуванні несучих конструкцій складських і заводських приміщень, на яких розміщується важкий вантаж і обладнання, а також при проектуванні суднових конструкцій, виробничих кранів тощо.

Ще однією особливістю традиційного підходу є та обставина, що основні параметри, які визначають призначення і спосіб використання об'єкта, вважаються заданими «згори» і, як правило, не підлягають ревізії. Вважається, наприклад, що потрібно створити проект якоїсь будівлі, де протікає певний технологічний процес, а питання про те, чи можна такий процес організувати під відкритим небом і взагалі не будувати будинок, навіть не обговорюється. Разом з тим іноді корисно порушити цю традицію і розглянути ширшу постановку задачі оптимального проектування, коли одночасно розглядається задача оптимізації параметрів технологічного процесу і проектних рішень будівлі або споруди, де такий процес реалізується. Як один з небагатьох прикладів такого підходу можна вказати на роботу [Perelmuter, Yurchenko, 2013], де розглядалася задача оптимального проектування вітроенергетичної установки. У цій роботі до числа варійованих параметрів проектування були віднесені не тільки характеристики конструктивного рішення вежі (геометрія, товщина оболонки), а й основні робочі характеристики вітроагрегату (його проектна потужність, висота установки і діаметр вітроколеса).

Коло розв'язуваних задач розширюється за рахунок розгляду все більш різноманітних умов роботи конструкції. Так, наприклад, досить велика увага почала приділятися проблемі оптимального проектування елементів силових конструкцій, умови експлуатації яких пов'язані з впливом агресивних робочих середовищ [Овчинников, Почтман, 1995]. Великою різноманітністю відрізняються динамічні задачі, де шукаються оптимальні рішення по віброзахисту, сейсмоізоляції, демпфіруванню коливань, оптимізуються параметри гасителів коливань тощо (див., наприклад, [Мижидон, 1996], [Гордеев, Долгая, Уздин, 1997]).

Але розв’язуються не тільки нові задачі. Більш строгому аналізу піддаються задачі, розв’язані раніше, і, крім того, ревізуються прийоми і підходи, які були знайдені раніше і стали в деякому роді «священними». Так, наприклад, в роботі

[Перельмутер, 2011] було виконано дослідження відомої концепції, яка вказує на економічну доцільність безперервного зростання одиничної потужності промислових об'єктів (для споруд – принцип концентрації матеріалу в основних конструкціях). Виявилося, що якщо враховувати обмеження, які визначаються умовами безпеки, то згадана концепція має межу застосовності, що є принципово важливим.

Література

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек - М.: Наука, 1978 - 288 с.
2. *Александров А.М.* Расчет пологих оболочек вращения методом прямых. // Строительная механика и расчет сооружений, №1, 1968, с. 11-14.
3. *Александров А.В., Лещеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А.* Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭЦВМ. - М.: Стройиздат, 1976 - ч.1, 248 е., ч. 2, 238 с.
4. *Александров А.В.* Метод перемещений для расчета плитно-балочных конструкций // Труды МИИТ, 1963, вып. 174.
5. *Александров А.В., Шапошников Н.Н.* Об использовании дискретной модели при расчете пластинок с применением цифровых автоматических машин // Труды МИИТ, вып.194 - М.: МИИТ, 1966
6. *Александров А.Я.* Об одном приближенном методе решения плоских контактных задач теории упругости. - Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта, 1955, вып. 11, с. 5-28.
7. *Александров А.Я.* Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений. - Труды Новосибирского института инженеров железно- железнодорожного транспорта, 1972, вып. 137, с. 5-10; см. также: Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2, с. 291-294.
8. *Александров А.Я.* Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений. - В кн.: Успехи механики деформируемых сред. - М.: Наука, 1975, с. 3-24.
9. *Александров В.Т.* Об одном методе поиска опасной комбинации нагрузок для элементов многократно нагруженных конструкций // Вычислительная и организационная техника в строительном проектировании. Серия: Автоматизация строительного проектирования. Вып II-5 - М.: Гипротис, 1968
10. *Алексидзе М.А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – М.: Наука, 1978.
11. *Аржаных И.С.* Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости Ташкент : Изд-во Акад. наук Узбек. ССР 1954
12. *Арман Ж.-Л.П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. - М.: Мир, 1977. - 142 с.
13. *Артеменко В.В., Гордеев В.Н.* Программа вычисления расчетных сочетаний усилий при сложной логической взаимосвязи между нагрузками // Вычислительная и организационная техника в строительном проектировании, 1967, № 2.- С. 10–14.
14. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел - К.: НИИ строительной механики, 1993. - 376 с.
15. *Баженов В.А., Цихановський В.К., Кислоокий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м΄яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. – 386 с.
16. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечых элементов в задачах нелинейної механики сплошной среды // Прикладная механика. – К.: Ин-т механіки НАН України, 2002. – Т. 38(48), №6. - С. 24-63.

17. *Баженов В.А., Гуляр А.И.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика. – К.: Ин-т механіки НАН України, 2003. – №4.
18. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Ворона Ю.В.* Методика чисельного дослідження нестаціонарних коливань пружних об'єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. 2004. №75. – С. 3-12.
19. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. - К.: Віпол, 2010. - 316 с.
20. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах динаміки просторових тіл. - Київ, 2012. - 248 с.
21. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика. – К.: Ин-т механіки НАН України, 2009. – №9. – С.3-40.
22. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл. - К.: Каравела, 2014. – 236 с.
23. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І.* Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування неоднорідних просторових тіл. – К.: Каравела, 2017а. - 308 с.
24. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкриль О.О.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування тіл з тріщинами. – К.: Каравела, 2017б. - 206 с.
25. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов - М.: Физматлит, 2008 - 352 с.
26. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. - 256 с.
27. *Баничук Н.В., Бирюк В.И., Епураш Д.М.* К задаче оптимизации конструктивно-силовых схем при использовании анизотропной модели // Ученые записки, Том XV, 1984 № 2 - С. 134-138.
28. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. -303 с.
29. *Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988 - 224 с.
30. *Белзецкий С.И.* Обобщение задачи Виларсо, поставленной им в 12 томе мемуаров французской академии наук // Известия собрания инженеров путей сообщения, т.17, №1-2, 1907.
31. *Белзецкий С.И.* Упругая линейная арка равного сопротивления для давлений, производимых на внешнюю поверхность арки сыпучим массивом.- С.-Петербург: 1904
32. *Белоносов С.М.* Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей Новосибирск : Издательство Сибирского отделения АН СССР, 1962. - 231 с.
33. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.-М.: Наука, 1985.
34. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984.
35. *Богуславский Н.Б.* Таблицы, веса железнодорожных мостов под нагрузку // Журнал министерства путей сообщения, 1907, №8.
36. *Бондаренко Б.А.* О приближенном решении трехмерных задач статики теории упругости // Труды Института математики АН УзССР, 1962. – вып. 26.

37. *Бородачев Н.М.* Об одном классе решений тройных интегральных уравнений. Журнал «Прикладная математика и механика», том 40, вып. 4, 1976.
38. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. – 524 с.
39. *Бубнов И.Г.* Отзыв о сочинениях профессора Тимошенко «Об устойчивости упругих систем»// Сб. Института инженеров путей сообщения, 1913, Вып. 81 - С. 33-36.
40. *Бубнов И.Г.* Строительная механика корабля, Часть 1, СПб: 1912 ; Часть 2, СПб: 1914.
41. *Вайнберг Д.В., Сахаров А.С., Киричевский В.В.* Вывод матрицы жёсткостных характеристик дискретного элемента произвольной формы // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1971. – Вып. 14. – С. 37–44.
42. *Вайнберг Д.В., Ворошко П.П., Синявский А.Л.* Численное решение пространственной задачи теории упругости // Расчет пространственных конструкций. Выпуск XII - М.: Стройиздат, 1969 - С. 4-26.
43. *Вайнберг Д.В., Геращенко В.М., Ройтфарб И.З., Синявский А.Л.* Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом // Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 1 - Киев: Будівельник, 1965 - С. 23-33.
44. *Вайнберг Д.В., Сінявський О.Л.* Застосування методу потенціалу до численного аналізу деформації циліндричних оболонок // ДАН УРСР, 1960, т. 7.
45. *Вайнберг Д.В., Синявский А.Л.* Приближенный расчет оболочек с вырезами методами теории потенциала // Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961
46. *Варвак П.М.* Развитие и приложением метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной т еории упругости в конечных разностях - Киев: Изд-во АН УССР, 1949 (ч. 1), 1952 (ч. 2).
47. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
48. *Верюжский Ю.В.* Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. – Киев: Вища школа, 1978.
49. *Верюжский Ю.В.* Применение метода потенциала для решения задач теории упругости. - Киев, изд. Киевского инж.-строит, института, 1975.
50. *Верюжский Ю.В., Ройтфарб И.З., Синявский А.Л.* Свойства контурных интегралов в задачах изгиба пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений, 1969. – вып. 8.
51. *Винник А.И.* Исследование напряженного состояния массивных тел на основе метода потенциала // Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978. – вып. 32.
52. *Винник А.И., Дехтярюк Е.С., Пятигорская Е.И., Ройтфарб И.З.* Вариационный метод решения пространственных краевых задач теории упругости на основе интегральных представлений // Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978. – вып. 33.
53. *Винник А.И.* Пространственное напряженное состояние плит со смешанными граничными условиями // Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978. – вып. 33.
54. *Винник А.И., Дехтярюк Е.С., Пятигорская Е.И., Ройтфарб И.З.* Численная реализация вариационного подхода к решению задач теории упругости на основе метода потенциала // Статика сооружений. – Киев: КИСИ,1978.
55. *Винник А.И.* Разработка и реализация численной методики расчета трехосного напряженного состояния основе потенциалов теории упругости: дис. ... канд.техн. наук, Киевский инженерно-строительный институт, 1981.
56. *Виноградов А.И.* Исследование вопросов конструирования перекрытий по заданным напряжениям. Автореферат дисс. … д-ра техн. наук — М.: МИИТ, 1948.

57. *Виноградов А.И.* О статической неопределимости стержневых систем наименьшего объема // Исследования по теории сооружений. Вып. 6 — М.: Госстройиздат, 1954 — С. 381-387.
58. *Виноградов А.И.* О сходимости прочностного перерасчета в задачах оптимизации // Строительная механика и расчет сооружений, 1971, №3 — С. 11-13.
59. *Виноградов А.И.* Об учете собственного веса в стержневых системах с заданными напряжениями // Исследования по теории сооружений, Вып 8 — М.: Госстройиздат, 1959 — С. 523-534.
60. *Власов В.З.* Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность, 1932, № 11. – С. 33–37; № 12. – С. 21–26.
61. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949 (ч. V, гл. XIV,§ 30).
62. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании - М.: Стройиздат, 1960 - 490 с.
63. *Власов В.В.* Применение метода начальных функций к расчету толстых плит. // Сб. «Исследования по теории сооружений», 1961, Вып. 10, с. 189-207.
64. *Вовкушевский А.В.* О вычислении напряжений при решении задач теории упругости методом конечных элементов // Известия ВНИИГ.- Т. 133.- Л.: Энергия, 1979.- С. 18-22.
65. *Вовкушевский А.В.* О решении уравнений метода конечних элементов в задачах теории упругости // Известия ВНИИГ им. Веленеева, т. 110, 1976.
66. *Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов.- М.: Энергия, 1981.
67. *Воробьев Н.Н.* Приложение теории игр в технических науках // Proceedinf of IV International Kongress IKM. Band I - Weimar: 1967 - P. 411-415.
68. *Ворович И.И., Зипалова В.Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикл. математика и механика, 1965. Т. 29. Вып. 5. - С. 894-901.
69. *Галеркин Б.Г.* Стержни и пластины. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин // Вестник инженеров, 1915, №19 - С. 897-908.
70. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
71. *Гвоздев А.А.* Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем // Проект и стандарт, 1934/1, № 8 - С.10-16.
72. *Гвоздев А.А.* О пересмотре способов расчёта железобетонных конструкций и первых его результатах. - М.-Л.: Госстройиздат, 1934/2 - 49 с.
73. *Гвоздев А.А.* Определение величины разрушающих нагрузок для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации // Труды конференции по пластическим деформациям - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1938 - С. 19-53.
74. *Гвоздев А.А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия - М.: Госстройиздат, 1949.
75. *Марков А.А.* О вариационных принципах в теории пластичности // Прикладная математика и механика, 1947, т. XII, вып. 3 - С. 339-346.
76. *Глимбовский А.В., Кременец Е.И.* Исследование концентрации напряжений в опорном узле железобетонной фермы ФБГ-12-13 с помощью пакета прикладных программ «ПОЛЕ» // Труды семинара «Качество и надежность строительных материалов и конструкций в сейсмическом строительстве». Тбилиси: Мецниереба, 1986.
77. *Глимбовский А.В., Кременец Е.И., Ройтфарб И.З.* Численная реализация непрямого метода граничных элементов для решения краевых задач теории упругости // Сопротивление материалов и теория сооружений, 1985. – вып. 47.

78. *Гололобов В.И., Ильин Л.А.* Определение толщины равнонапряженных упругих оболочек вращения // Прикл. механика. 1970, Том 6, вып. 7 - С. 58 -63.
79. *Гольдштейн Ю.Б., Соломещ М.А.* Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1980. — 316 с.
80. *Гольдштейн Р.В., Клейн И.С., Эскин Г.И.* Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости // Институт проблем математики АН СССР, Препринт, 1973. – № 33.
81. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М., Зазовский А.Ф.* Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом // Численные методы механики сплошной среды, 1976. – т.7. – № 5.
82. *Гольдштейн Р.В., Савова Л.Н.* Об определении раскрытия и коэффициента интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, № 2, с. 69-78.
83. *Горгидзе А.Я., Рухадзе А.К.* Об одном численном решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости. - Сообщения Груз, филиала АН СССР, 1940, т. 1, № 4, с. 255-258.
84. *Гордеев В.Н.* Исследование множества однотипных конструкций с параметрами, близкими к оптимальным // Реф. сб. Серия VII, "Проектирование металлических конструкций", вып. 8(55). - М.: ЦНИПИАСС, 1974. — С. 12-15.
85. *Гордеев В.Н., Артеменко В.В., Минькович Е.И.* Выбор неблагоприятных сочетаний нагрузок как решение задачи многокритериальной оптимизации // Численные методы расчета и оптимизации строительных конструкций - М.: ЦНИИСК им.Кучеренко, 1989.- С. 26–32.
86. *Гордеев Ю.В., Долгая А.А., Уздин А.М.* Оптимизация параметров сейсмоизолирующих фундаментов с учетом многозначности решений уравнений сейсмических колебаний сейсмоизолированных сооружений // Экспресс-Информация "Сейсмостойкое строительство", Вып.4, 1997 - С. 44-47.
87. *Городецкий А.С., Гильман Г.Б.* О стержневых расчетных схемах тонкостенных железобетонных конструкций // Строительство и архитектура, 1964, №10
88. *Григолюк Э.И.* Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие - М.: НИИ механики МГУ, 1996. - 58 с.
89. *Гринев В.Б., Филиппов А.П.* Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты // Прикладная механика, 1971, Том 7, №10
90. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механическх систем, - Львів: Вища школа, 1982 -255 с.
91. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ - К.: Вища школа, 1983
92. *Гуревич Я.И.* К вопросу о рациональном законе изменения сечений стержневых статически неопределимых систем Труды Хабаровского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 7 - М.: Трансжелдороиздат, 1954.
93. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР, 1953, т. 88, №4 - С. 601-602.
94. *Длугач М.И.* Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости - Киев: Наукова думка, 1964.
95. *Дольберг М.Д.* Об одном обобщении задачи Бубнова // Украинский математический журнал, 1951, Том III, № 4. – С. 433–448.
96. *Дятловицкий Л.И.* Напряжения в гравитационных плотинах на нескальных основаниях - Киев: Изд-во АН УССР, 1959.

97. *Евзеров И.Д.* Сходимость МКЭ в случае не принадлежащих энергетическому пространству базисных функций // Вычисления с разреженными матрицами. - Новосибирск: ВЦСО АН СССР, 1981. -С. 54-61.
98. *Зиновьев Б.М.* Один приближенный метод расчета тел с разрезами. - Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта, 1972, вып. 137, с. 105-125.
99. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики - М.: Изд-во АСВ, 2004. - 200 с.
100. *Золотов А.Б., Белый М.В., Булгаков В.Е.* Полуитерационный метод решения пространственных краевых задач расчета сооружений. // Строительная механика и расчет сооружений, 1985, №6 - С. 38-40.
101. *Израэлит А.Б.* О гарантии положительных решений при расчете статически неопределимых балок и рам методом заданных напряжений // Труды Всесоюзного заочного лесотехнического института, №2 - М.: 1956.
102. *Исаев А.С.* О применении игровых подходов в прочностных задачах // Проблемы надежности в строительной механике - Вильнюс: Вайздас, 1968 - С. 30-34.
103. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
104. *Канторович Л.В.* Об одном прямом методе решения задачи о минимуме двойного интеграла // Известия АН СССР. Отделение математики и естественных наук, 1933, №5 - С. 647-652.
105. *Канторович Л.В.* Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. // ДАН СССР, 1934.
106. *Кацикаделис Дж.Т.* Граничные элементы: Теория и приложения. – М.: АСВ, 2007. – 348 с.
107. *Кашковская Я.В. (Макжанова), Ляхович Л.С.* Оптимальное загружение балочных систем // Известия вузов. Строительство. 1998, № 8 - С. 17-22.
108. *Кефели А.И.* О теоретических весах сооружений // Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. Вып. 96 — Л.: 1927 - С. 247-266.
109. *Киселев В.А.* Рациональные формы арок и подвесных систем. М.: Госстройиздат, 1953. - 353 с.
110. *Ковнеристов Г.Б.* Интегральные уравнения контактной задачи теории упругости для заглубленных штампов // Сборник научных трудов Киев. инж.-строит. ин-та, 1962 – вып. 20.
111. *Комаров А.А.* Основы проектирования силовых конструкций. - Куйбышев: Куйбышевское книжное изд-во, 1965. - 88с.
112. *Комаров А.А.* Силовое конструирование // Труды Куйбышевского авиационного института. Вып.1, Куйбышев: 1952 - С. 36 - 48.
113. *Комаров В.А.* Проектирование силовых схем авиационных конструкций // Актуальные проблемы авиационной науки и техники - М.: Машиностроение, 1984. - С. 114-129.
114. *Копейкин Ю. Д.* Прямое решение краевых задач теории упругости для тел вращения и плоских тел при использовании метода потенциала. - Проектирование металлических конструкций ЦИНИС Госстроя СССР, 1970, вып. 7В7), с. 62-70.
115. *Копейкин Ю. Д., Садовская Р. А., Алеутдинов М. И.* Расчет упругих элементов конструкций по методу бигармонических потенциалов. - Проектирование металлических конструкций ЦИНИС Госстроя СССР, 1971, вып. 12(2), с. 5-16.
116. *Коренев Б.Г.* К вопросу о применении способа компенсирующих нагрузок // ПММ. – 1942. – Т. 6. – С.91-94.

117. *Коренев Б.Г.* Приложение функций Грина к расчёту конструкций на упругом основании методом компенсирующих нагрузок. // Труды Днепропетровского. инженерно-строительного института. - Днепропетровск, 1936, вып.4.
118. *Коренев Б.Г.* Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам равновесия, колебаний и устойчивости плит и мембран // Прикладная математика и механика, 1940, т.4, вып. 5-6 С. 61-72.
119. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. - Л.: Изд-во Ленинградского Университета, 1977 - 205с.
120. *Корнеев В.Г.* Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости // Известия ВНИИГ.-Т. 83.-Л., 1967.-С. 286-307.
121. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
122. *Купрадзе В.Д.* (ред.) Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976.
123. *Лебедев В.Л., Трубников С.А.* Алгоритмы определения опасных сочетаний усилий по СНиП и EUROCODE // International Journal for Computational Civil Structural Enginrreing, Vol. 6, Issue 1&2, 2010 - P. 153-155.
124. *Левина Ц.О., Михлин С.Г.* К вопросу о расчете напряжений в междукамерных целиках. - Труды Сейсмологического института АН СССР, 1940, № 94, 35 с.
125. *Линьков А.М.* Дополнение. О становлении метода граничных элементов / А.М. Линьков. В кн.: Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. - 276 с.
126. *Линьков А.М.* Численное решение задачи об определении напряжений в окрестности выработки в пласте. - В сб.: Исследования по упругости и пластичности, 1968, вып. 7, с. 107-ПО.
127. *Линьков А.М.* Плоские задачи о статическом нагружении кусочно-однородной линейно упругой среды. - Прикладная математика и механика, 1983, т. 47, вып. 4, с. 644-651.
128. *Литвинов В.Г.* Некоторые обратные задачи теории упругости, связанные с оптимальным нагружением// Прикладная механика, 1975, Том XI, Вып.З - С. 39-49.
129. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, УМЖ. 5, 123-151.
130. *Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.* Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014, Vol. 10, No 2.- P. 14-23.
131. *Ляхович Л.С., Плахотин А.Н.* Критерий оптимальности связей в задачах устойчивости и собственных колебаний упругих систем // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1986, N 7- С. 26-30.
132. *Ляхович Л.С., Те А.Б., Фишер В.Ф.* О рациональной расстановке связей и распределении материала в задаче о собственных колебаниях системы с конечным числом степеней свободы // Исследования по строительной механике. - Томск: Изд. ТГУ, 1978.- С. 31-34.
133. *Малков В.П., Строгин Р.Г.* Оптимизация конструкций по весу из условий прочности // Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1971, Вып. 4 - С. 138-149.
134. *Масленников А.М.* Приближенное решение плоской задачи теории упругости методом перемещений. // ЭЦВМ в строительной механике - Л.: Судпромгиз, 1966. - С. 183-195.
135. *Мацюлявичюс Д.А.* Задача синтеза оптимальной конфигурации шарнирно-стержневой конструкции при постоянной нагрузке с учетом нагрузки от собственного веса //Литовский механический сборник, 1969. №2(50) - С. 5-23

136. *Мацюлявичюс Д.А.* К вопросу о синтезе конфигурации упругой шарнирно-стержневой конструкции, воспринимающей максимальную нагрузку при ограниченном весе и сортаменте материала // Литовский механический сборник. 1968, № 2(3). - С. 16-21.
137. *Мацюлявичюс Д.А.* К вопросу синтеза конфигурации стержневых статически определимых конструкций минимального веса // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, №1
138. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
139. *Мижидон А.Д.* Оптимизационные методы решения задач виброзащиты. – Улан-Удэ: БНЦ РАН, 1996. – 137 с.
140. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. – М.: Гостехиздат, 1952. - 216 с.
141. *Михлин С.Г.* Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.-Л.: Гостехиздат, 1947
142. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962
143. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике - М.: Наука, Физматгиз, 1970 - 512 с.
144. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968
145. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
146. *Мусхелишвили Н.И.* О численном решении задачи теории упругости. - Труды Тбилисского математического института, 1937, т. 1, с. 83-87 (на груз, яз., резюме на русском).
147. *Немировский Ю.В.* К теории строго безмоментных упругих и термоупругих оболочек // Механика твердого тела: Докл. польско-советского симпозиума, Новосибирск, 29-31 окт. 1974 г. Варшава: Гос. научн. изд-во, 1978. - С. 231-242.
148. *Немировский Ю.В., Старостин Г.И.* Безмоментные упругие оболочки нулевой гауссовой кривизны // Прикл. механика и техническая физика, 1975, № 6. - С. 103-115.
149. *Николаи Е.Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн // Известия С.-Петербургского политехнического института, Том VIII, вып. 1, 1907. - С.255-288.
150. *Николаи Л.Ф.* Определение опасного положения неизменно связанных грузов, движущихся по мостовой балке // Инженерные записки, 1877.
151. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970, 276 с.
152. *Нудельман Я.Л.* Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, – М. : Гостехиздат, 1949. – 175 с.
153. *Овчинников И.Г., Бочкарев А.В.* Оптимальные проекты гибких круглых пластин и их практическая реализуемость // Известия вузов. Строительство, 2003, №6 — С. 10-15.
154. *Овчинников И.Г., Почтман Ю.М.* Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация. - Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1995. - 192 с.
155. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. - Ереван: Издательство АН Армянской ССР, 1979 - 235 с.
156. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976, 464 с.
157. Пакет прикладных программ для расчета составных пространственных конструкций в двумерной постановке. Включено в ГосФАП №50870001258, 1987 / Верюжский Ю.В. Савицкий В.В., Вусатюк А.И., Петренко А.Я., Рождественская Т.С., Юринский В.С.

158. Пакет прикладных программ для расчета трехмерных массивных объектов. Включено в ГосФАП №50870001451, 1988 / Верюжский Ю.В., Савицкий В.В., Вусатюк А.И., Петренко А.Я., Рождественская Т.С., Юринский В.С.
159. *Пановко Я.Г.* К вопросу о выборе подъема сводов. // Сборник трудов МАДИ, Вып. 2, 1934 - С. 129 – 133.
160. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
161. *Патон Е.О.* Вес железных мостов для железных и линейных дорог - К.: Издательство Политехнического института, 1903 - 59 с.
162. *Пацкевич Э.Р.* Удельный момент сопротивления изгибу и его применение к расчету металлических балок - СПб.: Типография Эрлих, 1894 - 43 с.
163. *Перельмутер А.В.* Элементы теории систем с односторонними связями. - М.: ЦИНИСА Госстроя СССР, 1969. - 127 с.
164. *Перельмутер А.В.* Определение невыгодного нагружения для нелинейно-упругой системы // Строительная механика и расчет сооружений, 1970, № 5. - С. 39–42.
165. *Перельмутер А.В.* Концепция концентрации материала и требования безопасности // Теория и практика расчета зданиц, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы. Сб. трудов. -М.: МГСУ, 2011.- С. 286-291.
166. *Перельмутер А.В.* Очерки по истории металлических конструкций-М.: Издательство СКАД СОФТ, Издательский дом АСВ, 2015.- 256 с.
167. *Перлин П.И.* Численное решение сингулярных интегральных уравнений основных задач теории упругости. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 3, с. 109-111.
168. *Петров В.В.* К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Научные доклады высшей школы. Строительство, 1959Б №1 - С. 27-35.
169. *Петров В.В.* К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Научные доклады Высшей школы. Строительство, 1959, №1 - С. 27-35.
170. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек - Саратов: Изд-во сарат. ун-та. 1975. - 173 с.
171. *Петров Г.И.* Применение метода Галёркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // Прикладная математика и механика, 1940, Т. 4, Вып. 3 - С. 3-11.
172. *Петухов И.М., Линьков А.М., Сидоров В. , Фельдман И.А.* Теория защитных пластов. - М.: Недра, 1976.
173. *Проскуряков Л.Д.* Исследования значений момента внешних сил о т подвижных грузов в прямых балках СПб, 1887.
174. *Пузыревский Н.П.* Шлюзовые ворота и пропуск судов через них М.: Стройиздат, 1924
175. *Рабинович И.М.* Применение теории конечных разностей к исследованию неразрезных балок -М.: Типо-Литография МГСНХ, 1921 - 96 с.
176. *Рабинович И.М.* Некоторые способы исследования диаграмм, получаемых при испытаниях мостов // Труды Бюро мостовых исследований и мостовой подсекции. Сборник №3 «Вопросы исследования металлических мостов» - Петроград: Научно-издательский отдел НКПС, 1923.
177. *Рабинович И.М.* К теории статически неопределимых ферм. Законы распределения усилий; метод заданных напряжений; начальные усилия в статически неопределимых фермах - М.: Трансжелдориздат, 1933 - 136 с.
178. *Радциг Ю.А.* Об по заданным напряжениям. определении наименьшего объема статически неопределимых ферм // Труды Казанского авиационного института, Том 17, Вып. 1 — Казань: 1946.
179. Расчет строительных конструкций с применением электронных машин - М.: Стройиздат, 1967- 400 с.

180. *Резников Р.А.* Решение задач строительной механики на ЭЦМ. - М.: Стройиздат, 1971. - 312 с.
181. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985.
182. *Ржаницын А.Р.* К вопросу о теоретическом весе стрежневых конструкций // Исследования по теории сооружуней. Вып. IV — М.: Стройиздат, 1949 — С. 252-265.
183. *Ржаницын А.Р.* Расчет пластинок по предельному состоянию на действие сосредоточенной силы // Исследования по теории сооружений. Вып. IV - М.: Стройиздат, 1949 - С. 79-95.
184. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам - М.: Стройиздат, 1977 - 128 с.
185. *Розин Л.А.* Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов - Л.: Энергия, 1971 -214 с.
186. *Розин Л.А.* Развитие метода Бубнова-Галеркина в задачах строительной механики // Строительная механика и расчет сооружений, 1982, №6 - С. 10–15.
187. *Розов И.* Опыт теории арки равного сопротивления // Инженер, 1904, №10-11, - С. 131 .
188. *Руднев В.И.* О рациональной форме сплошной упругой арки в связи с современными методами возведения // Туды МИИТ. Вып. 15 - М.: Транспечать, 1930.
189. *Сахаров А.С.* Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смешений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К. : Будівельник, 1974а. – Вып. 23. – С. 61–70.
190. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1974б. – Вып. 24. – С. 147–156.
191. *Семиколенов Г.С.* Теория уравновешенных балок // Журнал Министерства путей сообщения, 1871.
192. *Сергеев Н.Д.* Расчет статически неопределимых систем при их многоэтапной последовательной модификации // Строительная механика и расчет сооружений, 1975, №6 С.11-16.
193. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы – М.: Изд-во АСВ, 2005 – 736 с.
194. *Сливкер В.И.* Метод Ритца в задачах теории упругости, основанный на последовательной минимизации двух функционалов // Изв. АН СССР. МТТ, 1982, №2, - С. 57–65.
195. *Слободянский М.Г.* Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными его применение к задачам теории упругости // Прикладная математика и механика, 1939, Том 3, вып. 1. - С. 75-82.
196. *Слюсарчук Ф.И.* О регулярном расчете статически неопределимых ферм методом заданных напряжений // Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 8 - М.: Тансжелдориздат, 1952
197. *Смирнов А.Ф.* Стержни и арки минимального веса при продольном изгибе // Труды МИИТ, Вып 74 - М.: 1950.
198. *Смирнов А.Ф.* Устойчивость и колебания сооружений – М.: Трансжелдориздат, 1958.
199. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. - 112 с.
200. *Стрелец-Стрелецкий Е.Б.* Расчетные сочетания напряжений для конструкцій типа балки-стенки и плиты // Строительная механика и расчет сооружений, 1986, №3 - С.36-38.

201. *Стрелецкий Н.С.* Законы изменения веса металлических мостов // Избранные труды. - М.: Стройиздат, 1968. - С.335-367 [Впервые опубликовано в Сборнике трудов бюро инженерных исследований НТК НКПС. 1926 №7].
202. *Стрелецкий Н.С.* Законы изменения веса металлических мостов // Труды научно-технического комитета НКПС. Сб. 8 - М.: Транспечать, 1926 - 100 с.
203. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов. - М.: ГИТТЛ, 1957 - 536 с.
204. *Тимошенко С.П.* К вопросу об устойчивости упругих систем // Известия Киевского политехнического института, Год 10, книга 2 -Киев: Тип. Кулиженко, 1910 - С. 147-167.
205. *Феодосьев В.И.* Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня // Прикладная механика и математика, 1963. № 2 - С. 34-39.
206. *Фейнберг С.М.* Принцип предельной напряженности // Прикладная математика и механика, 1948, т. 12, вып. 1 - С. 63-68.
207. *Фиалко С.Ю.* Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах - М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2009 - 160 с.
208. *Филин А.П., Филалаева Е.С.* Об отыскании оптимальной оси трехшарнирной системы при работе ее на нескольких вариантах нагрузки. Казань, Изд. КГУ, 1973 - С. 210-219.
209. *Филин А.П.* Вопросы рационального проектирования мостовых арок // Труды Хабаровского института инженеров железнодорожного транспорта. Вып. 3 - М.: Трансжелдороиздат, 1953.
210. *Форсберг К.* Оценка методов конечных разностей и конечных элементов в применении к расчету произвольных оболочек // Расчет упругих конструкций с применением ЭВМ. Том 2 - Ленинград: Судостроение, 1974 - С. 296-312.
211. *Хог Э, Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. – М.: Мир, 1983. – 478 с.
212. *Хуберян К.М.* Расчет крестовых ферм на подвижную нагрузку по методу напряжений // Исследования по теории сооружений. Вып V — М.: Госстройиздат, 1951 — С. 394-403.
213. *Хуберян К.М.* К расчету статически неопределимых ферм // Труды Тбилисского научно-исследовательского института сооружений. Вып. 32, 1938.
214. *Хуберян К.М.* Метод напряжений // Исследования по теории сооружений. Вып IV — М.: Стройиздат, 1949 — С. 164-176.
215. *Ченцов Н.Г.* Стойки наименьшего веса // Труды ЦАГИ, Том 265 - М.: 1936.
216. *Черевацкий С.Б.* О произвольных нитевых оболочках вращения, нагруженных давлением // Прочность и динамика авиационных двигателей: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1966. - Вып. 4. - С. 20 - 30.
217. *Чирас А.А., Баркаускас А.Э., Каркаускас Р.П.* Теория оптимизации упругопластических систем Л.: 1974 - 279 с.
218. *Чирас А.А.* Двойственность в задачах строительной механики, теории упругости и пластичности // Литовский механический сборник, 1968, №2(3) - С. 34-54; 1969 №1(4) - С. 9-25.
219. *Чирас А.А.* Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем - Вильнюс: Мокслас, 1982 - 112 с.
220. *Чирас А.А.* Математические модели расчета упругопластических изгибаемых систем // Строительная механика и конструкции. Доклады XIV научно-технической конференции Каунасского политехнического института - Вильнюс: Минтис.
221. *Чирас А.А., Боркаускас А.Э., Каркаускас Р.П.* Теория и методы оптимизации упругопластических систем - Л.: Стройиздат, 1974 - 280 с.

222. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. - М.: Эдиториал УРСС, 1999. -222 с.
223. *Шапошников Н.Н.* Строительная механика и ее роль в современных расчетах зданий и сооружений. // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений: сб. статей. Вып. 1 (XXVI), 2009 - С. 216-222.
224. *Шерман Д.И* "О приведении к интегральному уравнению плоской задачи теории потенциала", Изв. АН СССР. Сер. матем., 9:5 (1945), 357–362.
225. *Шерман Д.И.* "К общей задаче теории потенциала", Изв. АН СССР. Сер. матем., 10:2 (1946),121–134.
226. *Шимановский В.Н., Гордеев В.Н., Гринберг М.Л.* Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий. - Киев: Будивэльнык, 1987.— 224 с.
227. *Ясинский Ф.С.* О проектировании нормальных двутавровых сечений // Русский нормальный метрический сортамент фасонного железа - СПб.: 1900 - С. 13-16.
228. *Adini A., Clough R.* Analysis of plate bending by the finite element method, Rept. to National Sci. Foundation, 1960.
229. *Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E.* Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 372-381.
230. *Arantes Oliveira E.R.* Theoretical Foundations jn the Finite Element Method // Int. J. Solids Struct., 1968, Vol. 4, No. 10 - P. 929-952.
231. *Argyris J.* Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method // J. Royal Aero. Sci. Tech. 1965. Note 69. - P. 711 - 713.
232. *Argyris J.H.* Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt., Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. Reprint: Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and Structural Analysis - London: Butterworth Scientific publications, 1960 [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем - Л.: Судпромгиз, 1961. - С. 37-293.]
233. *Argyris J.H.* Energy Theorems and Structural Analysis. // Aircraft Engineering. Published in a series of articles in Okt., Nov. 1954, Vol. 26 and Feb., March, Apr., May 1955, Vol. 27. [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем - Л.: Судпромгиз, 1961. - С. 37-293.]
234. *Argyris, J.H.* ASKA-Automatic system for kinematic analysis // Nucl. Eng. Design, 1969, Vol. 10, P. 441–455.
235. *Asimont G.* Die Berechnung des Tragebalkens mit concentrirter Verkehrslast; // Zeitschrift des bayr. Architekten- und Ingenieurs Vereins, 1876.
236. *Aubin, J.P. Burchard H.G.* Some aspects of the method of the hypercircle applied to elliptic variational problems // SYNSPADE 1970 - New York: Academic Press, 1971.
237. *Babuska I.* Error Bounds for the Finite Element Method // Numerische Mathematik, 1971, Vol. 16, P. - 322-333.
238. *Babuska I., Aziz A.K.* Survey Lectures on the Mathematical Foundation of the Finite Element Method // The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations - New York: Academic Press, 1972 - P. 5-359.
239. *Babuska, I, Oden J.T., Lee J.K.* Mixed-Hybrid Finite Element Approximations of Second-Order Elliptic Boundary-Value Problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1977, Vol. 11 - P. 175-206.

240. *Babuska I., Zlamal M.* Nonconforming elements in the finite element method with penalty // SIAM J. Numer. And., 1973, Vol. 10 - P. 863-875.
241. *Baker J., Horne M.R., Heyman J.* The steel Skeleton, vol. II, Plastic behavior and design - London: Cambridge University Press, 1956.
242. *Banichuk N.V., Barthold F.J., Serra M.* Optimization of axisymmetric membrane shells against brittle fracture // Meccanica. 2005. Vol. 40. № 2. - P. 135-145.
243. *Bathe K.J., Wilson E.L., Peterson F.E.* SAP IV – A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems, EERC 73/11, Earthquake Engineering Research Center, June 1993.
244. *Bazeley G.P., Cheung Y.K. Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Triangular elements in plate bending: Conforming and non-conforming solution // Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech (Okt. 26-28, 1965) - Ohio: Wright - Petterson AFB, 1966 - P. 547-576.
245. *Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Triangular elements in bending-conforming and nonconforming solutions // Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80 Dayton, Ohio: Air Force Institute of Technology, 1966. - P. 547–576.
246. *Bazhenov V. A., SoloveiN.A.* Nonlinear deformation and buckling of elastic inhomogeneous shells under thermomechanical loads // International Applied Mechanics, 2009, Volume 45, Issue 9, pp 923–953.
247. *Becker A.A.* The Boundary Element Method in Engineering: A Complete Course, McGraw-Hill, New York, 1992.
248. *Bendsoe M.P., Kikuchi N.* Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988. Vol. 7. - P. 197-224.
249. *Ben-Haim Y., Elishakoff I.* Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics Amsterdam: Elsevier, 1990.
250. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Robust optimization: methodology and application // Mathematical Programming, 2002, B92 - P. 453-480.
251. *Betti E.* Theoria dell'Elasticita. Il Nuovo Ciemento, 1872.
252. *Bhatia K.G.* Rapid Iterative Reanalysis for Automated Design - NASA Technical Notes, 1971.
253. *Biernawski A., Grochowski B.* O ksztaltowaniu kratownie na minimum potencjalu // Rozprawy Inźynierskie, 1960, № 2.
254. *Bleich H.H.* Ober die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes // Bauingenieur, 1932, Vol. 13, № 19/20 - S. 261-267.
255. *Bleich F.* Melan E. Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik - Berlin: Springer, 1927 - 350 s. [Русский перевод: Блейх Ф., Мелан Е. Уравнения в конечных разностях статики сооружений - Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936. - 378 с.].
256. *Bogner F.R., Fox R.L., Schmit L.A.* A Cylindrical Shell Discrete Element // AIAA J., 1967, Vol. 4. - P. 745-750. [Русск. перевод: Богнер Ф., Фокс Р., Шмит Л. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов // Ракетная техника и космонавтика, 1967, №4].
257. Boundary integral equation methods: computational applications in applied mechanics. Ed. by T.A. Cruse, F.J. Rizzo. - New-York, 1975. [Имеется перевод: Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо.-М.: Мир, 1978.]

258. *Bramble J.H., Zlamal M.* Triangular Elements in the Finite Element Method // Mathematics of Computation, 1970, Vol. 24, No. 112 - P. 809-820.
259. *Brandt A., Ignaczak J.* Ksztaftowanie wytrzymafosc owe belki wsporaikowej // Rozprawy Inżynierskie, 1958, XCIV, №I.
260. *Brandt A., Kosmowski J., Wasiutynski Z.* O ksztatowanlu kratovvnic na minimum potencjau przez przesuwanie nicobziazonych wezôv aczacych trzy prety // Rozprawy Inżynierskie, 1957, № 2.
261. *Brebbia C.A., Walker C.* Boundary element techniques in engineering. - London: Butterworth, 1980. [Имеется перевод: Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. - М.: Мир, 1982.]
262. *Brezzi F.* On the Existence, Uniqueness, and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrange Multipliers // Revue Francaise d'Automhtique, Informatique et Rechkche Ooerationelle. 1974, 8-R2 - P. 129-151.
263. *Brezzi F., Douglas J., Fortin M., Marini L.D.* Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. RAIRO Mod`el. Math. Anal. Numer. 1987. Vol. 21. No. 4. P. 581-604.
264. *Brezzi F., Douglas J., Marini L.D.* Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems, Numer. Math, 1985. Vol. 47. - P. 217-235.
265. *Brezzi, F. Fortin M.* Sur la methode des elements finis hybridcs pour le probleme biharmonique // Numer. Math., 1975, Vol. 24 - P. 103-131.
266. *Brezzi, F.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. - New York: Springer-Verlag, 1991. - 362 p.
267. *Chan A.S.L.* The Design of Michell Optimum Structures // British Aeronautical Research Council R&M, № 3303, 1960.
268. *Chan H.S.* Optimum structural design and linear programming // The College of Aeronautics, Cranfield, CoA Rept. Aero, No 175, 1964.
269. *Charnes A., Greenberg H.J.* Plastic collapse and linear programming // Bulletin of the American Mathematical Society, 1951, Vol. 6, №57 - P. 480.
270. *Charnes A., Lemke C., Zienkewicz O.* Virtual work, linear programming and plastic limit analysis // Proceeding of the Royal Society A, 1959, Vol. 251, Issue 1264 - P. 110-116.
271. *Chen W., Tanaka M.* New Insights in Boundary-only and Domain-type RBF Methods // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000. – vol. 1. – P. 145-151.
272. *Cheung Y.K.* Finite Strip Analysis of Bridges -Spon E&FN, 1996- 347 p.
273. *Cheung Y.K.* Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs // J of Eng Mech, ASCE, 1968, Vol. 94, No. 6. — P. 1365-1378.
274. *Ciarlet P.G.* Conforming and nonconforming finite element methods for solving the plate problem // Conference on the Numerical Solution of Differential Equations - Berlin: Springer, 1974 - P. 21-31.
275. *Ciarlet P.G.* An O(h2) Method for a Non-Smooth Boundary-Value Problem // Aequationes mathematicae., 1968, Vol. 2 - P. 39-49.
276. *Ciarlet P.G., Raviart P.A.* General Lagrange and Hermite Interpolation in with Applications to the Finite Element Method // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1972, Vol. 46 - P. 177-199.
277. *Clausen T.* Über die Form achitektonischer Säulen // Bulletin physico-mathematique de l'Academie (St. Petersburg), Bd. 9, 1851 - S. 279-294.
278. *Clough R.W.* Early history of the finite element method from the view point of a pioneer // Int. J. Numer. Meth. Engng., 2004; Vol. 60. - P. 283-287

279. *Clough R.W.* The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis // Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburg, PA, 1960. - P. 345-378. [Русск. перевод: Клаф Р.У. Метод конечного элемента в решении плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин - М.: Стройиздат, 1967 - С. 142-170]
280. *Clough Ray W., Wilson Edward L.* Early finite element research at Berkelay // Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999.
281. *Clough R.W.* Stress analysis of a gravity dam by the finite element method // Proceedings of the Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal, 1962 (see also RILEM Bull. No. 19; June 1963).
282. *Collington E.* Thèorie elementairwe des pouters droiltes/ Ponts mètalliques. Ponts americans, combles. - Paris: 1865.
283. *Colton, D., Watzlawek W.* Complete families of solutions to the heat equation and generalized heat equation in n-dimensional real Euclidean spaces // Journal of Differential Equations, vol. 25, July 1977, p. 96-107.
284. *Connor J., Will D.* A mixed finite element shallow shell formulation // Matrix Meth. Str. Anal. Design, Univ. Alabama, 1971. - P. 105-137.
285. *Coulomb C.A.* Application des règles de maximis et minimis à quelques problems de statique, relatifs à l`architecture // Mèmoire des savanta ètrangers de l`Academie des Sciences de Paris, 1773 - 343-387.
286. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bulletin of the American Mathematical Society, 1943, Vol. 49. - P. 1–23.
287. *Courant R., Friedrichs K.O., Lewy H.,* 1928. Über die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik // Mathematische Annalen, Band 100 - S. 32–74.
288. *Crisfield, M.A.* Incremental/iterative solution procedures for non-linear structural analysis //Num. Meth. for Non-linear Problems. 1980. Vol. 1,.-P .261-290.
289. *Cruse T.A.* Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. - Int. J. Solids and Structures, 1969, 5, p. 1259-1274.
290. *Cruse T.A., Rizzo F.J.* A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. Part I. - J. Math. Anal. Applic, 1968, 22, p. 244-259.
291. *Csonka P.* Beitrag zur Berechnung waagerecht belasteter Stockwerkrahmen // Bautechnik/ 1962, No. 7.
292. *Culmann K.* Die graphische Statik.- Zurich: 1866.- 527 s.
293. *Demkowicz L., Oden J.T.* An adaptive characteristic Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated linear and nonlinear parabolic problems in two space variables // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, Vol. 55, Issue 1-2, - P. 63-87.
294. *Dirksen.* Hilfwerke fur das Entwerfen der Brucken mit eisernen Unterbau. 1905.
295. *Dobbs M.W., Nelson R.B.* Application of Optimality Criteria to Automated Structural Design // AAIA Journal, 1976, Vol. 14, N0 10 - P.1436-1443.
296. *Dorn W.S., Gomory R.E., Greenberg H.J.* Automatic design of optimal structures // Journal de mécanique,1964, Vol. 3, No 1 - P. 25-52.
297. *Drucker D.C.* Variational principles in the mathematical theory of plasticity // Technical Report №13 - Providence” Division of applied mathematics Brown University, 1956 - 30 p.
298. *Drucker D.C.* A definition of a stable inelastic material // ASME Journal of Applied Mechanics, 1959, Vol. 26 - P. 101–195.
299. *Drucker D.C, Prager W., Greenberg H.J.* Extended limit design theorems for continuous media // Quarterly of Applied Mathematics, 1951, Vol. 9 - P. 381-389. [Русский перевод:

Друкер Д., Прагер В., Гринберг Х., Расширенные теоремы о предельном состоянии для непрерывной среды // Механика (сб. переводов), 1953, №1 (17). - С. 98-107].

300. *Drucker D.C., Greenberg H.J., Prager W.* The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain // Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 - P. 371-378.
301. *Elishakoff I., Makoto Ohsaki*. Optimization and anti-optimization of structures Under uncertainty - London: Imperial College Press, 2010 - 402 p.
302. *Euler L.* De motu vibratorio tympanorum // Novi Comm. Acad/ Petrop., T. X, СПб, 1789.
303. *Falk S.R.* Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities // Mathtmatics of Computation, 1974, Vol. 28 - P. 963-971.
304. *Feng Kang*. A Difference Formulation Based on the Variational Principle // Applied Mathematics and Computational Mathematics, 1965, Vol. 2, No. 4 - P. 238-262. (на китайском).
305. *Fleury C.* Reconciliation of mathematical programming and optimality criteria approaches to structural optimization // Foundations of Structural Optimization, A Unified Approach: John Willey & Son, New York, 1982
306. *Forsythe G.E., Wasow W.R.* Finite Difference Methods for Partial Differencial Equations - New York: John Wiley, 1960. - 444 p. [Русский перевод: Вазов В.Р., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных - М.: ИЛ, 1963].
307. *Foulkes J.* Linear programming and structural design // Proceeding 2nd Symposium Bur. Of Stand US. Dept. of Commerce, Vol 1, 1955 - P. 27-29.
308. *Foulkes J.* Minimum Weight Design and Theory of Plastic Collapse // Quarterly of Applied Mathematics, 1953, Vol. 19, No 4 — P. 347-358.
309. *Foulkes J.* The minimum weight design in structural frames // Proceeding of Royal Society, 1954, A223, No 1155 — P. 482-484.
310. *Fox R.L.* Constraint surface normals for structural synthesis techniques // AIAA Journal, 1965, Vol. 3 - P. 1516-1517.
311. *Fox R.L., Kapoor M.P.* Rates of change of eigenvalues and eigenvectors // AIAA Journal, 1968, Vol. 6 - P. 2426-2429.
312. *Fox R.L., Miura H.* An approximate analysis technique for design calculations // AIAA Journal, 1971, Vol. 9 - P. 177-179.
313. *Fraeijs de Veubeke B., Sander G.* An equilibrium model for plate bending // International // J. Solids and Structures, 1968. Vol. 4. No. 4. - P. 447-468.
314. *Fraerijs de Veubeke*. Displacement and equilibrium models in the finite element method // Stress Analisys . -New York: Wiley. 1965. - P. 145-197.
315. *Fraeijs de Veubeke B.* A conforming finite element for plate bending // Int. J. Solids Struc., 1968, Vol. 4. - P. 95–108.
316. *Fredholm I.* Sur une Classe d'équations fonctionnelles. Acta Mathematica, Vol. 27 (1903), pp. 365–390.
317. *Galileo Galilei*. Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a duo nuove scienze attenenti alla mecanica e I movimenti locali - Leida: Appreffo gli Elseviri, 1638 [Русский перевод: Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934].
318. *Gallagher R.H.* Fully-stressed design // Optimum Structural Design. Theory and Applications — London: John Wiley and Sons,1973 - P. 19-32.
319. *Garstecki A., Ścigałło J.* Alternative method of finding load combinations for design reinforced concrete structures // Proceedings of the 7th International Conference “Modern Building Materials, Structures and Techniques” - Vilnius, 2001 (Full text on CD-ROM).

320. *Gavarini C.* I theoremi fundamental del calcolo a rotture e la dualista inprogrammazione lineare // Ingeneria Civile, 1966, Vol. 6, № 18 - P. 547-563.
321. *Gellatly B.A., Gallagher R.H.* Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design // Aeronaut. Quarterly, 1966, Vol. 14 P. - 332-342.
322. *George A., Liu J.* Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems- Englewood Cliffs: Prentice-Hall, NJ, 1981. - 320 p. [Русск. перевод: Джорж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений - М.: Мир, 1984 - 334 с].
323. *Gerber G.H.* Balkenträger mit freiliegenden Stützpunkten Bavarian patent, 1866
324. *Gerschgorin S.* Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1930, Vol. 10 - S. 373–382.
325. *Golberg M.A., Chen C.S., Bowman H., Power H.* Some comments on the use of Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Method // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 141-148.
326. *Green G.* An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, 1828, Nottingham.
327. *Greenberg H.J.* Complementary minimum principles for an elastic-plastic material // Quarterly of Applied Mathematics, 1949, Vol. 7, № 1 - P. 85-95.
328. *Gruver W.A.* Shafroth C. Gradient Projection and Reduced Gradient Algorithms Based on an Augmented Lagrangian // Proceedings of Operations Research Society of American Natural Convention, Piadeldia, March-Apriek, 1976.
329. *Grüning. M.* Die Tragfähigkeit statisch unbestimmten Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung. Berlin: Julius Springer, 1918.
330. *Grycz J.* O przeksztaceniach ustroju szterowezlowego przez wymiane pretow // Rozprawy Inźynierskie, 1960, № I.
331. *Hartmann F.* Introduction to Boundary Elements. Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
332. *Hill R.* On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point // Philosophical Magazine, Series 7, 1951, Vol. 42 - P. 868-892.
333. *Hodge P.G., Prager W.* A variational principle for plastic materials with strain-hardening, // Journal of Mathematics and Physics, 1948, Vol. 27, No.1.
334. *Haar A., von Karman Th.* Zur theorie der Spannungszustande in plastischen und sandartigen Medien // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1909 - S. 204-218 [Русский перевод: Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности - М.: ИЛ, 1948.]
335. *Heimann H.* Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke - Berlin: 1928 - 24 s.
336. *Heinzerling A.* Theorie und Berechnung der gestüssten and aufgehängten Charnierbrückenträger // Der Civiling, 1867, Band 13.
337. *Hemp W.S.* Theory of Structural Design. — Cranfield College of Aeronautics, 1958, COA Report, № 115.
338. *Heyman J.* Plastic Design of Beam and Plate Frames for Minimum Material Consumptions // Quarterly of Applihed Matematics, 1951, Vol. 8, No 4 - P. 373-381.
339. *Hencky H.* Stabilitatsprobleme der Elastizitatstheorie // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, Band 3, №4. - S. 292-299.
340. *Herrmann L.* A bending analysis for plates // Proc. Conf. Matrix. Meth. Str. Mech., Wright Patterson AFB, Ohio, 1965.
341. *Hilbert D.* Über das Dirichlet'sche Prinzip. Jahresber. Deutsch. Math. Verein, 1900.

342. *Hofmeister L., Felton L.* Prestressing in Structural Synthesis // AIAA Journal, 1970, Vol. 8, No 2.- P. 363-364.
343. *Hooke R.* Lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies - London: John & Martin Printer to the Royal Society, 1678.
344. *Hopkins H.G., Prager W.* Limits of Economy of Material in Plates // Journal of Applied Mechanics, 1955, Vol. 22, No 3 — P. 372-374.
345. *Hrennikoff A.* Solution of problems of elasticity by the framework method // Journal of applied mechanics, 1941, Vol. 8. No 4 - P. 169–175.
346. *Hurwitz A., Courant R.* Vorlesungen über die allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen - Berlin: Julius Springer, 1922 [Русский перевод: Гурвиц А., Курант Р. Теория аналитических и эллиптических функций - М.: Издательство: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1933 - 346 с].
347. *Irons B., Sohrab A.* Techniques of Finite Elements — Chichester: Ellis Horwood Limited, 1980 — 529 p.
348. *Irons B.M.* A frontal solution scheme for finite element analysis // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1970. Vol. 2 P. 5-32.
349. *Irons B.M.* Engineering application of numerical integration in stiffness methods // AIAA J., 1966, Vol. 4. - P. 20352037.
350. *Irons B.M.* Comments on 'Matrices for the direct stiffness method' by R. J. Melosh //AIAA J., 1964, Vol. 2, P. 403.
351. *Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* The Isoparametric Finite Element System – A New Concept in Finite Element Analysis // Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aeronautical Society, London, 1968.
352. *Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Arantes Oliveira E.R.* Comment on the paper: Theoretical Foundations jn the Finite Element Method // Int. J. Solids Struct., 1970, Vol. 6, No. 1 - P. 695-697.
353. *Irons B.M.,Draper K.J.* Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending // AIAA J., 1965, Vol. 3, No. 5 - P. 961. [Русск. перевод: Айронс Б., Дрейпер К. Неадекватность узловых связей в решении задачи изгиба пластины методом жесткостей // Ракетная техника и космонавтика, 1965, Т. 3, №5 - С. 206-207].
354. *Irons B., Razzaque A.* Experience with the patch test // The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations - New York – London: Academic Press, 1972 - P. 557-587.
355. *Ignaczak J., Nowacki W.* Singular Integral Equations in Thermoelasticity, International Journal of Engineering Sciences, 1968, Vol. 4, pp. 53-68.
356. Jaswon M. A., Ponter A. P. An integral equation method for a torsion problem. - Proc. Roy. Soc, Ser. A, 1963, 273, p. 237-246.
357. *Jaswon M.A., Maiti M., Symm M.* Numerical beharmonic analysis and some applications. - Int. J. Solids and Structures, 1967, 3, p. 309-332.
358. *Jones R.E.* A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. // AIAA J. 1964. Vol. 2. No. 5. - P. 821-826.
359. *Jonson M.W.,Jr., McLay, R.W.* Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity // ASME. Journal of Applied Mechanics, Series E, 1968, Vol. 3, No. 2, - P. 274-278.
360. Journal of Mechanical Sciences, 1967, Vol. 9. - P. 143-145.
361. *Kalaba R.* Design of minimal weight structures for given reliability and cost // Journal of Aero/Space Sciense, 1962, Vol. 29, No 3.
362. *Kazinczy G.* Bemessung von statisch unbestimmten Konstructionen unter Berücksichtingung den bleibenden Formändungen // Betonszemle, 1914, №4 - S. 4-6.

363. *Kikuchi F., Ando Y.* Some finite element solutions for plate bending problems by symplied hybrid displacement method // Nucl. Eng. and Des., 1972, Vol. 23, No 2 - P. 155-178.
364. *Kist N.C.* Leidt een sterkteberekening, die uitgaat van de evenredigheid van kracht en vormverandering, tot een „goede constructie van ijzeren bruggen en gebouwen ?" // De Ingenieur, 1917 (гол.)
365. *Klein B.* Further remarks on the direct use of extremal principles in solving certain optimizing problem involving inequalities // Journal of the Operations Research Society of America, 1955, Vol. 3, - P. 548-554.
366. *Klusalaas J.* Minimum Weight Design of Structures via Optimality Criteria // NASA Technical Notes D-71715, 1972.
367. *Kohn, R.V., Strang G.* Optimal Design and Relaxation of Variational Problems // Communic. Pure and Appl. Math. 1986. V. 39. P. 113-137 (part 1), P. 139-182 (part 2), P. 333-350 (part 3).
368. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quarterly of Applied Mathematics, 1953, Vol. 11. № 3. - P. 350-354. [Русский перевод: Койтер В. Т., Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упруго-пластических материалов с сингулярной поверхностью текучести // Механика (сб. переводов), 1960, № 2 (60), 117-121].
369. *Koopman D., Lance R.* On linear programming and plastic limit analysis // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1965, Vol. 13, Issue 2 - P. 77-87 [Русский перевод: Купман Д., Ланс Р. 0 линейном программировании в теории предельного равновесия // Механика (сб. переводов), 1966, № 2 - С. 150-158].
370. *Lagrange J.-L.* Sur la figure des collonnes // Mescellanea Taurinensia, Vol. 5, 1770-1773 - P. 123.
371. *Lahaye M.E.* Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomataires des séances de L'Academie des sciences, 1934, Vol. 198, No 21 - P. 1840-1842.
372. *Lee E.H.* On the significance of the limit load theorems for an elastic-plastic body // Philosophical Magazine, Series 8, 1952, Vol. 42 - P. 549-563.
373. *Leissa A.W.* The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods // Journal of Sound and Vibration, 2005, Vol. 287 - P. 961–978.
374. *Legay.* Memoire sur la trace et le calcul des voates en maconnerie // Annales des ponts et chaussees, 1900, No 4 - P.19-34.
375. *Levy M.* La statique graphique et ses applicatuions aux constructions. IV partie – Paris, 1874.
376. *Lusternik L.* Ober einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung // Математический сборник, 1926, т. 33, - С. 173-202.
377. *MacNeal R.H.* The MacNeal Schwendler Corporation: The First Twenty Years - Buena Park, CA, Gardner Litograph, 1988.
378. *Maier-Leibnitz H.* Beitrag zur Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit einfacher und durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St.37 und aus Holz // Bautechnik, 1928, Vol. 6, № 1 - S. 11-14; № 2 -S. 27-31.
379. *Maier-Leibnitz H.* Versuche mit eingespannten und einfachen Balken von I-form aus St 37 // Bautechnik, 1929. Vol. 7, № 20 - S. 313-318.
380. *Maier G.* Quadratic programming and theory of elastic-perfectly plastic structures // Meccanica, 1968, Vol. 3, Issue 4 - P. 265-273 [Русский перевод: Майер Дж. Квадратичное программирование и теория упруго-идеально-пластических конструкций. Механика, 1969, №6 - С. 112-128].
381. *Mann L.* Statische Berechnung steifer Vierecksnetze // Zeitschrift fur Bauwesen, 1909, Vol. 59 - S. 539-550.

382. *Marcal P.V., King I.P.* Elastic-Plastic Analysis of Two-Dimensional Stress System by the Finite Element Method // International Journal of Mechanical Sciences, 1967, Vol. 9 - P. 143-145.
383. *Marcus H.* Die Theorie Elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten - Berlin: Springer-Verlag, 1932 - 431 s. [Русский первод: Маркус Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий - Харьков - Киев: ГНТИУ. 1936 - 442 с].
384. *Massonnet Ch.* Resolution graphomecanique des problemes generaux de l'elasticite plane. - Bull. G. E. R. E. S. Liege, 1949, 4, No. 3, p. 3-183.
385. *Massonnet Ch.* Solution generate du probleme aux tensions de l'elasticite tri- dimensionnelle. - In: Proc. Ninth Cong. Appl. Mech. - Brussels, 1957, p. 168-180.
386. *Massonnet Ch., Save M., Mazy G., Tubaux G.* Application des machines a calculer electroniques a la solution du probleme aux tensions de l'elasticite plane. - Sixth Congr. of the Int. Assoc. for Bridge and Structural Eng. Stockholm, 1960, Final report, Zurich, 1961, p. 95-104.
387. *Massonnet Ch.* Numerical use of integral procedures. - In: Stress Analysis, ed. by O. C Zienkiewicz and G. S. Holister.-London: Wiley, 1965, p. 198-235.
388. Masur E.F. Optimum Stiffness and Strength of Elastic Structures // Journal Eng. Mich. Division. Proc ASCE, 1970, Vol. 96, No EM5 - P. 621-640.
389. *Maxwell J.C.* Scientific papers II - Cambridg: Univer. Press, 1869 - P. 175-177.
390. *McCormick C.W.* Plane Stress Analysis // Journal of the Strucrural Division, ASCE, 1963, Vol. 89, No. ST4 - P. 37-54. [Русск. перевод: Мак Кормик С.У. Решение плоской задачи теории упругости // Расчет строительных конструкций с применением электронных машин - М.: Стройиздат, 1967 - С. 142-170].
391. *McHenry D.* F Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems // J. Inst. Civil Eng., 1943, Vol. 21.- P. 59–82.
392. *Meissner C.J.* A Multiple Coupling Algorithm for the Stiffness Method of Structural Analysis // AIAA Journal, 1968, Vol. 6, No. 11 P. 2184-2185.
393. *Melosh R.J.* A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. // J. Aero. Sci. 1961, Vol. 28. - P. 34-42.
394. *Melan E.* Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischen Baustoff // Sizungsberichte Akademie der Wissenschaften on Wien, Abteilung IIa, Band 145, Heft 1 und 2 - Wien-Leipzig: Holder, 1936 - S. 195-218.
395. *Melosh R.J.* Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method // AIAA J., 1963, Vol. 1 - P. 1631-1637. [Русск. перевод: Мелош Р.Д. Основы получения матриц жесткости для прямого метода жесткостей // Ракетная техника и космонавтика, 1963, №7].
396. *Melosh R.J.* Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method, AIAA J., 1963, Vol. 1 - P. 1631–1637.
397. *Miche R.* Le calcul Pratique de Problèmes élastiques à deux dimensions par la methode des èquations integrales. – Proc. Second Int. Congress Tech. Mech. – Zurich , 1926. – p. 126-130.
398. *Michell A.* The limits of economy in frame-structures // Phyl. Mag,, 1904, Vol. 8, No 47 - P. 589-597.
399. *Mohr O.* Uber die Zusammensetzung der Krafte im Raume // Zivilingenieur, 1876, 30 - P. 121–130.
400. *Mohr O.* Beitrag zur Theorie der Holzund Eisen-Constructionen // Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1868, vol. 14, No. 1 - P. 19–51.
401. *Moses F., Onoda S.* Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages // Internationa Journal of Numerical Methods in Engineering, 1966, Vol. 1, No 4 - P. 311-331.

402. *Murzewski J.* Design tampletes – A new tool for computer-aided design of structural elements // Journal of Thoretical and Applied Mechanics, 2000, vol/ 38, No 2 - P. 331-350.
403. *Nardini D., Brebbia C.A.* A new approach to free vibration analysis using boundary elements // Applied Mathematical Modelling Vol. 7 (3), 1983, P. 157-162.
404. *Noor A.K., Lowder H.E.* Approximate techniques of structural reanalysis // Computer and Structures, .1974, Vol. 4 - P. 801-812.
405. *Oden J.T., Reddy J.N.* Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973, V.6, No 1 - P. 55–61.
406. *Oden J.T.* A general theory of finite elements – II. Applications // Int. J. Numer. Meth. Engrg, 1969, Vol. 1, No 3 – P. 247-260.
407. *Oden J.T.* Numerical formulation of a class of problems in nonlinear viscoelasticity // Advan. Astronautical Sci., 1967, Vol. 24.
408. *Oden J.T.* Some contributions to the mathematical theory of mixed finite element approximation // Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis - Tokyo: University of Tokyo Press, 1973. - P. 3-23.
409. *Oden J.T., Reddy J.N.* Some observation on properties of certain mixed finite element approximations // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1975. Vol. 9. No. 4. -P. 933-938.
410. *Palmer A.* Optimal structural design by dynamic programming // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1968, No ST8.
411. *Papenfuss B.W.* Lateral plate deflection by stiffness matrix methods with application to a marquee, M.Sc. thesis, Dept. Civil Engng, Univ. of Washington, Seattle, 1959.
412. *Pearson C.E.* Structural design by high-speed computing machines // Conference on Electronic Computation of ASCE,Kansas-SitY, 1958.
413. *Pearson C.W.* Structural design by high speed computing machines // Proceedings of the First Conference on Electronic Computation, ASCE, 1958, New York — P. 417-436.
414. *Perelmuter A., Yurchenko V.* Parametric Optimization of Steel Shell Towers of High-Power Wind Turbines // Procedia Engineering. -2013, Vol. 57- P. 895 – 905.
415. *Pian T., Tong P.* Basis for finite element methods for solid continua // Int. J. Num. Meth. Eng. 1969. Vol. 1. No. 1P. 3-28.
416. *Pippard A.J.S.* On a method for the direct design of framed structures, having redundant bracing // Aeronautical Research Committee, Reports and memoranda No. 793, 1922.
417. *Poceski A.* A mixed finite element method for bending of plates // Int. J. Num. Meth. Eng. 1975. Vol. 9. No. 1. - P. 3-15.
418. *Poceski A.* From deformation to mixed and hybrid formulation of the finite element method // J. Theor. App. Mechanics, Yug ociety of Mechanics, Belgrade, 1979. No. 5.
419. *Poceski A., Simonee V.* Metodot na koneeni elementi i hegovata primena // Gradezen fakultet, Skopje 1972.
420. *Polya G.* Sur une Interprétation de la Méthode des Différences Finis qui Peut Fournir des Bornes Supérieures ou Inférieures // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences (Paris), 1952, Vol. 235 - P. 995–997.
421. *Pope G.G., Schmit L.A.* Structural Design Applications of Mathematical Programming Techniques // AGARD-AG-149-71. Nort Atlantic Treaty Organization, Rue Ancelle 9Z, Neuilly-Sur-Seine, France. 1971.
422. *Prager W.* Minimum-weight design of a portal frame // Journal of the Engineering Mechanics Division/ Proceeding of ASCE, 1956, Vol. 82, No EM4 - P. 1073-1 - 1073-10.

423. *Prager* W. Introduction to Structural Optimization. - Springer-Verlag, Vienna, 1974 [Русский перевод: Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций - М.: Мир, 1977 - 109 с.].
424. *Prager W., Taylor J.E.* Problems of Optimal Structural Design // Journal of Applied Mechanics, 1968, Vol. 35, No. 1. - P. 102-106.
425. *Prager W.; Rozvany G.I.N.* Optimization of the structural geometry // Dynamical Systems (proc. Int. Conf. Gainsville, Florida) - New York: Academic Press, 1977. - P. 265-293.
426. *Prager W.* Fundamental theorems of a new mathematical theory of plasticity // Duke Mathematical Journal, 1942, Vol. 9 - P. 228-232.
427. *Pгager W.* The general theory of limit design // Proceedings of the 8-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Istanbul, 1952, Vol. 2 - P. 65-72.
428. *Prager W.* Probleme der Plastizitatstheorie - Basel: Bitkhauser, 1955. [Русский перевод: Прагер В., Проблемы теории пластичности - М.: Физматлит, 1958. - 136 с.]
429. *Prato C.* A mixed finite element method for thin shell analysis // Ph. D. Th. Dept. Civil Eng. MIT, 1968.
430. *Przemieniecki J.S.* Matrix Structural Analysis of Substructures // AIAA Journal, 1963, Vol.1 — P. 138-147.
431. *Przemieniecki J.S., Denke P.H.* Joining of Complex Substructures by the Matrix Force Method // J. Aircraft, 1966, Vol.3 — P. 236-243.
432. *Rayleigh J.W.S.* Some general theorems relating to vibrations // Proceedings of London Mathematical Society , 1873, Vol. 4. - P. 357-368.
433. *Rayleigh J.W.S.* On the calculation of the frequency of vibration of a system in the gravest mode, with example from hydrodynamics // Philosophical Magazine, Ser. 5, 1899, Vol. 47 - P. 556-572.
434. *Raviart, P.A., Tomac, J.M.* A Mixed Finite Element Method for 2nd-Order Elliptic Problems // Proceedings, Symposium on the Mathematical Aspects of the Finite Element Methods, 1977.
435. *Raviart, P.A.* Hybrid Methods for Solving 2nd-Order Elliptic Problems, in Topics in Numerical Analysis - New York: Academic Press, N.Y., 1975- P. 141-155.
436. *Razani R.* Behavior of Fully Stressed Design of Structures and Its Relationship to Minimum-Weight Design // AIAA Journal, 1965, Vol. 3, No. 12 P. 2262-2268 [Русский перевод: Разани Р. Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального объема // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Том 3, №12. — С. 115-124].
437. *Reinschmidt K.F., Cornell C.A., Brotchie J.F.* Iterative design and structural optimization // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1966, No ST6.
438. *Ricks E.* The application of Newton's method to the problem of elastic stability // Trans. ASME. 1972. E39, N4. .-P. 1060-1065. (Рус. пер: Рикс. Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механика. 1972. №4. .-С 204-210).
439. *Ricks E.* Some computational aspekt of the stability analysis of nonlinear structures // Conp. Method Appl. Mech. Eng., 1983, Vol. 47 - P. 219-259.
440. *Richardson L.F.* The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam //. Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1910, Vol. 210 - P. 307–357.
441. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die reine und angewendete Mathematik, 1908, Bd. 135, Heft 1 - S. 1-61.
442. *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // Annalen der Physik, 1909, Bd. 28 - S. 737-786.

443. *Robinson J.* Structural Matrix Analysis for the Engineer. - New York: John Wiley & Sons, 1966. - 344 p.
444. *Rizzo F.J.* An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. - Quart. Appl. Math., 1967, 25, p. 83-95.
445. *Rizzo F.J., Shippy D.J.* A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. Journal of Composite Materials, 1970, Vol. 4, pp. 53-68.
446. *Rozvany G.I.N.* Optimal Designof Flexural Systems: beams, grillages, slabs, plates and shells. – Oxford: Pergamon Press, 1976 [Русский перевод: Рожваны Д. Оптимальное проектирование изгибаемых систем - М.: Стойиздат, 1980 - 316 с.]
447. *Runge C.* Über eine Methode, die partielle Differentialgleichungs Constans numerisch zu integrieren // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1908, Band 56 - S. 225-232.
448. Salimbeni. Degli archi e delle volte -Verona: 1787 - 320 p.
449. Schmidt L.C, Fully-stressed design of elastic redundant trusses under alternative load systems // Australian J. Appl. Sci. 1958, №9, — P. 337-348.
450. Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis // Proceedings of the 2nd National Conference on Electronic Compuation (American Society of Civil Engineers, New York, 1960) — P. 105-132.
451. *Schmit L.A.* Structural design by systematic synthesis, Proceeding of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation - New York: ASCE, 1960 - P. 105-132.
452. *Schmit L.A., Fleury C.* Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods // AIAA Journal, 1980, Vol. 18, P. 1252-1260.
453. *Somigliana C.* Sopra l'equilibrio di un Corpo elastico isotropo, Il Nuovo Ciemento, 3, pp. 17–20, 1885.
454. *Strang G., Kohn R.* Henky-Prandtl nets and constrained Michell trusses // Comp. Meth. in Appl. Mech. Engrg., 1983, Vol. 36, No. 2 - P. 207-222.
455. *Strutt J.W.* (lord Rayleigh). The Theory of Sound - London: Macmillan, Vol. 1, 1877; Vol. 2, 1878 [Русский перевод: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. В 2-х томах М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955].
456. *Strutt J.W.* (Lord Rayleigh), On the calculation of Chladni's figures for a square plate // Philosophical Magazine Sixth Series, 1911, Vol. 22, - P. 225–229.
457. *Tanabashi R.* Angenahertes Verfahren zur Ermittlung der maximalen und minimalen Biegemomente von Rahmentragwerken // Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University, 1937, vol. IX, No. 4.
458. *Timoschenko S.* Stabilitätsprobleme der Elastizitätstgeorie // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1910, Band 58, №4 - S. 337-385.
459. *Toakley A.R.* Optimum design using available sections // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1968, No ST5
460. *Torroja E.* Pholosophy of structures, Berkeley, USA: University of California Press, 1967.
461. *Trefftz E.* Ein Gegenstück zum Ritzschen Ritzschen Verfahren // Verhandlung 2-en International Kongress Technische Mechanik. - Zürich-Leipzig: Fusseli, 1926 - S. 131-137.
462. *Trefftz E.* Konvergenz und Fellerabschätzung beim Ritzschen Verfahren // Mathematische Annalen, 1928, Bd. 100, Heft 1 - S. 503-521.
463. *Turner H.K., Plaut R.H.* Optimal design for stability under multiple loads // Proceeding ASCE, 1980, Vol. 106 - P 1365-1382.
464. *Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.* Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures // J. Aero. Sci. 1956. Vol. 23. No. 9. - P. 805-824.

465. *Turner M.J., Martin H.C., Weikel R.C.* Further development and applications of the stiffness method // AGARDograph 72: Matrix Methods of Structural Analysis — Oxford: Pergamon Press, 1964. — P. 203-266.
466. *Venkayya V.B.* Design of Optimum Structures // Computer and Structures, 1971, Vol. 1, No 1-2 - P. 265-309.
467. *Villarceau.* Sur l'etablissement des arches de point, envisage de point de vue de la plus grande stabile // Comp. Rend. de l'Acad. des Science de Paris, T. III, No. 9, 1846
468. *Wasiutynski Z.* O ksztaltowaniu wytrzymalosciowym Warszawa: Academia Nauk Technicznych, 1939.
469. *Wasiutynski Z.* On the congruency of the forming according tj the minimum potential energy with that according to the equal strength // Bull. Acad. Pol. Sci. Techn., 1960, Vol. 8, No 6 — P. 259-268.
470. *Wasiutynski Z.* O przeksztalcaniu kratovvnic przez wprowadzenie nowych pretow // Inz. Budow. 1950, №11.
471. *Weber H.* Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen // Mathematische Annalen., 1869, Vol. 1 - P. 1–366.
472. *Weinel E.* Die Integralgleichung des ebenen Spanungszustandes und der Plattentheorie. - ZAMM, 1931, Bd. 11, No. 5, S. 349-360.
473. *Wilson E. L.* Matrix Analysis of Nonlinear Structures // Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.
474. *Wilson E.L.* SAP-A General Structural Analysis Program, UCB/SESM Report No. 70/21, University of California, Berkeley, 1970.
475. *Wilson E.L.* Automation of the finite element method, a personal historical view. // Finite Elements in Analysis and Design, vol. 13. – Amsterdam: Elsevier, 1993. - P. 91-104.
476. *Winkler E.* Die Sekundar-Spannungen in Eisenkonstruktionen // Deutsche Bauzeitung, 1881, vol. 14 - P. 110–111, 129–130 & 135–136.
477. *Winkler E.* Beitrage zur Theorie der continuierlichen Bruckentrager // Civilingenieur, 1862, vol. 8 - P. 136–182.
478. *Winkler E.* Vortrag uber die Berechnung der Bogenbrucken // Mitteilungen des Architekten- und Ingenieurvereins Bohmen, 1868 - P. 6–12 & 1869 - P. 1–7.
479. *Xie Y. M., Steven G. P.* A simple evolutionary procedure for structural optimization // Computers and Structures, 1993, Vol. 49, N 5 - P. 885-896.
480. *Young T.* Course of Lectures on Natural Philosophy, 1807.
481. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 1. The Basis - Oxford: Butterworth-Heineann, 2000 - 689 p.
482. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 2. Solid Mechanics. - Oxford: Butterworth-Heineann, 2000 - 457 p.
483. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 3. Fluid Dynamics. - Oxford: Butterworth-Heineann, 2000 - 334 p.
484. *Zienkiewicz O.C., Cheung, Y.K.* Finite Element Method of Analysis for Arch Dam Shells and Comparison with Finite Difference Procedures // Proc. Symp. on Theory of Arch Dams, Univ. Southampton. (Theory of Arch Dams, Pergamon Press, 1965) - P. 123-139.
485. *Zienkiewicz O.C., Cheung, Y.K.* The Finite Element Method in Engineering Science - London: McGraw-Hill, 1967. - 272 p. [Русск. перевод: Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред - М.: Недра, 1974. – 240 с.]
486. *Zlamal M.* On the Finite Element Method // Numerische Mathematik , 1968, Vol. 12 - P. 394-409.

ЧАСТИНА IV

ВНЕСОК УКРАЇНСЬКИХ УЧЕНИХ. М. ОСТРОГРАДСЬКИЙ, В. КИРПИЧОВ, С. ТИМОШЕНКО

Наука захоплює нас лише тоді, коли зацікавившись життям великих дослідників, ми починаємо стежити за історією їх відкриттів.

Дж. Максвелл

Спогади про великих людей так само корисні, як і їх присутність.

Сенека

Потомки бывают умнее, чем предки,
Но случаи эти сравнительно редки.

Р. Муха

НАРИС 19

М.В. ОСТРОГРАДСЬКИЙ

У математиці, панове, також є своя краса, як у живописі і поезії. Іноді ця краса виявляється в чітких, яскраво окреслених ідеях, коли на увазі кожна деталь висновків, а іноді вона вражає нас широкими задумами, які приховують в собі дещо недосказане, але багатообіцяюче. У роботах Остроградського нас приваблює загальність аналізу, головна думка така ж безмежна, як і широкий простір його рідних полів ...

Більша частина наукових робіт Остроградського відноситься до його улюбленого предмету аналітичної механіки ... З ім'ям Остроградського завжди буде пов'язане розповсюдження методу можливих переміщень на системи із в'язями, які звільняються, і викладення теорем динаміки за допомогою розгляду варіацій координат, що відбуваються від зміни довільних постійних.

М.Є. Жуковський

Михайло Васильович ОСТРОГРАДСЬКИЙ (1801–1861)

Дитинство. Навчання. Студентськи роки у м. Харкові. Вчителі

Видатний український математик, академік Петербурзької Академії наук, дійсний член ряду інших академій Михайло Васильович Остроградський народився 12 вересня 1801 року у селі Пашенівка Полтавської обл. Тут пройшли його дитячі та шкільні роки. Походив він з відомого козацько-старшинського роду і завжди цим пишався. Коли Михайлові виповнилося вісім років, батько віддав його до Полтавської гімназії.

Гімназія в Полтаві відкрилася в лютому 1808 року, в один час з будинком «для виховання бідних дворян», куди і був розміщений Остроградський. За задумом цей будинок мав стати чимось на зразок школи-інтернату.

Очолював будинок директор, безпосереднє ж керівництво вихованцями було покладено на його помічників, які іменувалися наглядачами або зверхниками. Серед них в роки навчання Остроградського і пізніше був український письменник І.П. Котляревський. Котляревський прийняв цю посаду після виходу у відставку з армії і, як пишуть про нього, «щиро полюбив свою нову службу і щиро дбав про поліпшення побуту доручених йому дітей». Правитель канцелярії полтавського генерал-губернатора Рєпніна писав про «майора Котляревського, відомого перекладанням Віргілієвої Енеїди на вітчизняну його малоросійську мову»: «Чиновник цей в колі вихованців представляє шанобливого і суворого батька; винагорода праць його відображена завжди на обличчі його, задоволення внутрішнє і схвалення совісті видно у всіх рисах його і він, кілько суворий в управлінні вихованцями, стільки ж турботливий про доставляння їм задоволення»[1].

Немає сумніву, що Остроградський відчував позитивний моральний вплив такого вихователя, але навряд чи можна думати, що саме Котляревський пробудив у ньому бажання присвятити себе наукам.

Хлопчик жвавої та веселої вдачі, звиклий до роздольного життя у рідному селі, особливою старанністю в гімназії не відзначався. Незважаючи на очевидні здібності, він мріяв лише про те, щоб стати військовим. До речі, для цього він мав усе необхідне - богатирську зовнішність, міцне здоров'я, вміння оперативно оцінювати ситуацію. Однак після певних вагань батько все ж таки везе сина до Харкова задля підготовки і вступу до університету. І в 1816 р. юнак стає студентом.

Заснований в середині XVII ст., Харків перше сторіччя свого існування був полковим містом: адміністративним і господарським центром поселень, в яких жили козаки Харківського Слобідського полку. В другій половині XVIII ст. він стає губернським містом.

До 1820 р. місто потроху розбудовується, в чималій мірі завдячуючи заснуванню університету.

Харківський університет був відкритий в 1805 р. Натхненником його створення був великий поборник освіти В.Н. Каразін, який належав до місцевого дворянства. Він не тільки домігся згоди Олександра I на заснування університету, а й змусив розщедритися досить скупих місцевих багатіїв. Успіх Каразіна був підготовлений всім ходом суспільного розвитку.

Фактично університет почав роботу, маючи відділення моральних і політичних наук, словесних, фізичних і математичних; дещо пізніше відкрилося четверте відділення - медичне.

Остроградський приїхав до Харкова в неповних 15 років - навесні 1816 р.

Спочатку юний Остроградський вчився неохоче. Він не одразу відчув своє справжнє покликання. На його щастя, викладач математики А.Ф. Павловський, педагог з широкою ерудицією, захоплений своєю професією, помітив надзвичайні здібності юнака і зумів пробудити у ньому свідомий інтерес до науки. Поступово Остроградський починає вчитися з величезним захопленням і невдовзі вже дивує свого вчителя

Іван Петрович Котляревський (1769-1838)

Василь Назарович Каразін (1773-1842)

Тимофій Федорович Осиповський (1765-1832)

---

[1] «Киевская старина», 1905, июнь, стр. 241 (цит. за: И.Ф. Павловский. Полтава..., стор. 239).

успіхами. Цьому значною мірою сприяло також його знайомство та зближення з ректором університету професором Т.Ф. Осиповським. За допомогою своїх старших наставників Михайло із справжньою пристрастю починає осягати суть великих наукових ідей епохи.

Осиповський Тимофій Федорович народився 2 лютого 1765 р. у Володимирській губернії в сім'ї священнослужителя. Навчався він у Володимирській духовній семінарії, звідки в числі 150 кращих учнів духовних семінарій і академій був переведений в 1783 р. до Вчительської гімназії в Петербурзі для підготовки задля заняття учительської посади. Осиповський з захопленням готувався до викладацької діяльності протягом трьох років, «займаючись більш за все фізико-математичними науками» і «будучи відмінним студентом в цій частині», як згодом він писав в автобіографічній записці, складеній в 1819 р. Після отримання в 1786 р. диплома Осиповський був призначений учителем фізико-математичних наук і російської словесності в Московське головне народне училище, де пропрацював до 1800 р.

У 1800 р. Осиповський був переведений до Петербургу на посаду професора тієї гімназії, в якій він сам навчався, але працювати йому тут довелося недовго, бо вже в наступному році він отримав запрошення обійняти кафедру математики у новоствореному університеті в Харкові, куди і переїхав в 1803 р. Незабаром Осиповський завоював глибоку повагу своїх товаришів по роботі і, починаючи з 1813 р. протягом семи років поспіль обирався радою університету на пост ректора.

Осиповський приїхав до Харкова не тільки як досвідчений і вельми ерудований викладач, у нього була вироблена система поглядів на науку, свій світогляд вченого. Осиповський був представником матеріалістичних традицій російської науки, що йдуть від М.В. Ломоносова. Яскравим прикладом поглядів Осиповського є його промова «Міркування про користь науки»[1]. В ній він розмірковує про геометрію (а в даному контексті це рівнозначно математиці), що вона є «вчителькою точності, готує розум наш до глибоких досліджень природи», а також підкреслює її виховне значення: «Ніщо так нашого розуму, його безмежності, його проникливості, його вірності випробувати не може і ніщо такої вправи усім силам його дати не в змозі, як геометрія»; про фізику, яка, «досліджуючи властивості тіл, що нас оточують, відкриває сили і закони природи», «можна сказати, що через неї стаємо ми володарями природи». «Механіка, запозичуючи своє світло від фізики і глибоке проникнення від геометрії, піддає сили природи своїм обчисленням і постачає нас різними знаряддями для здійснення таких дій, як би без неї нітрохи не сумірні були з природними нашими силами».

Найбільш яскраво і переконливо Осиповський висловив свої погляди на природу математичних знань в двох промовах, прочитаних їм на урочистих

---

[1] «Торжество Московского главного народного училища 28 октября 1795 г.». М., 1795, стор. 9—12.

зборах університету, - «Про простір і час» (30 серпня 1807 р.)[1] і «Про динамічну систему Канта» (30 серпня 1813 р.)[2].

Чудовий педагог і знавець свого предмета, Осиповський користувався глибокою повагою студентів і всієї спільноти і як людина. «У найвищому ступені м'який і добрий Осиповський за своїми моральними якостям - так всі його сприймали - був досконалість, наскільки може людина досягати її»[3]. А ось як характеризує його вихованець Харківського університету: «Т.Ф. Осиповський зросту хорошого, одягався просто, але пристойно. Відомий свого часу математик, він крім математики і фізики володів багатосторонніми відомостями і був невтомно працьовитий. Осиповський завжди і з усіма в зверненні був рівний, ніколи не втрачав самовладання, любив говорити позитивно, виражатися точно, для чого іноді розмовляючи зупинявся і виправляв сказану ним фразу; рідко говорив або захищав що-небудь з жаром, енергійно, але просто, байдуже і наполегливо. Він не любив містиків, які брались собі пояснити незрозуміле ... Тимофій Федорович мав велику і тверду пам'ять, не любив чванливитися і висловлювати себе ... »[4].

Багаторічний попечитель Харківського університету С.О. Потоцький, представляючи Осиповського до ордену, писав про нього в тоні, вельми відмінному від стандартних вихвалянь в такого роду реляціях: «Професор цей є одним з тих членів університету, які при дбайливому викладанні лекцій намагаються бути корисними університету і за всіма іншими частинами, що належать до його благоустрою і удосконаленню: обіймаючи з самого відкриття університету багатотрудну посаду неодмінного засідателя, він в особливості сприяв в успішнішому виробництві училищних справ і в господарському заощадженні університетських сум, особовому нагляданні його довірених. При безперервних заняттях по цьому званню і за посадою професора, яку він завжди виконував без найменшого опущення, він займався також виданням навчальних книг, з яких деякі, як відомо, служать в даний час єдиним керівництвом до викладання в наших гімназіях».

Діяльність Осиповського мала особливе значення для фізико-математичного факультету (офіційна назва за статутом 1804 р. - відділення фізичних і математичних наук; назва «факультет» узаконено лише в 1850 р.). При відкритті університету Осиповский зайняв кафедру чистої математики, а фактично і прикладної, тому що остання залишалася вакантною, як і кафедра астрономії, до 1808 р. Несучи великі адміністративні обов'язки «в канцеляріях, зібраних з людей, які не вміли написати порядно рядки, перші роки Осиповський читав лекції по 10 годин на тиждень». Але поступово передавав викладання окремих курсів своїм учням: елементарну і частину вищої математики -

---

[1] В кн.: «Речи, говоренные в торжественном собрании имп. Харьковского университета, бывшем 30 августа 1807 г.». Харьков, 1807, стор. 3—15.

[2] В кн.: «Речи, произнесенные в торжественном собрании имп. Харьковского университета, бывшем 30 августа 1813 г.». Харьков, 1813, стор. 3-16.

[3] Багалей. Опыт истории..., т. I, стор. 962.

[4] Багалей. Опыт истории..., т. I, стор. 962-963.

А.Ф. Павловському (з 1810 р.), механіку - М.М. Архангельському (з 1813 р.), елементарну математику М.А. Байкову (з 1819 р.).

Андрій Федорович Павловський (1788-1857) навчався в Харківському університеті в 1806-1809 рр., успішно його закінчив і був залишений при ньому в якості викладача.

Микола Михейович Архангельський (1787-1857) навчався в Харківському університеті в 1804-1807 рр., потому викладав у гімназіях, але в 1810 р. повернувся до університету, в 1811 р. отримав звання магістра, в 1811-1813 рр. удосконалювався в Петербурзі у академіка Гур'єва, який відпустив його з хорошою атестацією. З 1814 по 1817 рр. він викладав в університеті механіку як ад'юнкт, з 1818 р. він - екстраординарний професор, в 1826 р. переведений в ординарні професори.

Матвій Андрійович Байков (1800-1849) був тільки на рік старший за Остроградського. Він навчався в університеті в 1816-1819 рр., читав елементарні розділи математики, пізніше додав до них практичну геометрію. Вже в 1832 р. він звільнився і обійняв посаду директора Землеробського училища в Петербурзі.

Таким чином, все навчання фізико-математичного циклу наук було поставлено, налагоджено і здійснювалося Осиповським спочатку майже одноосібно, потім за допомогою А.Ф. Павловського та, певною мірою, М.М. Архангельського.

Помітивши в Остроградського математичні здібності, Павловський став приділяти йому особливу увагу. Бесіди з Павловським пробудили в юнакові інтерес до науки, і він з захопленням став нею займатися Вже через два місяці Остроградський вражав свого наставника і вихователя успіхами.

Навчання в Парижі. Наукова діяльність

Блискуче закінчивши у 1818 р. університет, Остроградський рік живе у батька. Та згодом, остаточно вирішивши присвятити себе математиці, знову повертається до Харкова для вдосконалення своїх знань у прикладній математиці та одержання ступеня кандидата. В цей час у країні посилюються переслідування прогресивних діячів, зокрема науковців. Активізується реакційне чиновництво і в Харківському університеті. Тому наміри Остроградського наштовхуються тут на опір. Йому закидають нехтування лекціями з філософії та богослів'я. І хоча в 1820 р. він добре склав усі необхідні екзамени і був відзначений серед найкращих, видачу йому кандидатського диплома затягували, пропонуючи складати все нові й нові іспити. Обурений таким ставленням до себе, юнак повертає до ректорату одержаний раніше атестат і просить викреслити назавжди його ім'я зі списків студентів.

Сталося це у 1822 р. Ця прикра історія анітрохи не згасила його любові до науки. Остроградський приймає сміливе рішення - їхати до Парижа, який був у той час центром наукових досліджень з тих проблем, що найбільше цікавили молодого математика. І жодні перешкоди: вагання батьків, осуд рідних, певні матеріальні труднощі, навіть пограбування в дорозі (через яке довелося повертатися додому і знову вирушати в путь) - вже не змогли зупинити рішучого юнака.

Остроградський прожив у Парижі шість років (1822-1828). Там у цей час працювали такі титани науки, як П.С. Лаплас, С.Д. Пуассон, О.Л. Коші, Ж.Б. Фур'є, А. Нав'є. М.В. Остроградський, навчаючись у них, невдовзі і сам спромігся заявити про себе на повний голос. Талант і завзятість молодого вченого привернули увагу корифеїв. У 1825 р. Коші у своїх мемуарах згадує про оригінальні дослідження молодого вченого з Росії, «обдарованого великою проникливістю та дуже вправного в аналізі нескінченно малих». Лаплас по-батьківськи називає його своїм сином і перед смертю дарує юнакові одну із своїх ще не надрукованих на той час праць. В 1825 р., не приховуючи свого задоволення, П'єр-Симон Лаплас, творець «небесної механіки», писав: «Остроградський наділений великою проникливістю і є прекрасним знавцем аналізу нескінченно малих величин ...».

П'єр Сімон Лаплас,
Pierre Simon Laplace
(1749 - 1827)

Жан Батіст Жозеф
Фур'є,
Jean Baptiste Joseph
Fourier (1768 - 1830)

Сімеон Дені Пуассон,
Simeon Denis Poisson
(1781 – 1840)

Клод-Луї Марі-Анрі
Нав'є,
Claude-Louis-Marie-
Henri Navier
(1785-1836)

У 1826 р. Остроградський подає до Паризької Академії наук своє дослідження з поширення хвиль на поверхні рідини. Цими проблемами займалися і П.С. Лаплас, Ж.Д. Лагранж, С.Д. Пуассон, О.Л. Коші. Та Остроградський знайшов принципово новий підхід. Успіх молодого вченого став його значним внеском в гідродинаміку. Існує версія, нібито Остроградський виконав це дослідження, перебуваючи у борговій в'язниці (куди він потрапив через матеріальні нестатки - був неспроможним сплатити за житло). Там, спостерігаючи за хвилями Сени, він начебто і написав працю «Теорія хвиль у циліндричному басейні». Подейкували, що сам Коші сплатив борг свого молодого колеги і знайшов йому роботу у Коледжі Генріха IV.

Огюстен-Луї Коші,
Augustin Louis Cauchy
(1789- 1857)

Остроградський слухав лекції в Паризькому університеті, в Колеж де Франс, регулярно відвідував щотижневі засідання Академії наук.

Він був незвичайним студентом, відразу звернув на себе увагу. На відміну від інших він почав навчання, вже маючи пристойну математичну підготовку і певні наукові інтереси. Остроградський не дбав про отримання атестату про закінчення вищого навчального закладу, він не приходив на іспити, але не через нездатність до навчання, а навпаки, тому що прагнув отримати перш за все знання, освоїти найостанніші результати своїх знаменитих вчителів. Вся його увага була зосереджена на заняттях наукою, і при цьому він був вкрай обмежений у коштах на життя, проте зберігав бадьорість духу, був веселий і наділений простодушним гумором. Все це не могло не підкуповувати французьких математиків. Його запрошував до себе пообідати навіть Коші, який дуже прискіпливо ставився до молоді, не приділяючи їй багато уваги. Одночасно з Остроградським в Парижі навчався і В.Я. Буняковський, але останній не завів настільки близького знайомства зі своїми вчителями, ймовірно, через те, що був одним із скромних, добре вихованих і обдарованих молодих людей, які вчилися в університеті, як того вимагали правила. Ексцентричний Остроградський постійно звертав на себе увагу тим, що ні в які правила не вписувався.

Віктор Яковлевич
Буняковський
(1804-1889)

Олексій Миколайович
Крилов
(1863–1945)

У Петербурзькій математичній школі зберігся такий переказ, записаний академіком О.М. Криловим:

«З якоїсь причини в 1826 р. Остроградський своєчасно не отримав коштів від батька, заборгував у готелі «за харч і постій» і за скаргою господаря був запроторений в «Кліші» - боргову в'язницю в Парижі. Тут він, мабуть, особливо сумлінно займався математикою, бо написав свою знамениту роботу «Мемуар про поширення хвиль в циліндричному басейні», яку надіслав О. Коші. В листопаді 1826 р. Коші з самими схвальними відгуками представив цей мемуар Паризькій академії, яка удостоїла цю роботу вищої оцінки - надрукуванням в «Memoires des savants etrangers a l'Academie» («Записки вчених сторонніх до Академії»). Більш того, Коші, не дивлячись на те, що сам був не багатою людиною, викупив Остроградського з «боргової». Згодом до цього переказу додалось багато подробиць і вигадок.

Петербурзький період життя. Петербурзька Академія наук

У 1828 р. М. Остроградський повертається до Петербурга уже відомим вченим. Він подає до Академії наук три праці, в одній з яких наводить оригінальне виведення центрального в теорії потенціала рівняння Пуассона. В іншій (з теорії теплоти) вчений вперше формулює метод розв'язання задач математичної фізики (так званий метод Фур'є, який сам Фур'є застосовував лише в окремих випадках), доводить відому формулу, що пов'язує об'ємний інтеграл з інтегралом по поверхні (тепер вона носить назву «формула Остроградського-Гаусса»), висуває ряд важливих проблем математичного аналізу, які стали об'єктом досліджень багатьох видатних математиків на ціле століття.

До Остроградського приходять слава і визнання. У 1831 р. його обирають академіком Петербурзької Академії наук, згодом він стає членом-кореспондентом Паризької Академії наук, дійсним членом ряду інших академій: Римської, Туринської, Американської, почесним членом Київського та Московського університетів та багатьох наукових товариств.

Діапазон наукової творчості Остроградського був надзвичайно широким. Вчений займався аналітичною механікою, теорією удару, балістикою, варіаційним численням, алгеброю, теорією чисел, теорією імовірності тощо. Основоположник теорії гідро- та аеродинаміки М.Є. Жуковський писав, що «роботи Остроградського з самої тільки механіки охоплюють собою майже всі питання, на вирішенні яких зосереджувались у той час думки видатних європейських геометрів» (так тоді називали математиків).

За часів Російської імперії заняття наукою не завжди ставало запорукою матеріального статку сім'ї. У 1857 р. дружина пішла від академіка, промінявши його на лихваря і полишивши Остроградському сина, зі словами: «*Будь проклята ваша наука*». А син Віктор, вже після смерті батька, хворий, без шматка хліба, помре в полтавському будинку для бездомних дворян, перебування в якому оплачував кращий учень академіка Федір Чижов.

З 1828 р., року повернення на Батьківщину, і до останніх днів життя, протягом 33 років Остроградський був пов'язаний з Петербурзькою Академією наук. Він став спочатку ад'юнктом Академії, потім екстраординарним і, нарешті, ординарним академіком.

Жоден захід, що стосувався математики, - присудження премій, обрання нових членів, відгуки на подані роботи, - не минало в стінах Академії повз Остроградського. Переважну частину своїх наукових робіт Остроградський надрукував в працях Академії. Тому для оцінки його діяльності треба нагадати про те, як була організована Петербурзька Академія наук і в якому стані вона перебувала в часи Остроградського.

Створення Академій наук

XVII століття було епохою швидкого розвитку математики, астрономії та природничих наук. Освічені люди почали проявляти інтерес до наук, зокрема, велику увагу до себе привернула експериментальна робота. Багато університетів перебували під наглядом церкви, і, оскільки це не сприяло науковому прогресу, в різних європейських країнах почали утворюватися вчені товариства. Завданням їх було взаємне зближення людей, які цікавляться наукою, і забезпечення умов для експериментальної роботи. Такий рух виник в Італії, де з 1560 р. в Неаполі була створена «Академія таємниць природи» (Accademia secretorum naturae). Знаменита Accademia dei Lincei була заснована в Римі 1603 р. і Галілей був одним з її членів». Після смерті Галілея Accademia del Gimento (Академія досвідчених знань) була створена у Флоренції за підтримки великого герцога Фердинанда де Медічі і його брата Леопольда. Учні Галілея - Вівіані і Торрічеллі брали участь в роботах цієї академії.

Приблизно в той же час в Англії на ґрунті спільних наукових інтересів формується аналогічна спільнота людей, які домовилися збиратися по мірі можливості.

Ці наукові засідання в Лондоні увійшли в постійний звичай і згодом трансформувалися в Королівське товариство.

День, коли був підписаний перший статут (хартія) Королівського товариства, тобто 15 липня 1662 р. вважається датою його заснування. Серед запрошених в члени Товариства були Роберт Бойль - фізик і хімік, Кристофор Врен (Ghr. Wren) - архітектор і математик і Джон Валліс - математик. На посаду куратора, в обов'язки якого входила підготовка до кожних зборів товариства, був призначений Роберт Гук.

Так само і Французька Академія наук була організована на добровільних засадах. Пан-отець Мерсенн (1588-1648) ввів і дотримувався до своєї смерті традиції збирати конференції, в яких брали участь такі люди, як Гассенді, Декарт, Паскаль. Надалі ці приватні зустрічі вчених стали відбуватися в будинку Абер-де-Монмор (Habert de Montmor). У 1666 р. Кольбер, міністр Людовіка XIV, зробив офіційні заходи для організації Академії наук, до складу якої повинні були увійти фахівці різних галузей знань. Математик Роберваль, астроном Кассіні, датський фізик Ремер (виміряв швидкість світла) і французький фізик Маріотт значаться в першому списку членів французької академії.

В цілому XVII і XVIII століття стали епохою організації національних академій, і передові люди того часу бачили в їх створенні запоруку справжнього успіху і процвітання науки. Академії були організовані в країнах з числа тих, з якими була пов'язана Росія: Римська Академія наук (Academia dei Lincei), Паризька Академія наук, Лондонське королівське товариство (фактично Британська Академія наук), Берлінська Академія наук, Шведська (Стокгольмська) Академія наук, Датська Академія наук, Туринська Академія наук, Американська Академія наук і мистецтв (в Бостоні), Петербурзька Академія наук (пізніше перейменована в Російську академію наук).

У 1717 р. Петро I був у Парижі і відвідав Паризьку Академію наук. Це відвідування справило на нього велике враження; 11 червня 1718 року в його паперах був зроблений запис: «Зробити Академію, а нині підшукати з росіян хто навчен і до того схильність має; також розпочати переклад книг ... ».

Дещо пізніше (в 1770 р.) була організована Берлінська Академія наук, а в 1725 р. в Петербурзі була заснована Російська Академія наук.

Всі ці академії видавали свої друковані праці, що справили великий вплив на розвиток науки в XVII і XIX ст.

У XVII ст. наукові дослідження велися переважно особами, які працювали в академіях наук. Лише деякі цікавилися механікою пружного тіла, а якщо Галілей, Гук, Маріотт і займалися вирішенням деяких питань теорії пружності і міцності споруд, висунутих потребами практики, то головною рушійною силою в їх працях залишалася все ж наукова допитливість. Протягом XVIII ст. наукові результати попереднього століття знайшли практичне використання і наукові методи були введені поступово в різні області техніки і інженерної справи.

Роботи з математичної фізики, варіаційного числення

Галузь наукової діяльності була обрана Остроградським ще в Харкові під впливом професора Осиповського. Механіка, математична фізика, математичний аналіз - ось основні напрямки творчої діяльності Остроградського. Порівняно невелике місце в його творчій спадщині займають роботи з алгебри, теорії чисел, теорії імовірності і питань страхування. Всього відомо 76 опублікованих робіт Остроградського. Ряд його доповідей, прочитаних в Академії і в яких явно надавався виклад нових міркувань з питань теорії фізичних явищ, не тільки не побачили світло, але і загубилися. Вдалося вивчити деякі рукописи, подані ним до Паризької академії, але в той час неопубліковані. Вони стосуються переважно питань з теорії поширення теплоти. Деякі його результати були опубліковані іншими авторами зі згадуванням його імені, наприклад результати по поширенню тепла в багатогранних тілах.

Роботи М.В. Остроградського з математичного аналізу в більшості випадків викликані його дослідженнями з математичної фізики і механіки: вони дають рішення математичних питань, поставлених теоретичним природознавством того часу. Але, починаючи з перших років своєї наукової діяльності, Остроградський займався і такими темами, які ми зараз віднесли б до «чистої математики», хоча і вони, в решті решт, пов'язані з дуже конкретними проблемами. Є у Остроградського роботи, очевидним чином пов'язані з його навчальними курсами. В цілому його дослідження з аналізу представляють значний внесок в математику, притому в основні її розділи.

У статті «Замітка з теорії теплоти», надрукованій в 1828 р., була виведена формула

$$\iiint_{v}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{S}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (19.1)$$

яка увійшла тепер в усі підручники математичного аналізу і математичної фізики під ім'ям формули Остроградського-Гаусса. Цікаво зауважити, що багато іноземних авторів неодноразово відзначали пріоритет Остроградського у виведенні цієї формули. Так, наприклад, Максвелл писав: «Ця теорема була вперше дана Остроградським в 1828 р.» (див. його «Трактат про електрику і магнетизм» - «Treatise on Electricity and Magnetism», t. I, 1873, стор. 117). Гаусс до Остроградського вивів цю формулу лише для окремих випадків поверхонь в припущенні, що $P=x$, $Q=y$, $R=z$. Формула (19.1), що зв'язує інтеграл, взятий за об’ємом, з подвійним інтегралом по поверхні, що обмежує цей об'єм, була застосована Остроградським для вирішення деяких питань поширення тепла в твердому тілі. В даний час ця формула грає

Карл Фрідріх Гаусс,
нім. Carl Friedrich
Gauß (1777–1855)

величезну роль в математичній фізиці, векторному аналізі та інших розділах математики.

Ймовірно, ця формула була предметом роботи Остроградського «Про доведення однієї теореми інтегрального числення», що не дійшла до нас, - однієї з тих трьох статей, які були ним подані в Академію наук в 1828 р. після повернення з Франції. Від її опублікування автора могло утримати, можливо, те, що уже тоді він передбачав більш істотне її узагальнення. Але і узагальнення своєї формули Остроградський дав тільки попутно, в своїх «Мемуарах про обчислення варіацій кратних інтегралів», закінчених на початку 1834 р., але надрукованих лише в 1838 р.

Нехай x, y, z, t, ... - незалежні змінні, функція L $(x, y, ...)$ має похідні і має таку властивість, що нерівності

$$L(x,y,z,t,...)<0 \tag{19.2}$$

задовольняють тільки точки з обмеженими координатами x, y, z, ... За цих умов ми скажемо, що рівняння

$$L(x,y,z,t,...)=0 \tag{19.3}$$

визначає границю області, в якій має місце нерівність (19.2).

Нехай далі P, Q, R, ... - функції тих же аргументів, однозначні і безперервні в області (19.2) і мають похідні. Тоді

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}+...\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z...=\int\frac{P\dfrac{\partial L}{\partial x}+Q\dfrac{\partial L}{\partial y}+R\dfrac{\partial L}{\partial z}+...}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial L}{\partial z}\right)^2+...}}\,\mathrm{d}s, \tag{19.4}$$

де перший інтеграл поширюється на область (19.2), а другий - на її границі (19.3).

У двох пізніших дослідженнях - «Про одну замітку щодо певних інтегралів, що виводяться з теорії ортогональних областей» і «Про один певний інтеграл» Остроградський розглянув цікаві окремі випадки своєї формули.

Ґабрієль Ламé,
фр. Gabriel Lamé
(1795–1870)

Приводом до першої статті була замітка Ламе, надрукована в 1838 р. в т. III «Журналу Ліувілля» («Journal de malhematiques pures el appliquees», p. 552-555). У цій замітці Ламе вивів формулу Остроградського для тривимірного випадку, коли (див. формулу (19.1)) $P=x$, $Q=y$, $R=z$, тобто коли об'ємний інтеграл в (19.1) являє собою втричі більший обсяг області інтегрування, і застосував її, використовуючи перехід до криволінійних координат. Очевидно, що як загальна формула Остроградського (для тривимірного випадку), так і частинна формула Гаусса, виведена останнім якраз при $P=x$, $Q=y$, $R=z$, не були відомі Ламе.

Остроградський не тільки вказує у своїй статті 1840 р. що вихідна формула Ламе є окремим випадком його загальної формули, а й виводить слідства, які потрібні були Ламе, більш просто і витончено.

У другій статті (1860) було розглянуто окремий випадок формули (19.4), а саме, коли рівняння границі є

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = 1, \tag{19.5}$$

а функції P, Q, R, ... визначаються рівняннями

$$P = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x},\ \ Q = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}, \ldots,$$

де u і v - однородні функції відповідно порядків m і n ($m \neq n$), які задовольняють рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \ldots = 0$$

і

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \ldots = 0.$$

В цьому випадку рівняння (19.4) набуває такого вигляду:

$$\int uv\,\mathrm{d}s = 0, \tag{19.6}$$

що і являє собою потрібний результат.

Робота з варіаційного числення «Мемуар про обчислення варіацій кратних інтегралів» [Остроградский, 1861, т. 3, с. 45—64] звернула на себе увагу, була двічі передрукована ще за життя Остроградського (в т. 15 журналу Крелль і як додаток до книги з історії варіаційного числення Тодхантера [Todhunter, 1861]), і все ж він не був повністю оцінений і використаний сучасниками. Як відомо, Ейлером і Лагранжем був розроблений метод отримання диференціальних рівнянь і крайових умов, яким повинні задовольняти шукані функції, що входять під знаком інтеграла, на основі обчислення першої варіації цього інтеграла. До кратних інтегралів зі змінними границями Ейлеру не вдалося застосувати загальний метод: тут він припустився помилки, яка зробила його аналіз застосовним лише в дуже окремих випадках.

Характеризуючи це положення, Остроградський починає свій мемуар так: «Застосування методу варіацій до функцій, які містять лише інтеграли, що відносяться до однієї змінної, не залишає нічого бажати ні з боку простоти, ні з боку спільності. Але не так воно є в тому випадку, коли йдеться про відшукання варіації кратного інтеграла, взятого відносно декількох змінних. Деякі питання, що стосуються цієї нагоди, вимагають більшої спільності, ніж та, яку дає метод варіацій у вигляді, викладеному Лагранжем. Звідси можна зробити висновок, що принципи цього великого математика застосовувалися не зовсім правильно, або що самі ці принципи не завжди є достатніми». І Остроградський продовжує: «Безсумнівно, з цієї причини Пуассон в мемуарі, який доповів 10 листопада

1831 р. Паризькій академії наук, визнав за необхідне додати до принципів варіаційного числення, встановлених Лагранжем, щось на зразок нового принципу. Він полягає в тому, що незалежні змінні в задачі розглядаються як функції інших допоміжних змінних. Ці останні зникають самі собою в ході числення; але, вводячи їх в разі двох незалежних змінних x і y, Пуассон уникає для варіацій δx і δy припущення про незалежність першої від величини y, а другої - від величини x. Тим часом, всі математики, які відшукували варіацію частинних похідних функції від двох змінних, в силу самої природи своїх обчислень, були в даному разі змушені робити це припущення».

Чудова робота Пуассона «Про варіаційне числення»[1] - перша, в якій правильно і в загальному вигляді отримана перша варіація подвійного інтеграла

$$I=\iint\limits_{B} U\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ldots\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (19.7)$$

(B - двовимірна область інтегрування, $u=u(x,y)$)

у вигляді

$$\delta I=\iint\limits_{B}\left(\delta U+U\frac{\partial\delta x}{\partial x}+U\frac{\partial\delta y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (19.8)$$

В (19.8) варіації незалежних змінних δx і δy розглядаються як нескінченно малі і довільні функції незалежних змінних x і y, тоді як раніше «всі математики» змушені були обмежувати себе припущенням, що δx не залежить від y, δy не залежить від x. Але ці обмежувальні припущення, каже Остроградський, «здаються витікаючими з найпростіших і елементарних принципів диференціального числення; і поки не доведено, що ці принципи є недостатніми (або що їх неправильно застосовували), залишається відкритим питання, чи слід віддати перевагу формулам Пуассона для варіації частинних похідних функції від двох змінних, а не формулам Ейлера і інших математиків, що стосуються того ж самого питання. По суті, останні формули є окремими випадками перших; але, можливо, цей окремий випадок повинен мати місце завжди». І ось Остроградський прямими обчисленнями показує, що якщо $u=u(x,y)$ то, як і у Пуассона,

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\delta u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta x}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\delta y}{\partial x}, \qquad (19.9)$$

тоді як у Ейлера та інших математиків виходило, що

Леона́рд Е́йлер,
нім. Leonhard Euler
(1707-1783)

Жозеф-Луї Лагранж,
фр. Joseph-Louis
Lagrange
(1863–1945)

---

[1] S.D. Poisson. Sur Ie calcul des variations. - «Memoires de l'Academie d. Sciences», 12, 1833.

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\delta u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta x}{\partial x}, \qquad (19.10)$$

що дійсно є окремим випадком (19.9), якщо прийняти, що δx не залежить від y. Аналогічно іде справа з варіацією $\delta\frac{\partial u}{\partial y}$ і з варіаціями похідних вищих порядків. Але у Пуассона його правильні формули виведені спеціальним методом - це «новий принцип», про який говорить Остроградський. Суть методу полягає в тому, що x і y розглядаються як функції двох нових незалежних змінних, що вже не підлягають варіюванню. При цьому «Пуассону довелося тут обмежитися випадком подвійного інтеграла фактично не тому, що подальше узагальнення для $n>2$ вже не складало труднощів, а навпаки, як раз в силу того, що для поширення результатів на загальний випадок будь-якого n бракувало ряду найбільш необхідних для цього передумов ... »[1].

Остроградський, не обмежуючись тим, що він розкрив характер помилки, допущеної Ейлером, переходить до розгляду загального випадку і показує, як обчислити першу варіацію n-кратного інтеграла

$$V=\int\limits_B U\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ldots, \qquad (19.11)$$

де U - функція від x, y, z, ..., від $u(x,y,z,\ldots)$ і від похідних будь-якого порядку функції u по її n аргументах, а B позначає область інтегрування, яку Остроградський задає нерівністю $L<0$, «де L - функція x, y, z ...». Варіації, що розглядаються Остроградським, - це так звані слабкі варіації: разом з $\delta x,\delta y,\delta z,\ldots$ нескінченно малими вважаються і всі частинні похідні, які зустрічаються в численні. Цього Остроградський не обумовлює, як не обговорювали цього і всі його попередники і сучасники. Він отримує спочатку для δV свою першу формулу

$$\delta V=\int\limits_B\left[\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x}+\frac{\partial(U\delta y)}{\partial y}+\frac{\partial(U\delta z)}{\partial z}+\ldots\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ldots+\int\limits_B DU\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ldots \qquad (19.12)$$

де DU – друга частина варіації δU; ця частина залежить від збільшення Du величини u, яке слід додати до u всюди, де ця функція міститься в U».

Щоб перетворити (19.12), Остроградський попутно: 1) виводить в загальному вигляді свою формулу перетворення n-кратного інтегралу від виразу типу дивергенції - це потрібно для перетворення першого доданка в правій частині (19.12); 2) вводить, в зв'язку з заміною змінних в n-кратному інтегралі, функціональні визначники одночасно з Якобі, ім'ям якого вони названі[2]; 3) вперше в математичній літературі роз'яснює, як обчислювати n-кратний інтеграл n повторними інтегруваннями, тобто як при цьому послідовно визначати межі при окремих інтегруваннях. Це дозволяє йому отримати новий вираз для варіації

---

[1] Е.Я. Ремез. Об исследованиях М.В. Остроградского в области анализа.— П.с.тр., т. III, стр. 379.

[2] Якобі в тому ж 1834 р. опублікував в журналі Крелль статтю про ці визначники, де вивів ряд їх властивостей, аналогічних властивостям звичайної похідної.

δV, який в не зовсім розкритому вигляді дає як диференціальне рівняння (рівняння Ейлера-Остроградського), так і крайові умови варіаційної задачі.

Моріц Герман Яко́бі,
нім. Moritz Hermann von Jacobi
(1801–1874)

Заключна частина мемуара викладена досить стисло, і її глибокий зміст розшифровується не без зусиль. Цим пояснюється те, що Паризька Академія наук через кілька років після появи мемуара, в 1840 р., запропонувала на здобуття великої премії з математичних наук на 1842 р. тему: «Знайти граничні рівняння, які мають бути приєднані до рівнянь невизначених для того, щоб цілком визначити maxima і minima кратних інтегралів», а потім присудила в 1844 р. премію Саррюсу, який по суті не пішов далі Остроградського, а у своєму викладенні допустив цілий ряд помилок. Почесним відгуком Паризька Академія (на тому ж конкурсі) відзначила роботу Ш. Делоне, який сам визнав, що «Остроградський подолав головні труднощі питання, запропонованого академією», і що його метод «мало чим відрізняється від методу Остроградського».

В своєму мемуарі про ізопериметричну проблему, Остроградський показав, що в одновимірному випадку ейлерові рівняння варіаційної задачі з декількома невідомими функціями можуть бути представлені в канонічному вигляді.

У статті «Спосіб варіацій» В. Беренса[1], Остроградський роз'яснює своє трактування поняття варіації функції (коротко він виклав її в третій зі своїх «Нотаток з різних питань математичного аналізу», опублікованих в 1838 р.)[2]. У цій же статті він розповідає про роботи Гаусса і Пуассона про варіації подвійних інтегралів і спрощує в одному з пунктів викладення свого основного мемуара 1834 р. До цього ж мемуара примикає і стаття 1838 р. «Про перетворення змінних в кратних інтегралах»[3].

У мемуарі «Про числення варіацій кратних інтегралів» Остроградський виводив формулу для заміни змінних в n-кратному інтегралі так, як це робив Лагранж (для потрійного), і повторив його помилку (разом з усіма «проміжними» авторами). Помилка полягала в тому, що при виведенні загальної формули заміни змінних елемент області інтегрування (багатовимірний елементарний об'єм) в старих координатах $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ldots$ визначався в нових координатах X, Y, Z, ... і для нього отримувався вираз $I\,\mathrm{d}X\mathrm{d}U\mathrm{d}Z$ ..., де I - функціональний визначник старих координат $x, y, z\ldots$ за новими. На цій підставі $\int F(x, y, z\ldots)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ldots$ і перетворився в $\int F(X, U, Z\ldots)I\cdot\mathrm{d}X\mathrm{d}U\mathrm{d}Z\ldots$... Формула виходить вірна (бо інтегрування якби

---

[1] П. с. тр., т. III, стр. 207.

[2] Там же, стр. 120—122.

[3] Там же, стр. 109.

поглинає припущену помилку), проте застосована при її виведенні рівність $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ldots = I\,\mathrm{d}X\mathrm{d}U\mathrm{d}Z\ \ldots$ помилкова.

Щоб роз'яснити цю помилку, слідуючи за Г.М. Фіхтенгольцем[1], відтворимо спочатку міркування Лагранжа. Йому потрібно «виразити старий елемент об’єму $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ через диференціали нових змінних $\mathrm{d}p, \mathrm{d}q, \mathrm{d}r$, виходячи з співвідношень

$$\mathrm{d}x = A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}q + C\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}y = D\mathrm{d}p + E\mathrm{d}q + F\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}z = G\mathrm{d}p + H\mathrm{d}q + J\mathrm{d}r.$$

Для цього Лагранж послідовно обчислює всі три виміри $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ елементарного паралелепіпеда. Так, щоб отримати $\mathrm{d}z$, він вважає в попередніх співвідношеннях x = const і y = const, тобто $\mathrm{d}x = 0$ і $\mathrm{d}y = 0$, потім виключає $\mathrm{d}q$ і $\mathrm{d}r$ і приходить до формули (якщо використовувати звичні позначення визначників)

$$\mathrm{d}z = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}}\mathrm{d}r.$$

Щоб обчислити $\mathrm{d}y$, Лагранж вважає $\mathrm{d}x = 0$ і $\mathrm{d}z = 0$, тобто $\mathrm{d}r = 0$, $A\mathrm{d}p + B\mathrm{d}q = 0$, виключає $\mathrm{d}p$ і знаходить

$$\mathrm{d}y = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}}{A}\mathrm{d}q.$$

Нарешті, для обчислення $\mathrm{d}x$ він вважає $\mathrm{d}y$ = 0 і $\mathrm{d}z$ = 0, що дає $\mathrm{d}r = 0$, $\mathrm{d}q = 0$, звідки

$$\mathrm{d}r = A\mathrm{d}p.$$

Якщо перемножити знайдені значення $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ і $\mathrm{d}z$, то остаточно отримуємо

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{vmatrix}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}r.$$

Остроградський в мемуарі 1834 р. проводить такі ж обчислення в загальному випадку n змінних. Його помилка, яка «повторює помилку Лагранжа, полягає в тому, що обчислюючи послідовно диференціали старих змінних $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \ldots$ через нові $\mathrm{d}X, \mathrm{d}U, \mathrm{d}Z\ldots$ автор на кожному новому кроці вперед, сам того не помічаючи, користується вже іншими, ніж раніше, значеннями цих останніх диференціалів; наприклад, щоб отримати $G\mathrm{d}y$, потрібні не ті $\mathrm{d}X, \mathrm{d}U, \mathrm{d}Z, \ldots$, які перед тим були використані для отримання $\mathrm{d}z$, і т.д.» (Г.М. Фіхтенгольц).

---

[1] Там же, стр. 348—350.

Тому формула

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ldots = I\mathrm{d}X\mathrm{d}G\mathrm{d}Z\ldots$$

невірна, навіть з точністю до нескінченно малих вищих порядків.

У статті 1838 р. «Про перетворення змінних в кратних інтегралах» Остроградський вперше в історії інтегрального числення дає правильну геометричну інтерпретацію виразу $I\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$ як елемента площі в нових координатах, правильне (геометричне) обґрунтування правила заміни змінних в подвійних інтегралах, і зауважує, що «вказане вище перетворення легко можна зробити незалежним від уявлень про криві і поширити на будь-яке число інтегралів». Але, пише він, «ми вважали за краще скористатися геометричними міркуваннями для більшої наочності, бо призначали це міркування для осіб, які не мають досвіду в математичному аналізі». Залишається додати, що в збережених рукописах Остроградського є і виведення формули заміни змінних для загального випадку - інтеграла будь-якої кратності.

Эже́н Ша́рль Каталан, фр. Eugène-Charles Catalan (1814 - 1894)

Трохи пізніше, в 1841 р., з'явилися роботи Якобі і Каталана, в яких ці математики, незалежно один від одного, дали доведення загальної формули заміни змінних в n кратному інтегралі. Цей результат треба поставити в заслугу трьом науковцям, але Остроградський першим отримав його.

Роботи з механіки

Зо два десятки робіт Остроградський присвятив механіці. Серед них дві великі книги: «Курс небесної механіки» і «Лекції з аналітичної механіки». Обидві ці книги цікаві як своїм змістом, так і побудовою. Крім того, вони стали першим фундаментальним викладенням цих принципових питань в російській навчальній і науковій літературі.

Мико́ла Єго́рович Жуко́вський (1847 - 1921)

У роботі «Загальний розгляд про моменти сил» (1834) Остроградський розвинув думку про поширення методу можливих переміщень на системи зі звільненими зв'язками за умови, що повна робота сил дорівнює або менше нуля. Отримані при цьому результати були їм застосовані до механічної системи, гнучкої нерозтяжної нитки, нестисливої рідини. Ця робота закінчується розглядом питання про рух системи зі звільненими зв'язками, що не залежать від часу. При цьому повністю з'ясовується, в який момент руху відбувається звільнення від зв'язку. Пізніше М.Є. Жуковський писав, що «з ім'ям Остроградського завжди буде пов'язане поширення способу можливих переміщень на системи зі звільненими зв'язками і викладення теорем динаміки за допомогою розгляду варіацій координат, що походять від зміни довільних постійних»[1].

Думки про виведення рівнянь динаміки системи зі в'язями, залежними від часу, Остроградський коротко виклав в замітці 1841 р. «Про принцип можливих швидкостей і силу інерції». Ця замітка була запереченням на викладення принципу Даламбера в курсі механіки Пуассона. Вона закінчується чіткою критикою уявлень про фіктивність сил інерції, яким Остроградський надавав реальне значення. Свій погляд на ці системи, а також на застосування методу можливих переміщень для виведення рівнянь динаміки Остроградський докладно розвинув в статті «Мемуар про можливі переміщеннях систем, пов'язаних зі змінними умовами» (1838).

До поширення методу можливих переміщень Лагранжа відноситься дослідження «Мемуар про загальну теорію удару» (1854). У цій роботі вперше був запропонований загальний метод визначення швидкостей точок будь-якої системи при ударі об непружну в'язь. У ній теорема Карно (що дана для випадку зіткнення твердих тіл) про те, що при ударі об непружну в'язь відбувається втрата живої сили, що дорівнює живій силі втрачених швидкостей, була поширена на довільні системи з в'язями. Зазначена робота привернула увагу найвизначніших вчених того часу і дала привід до дискусії щодо пріоритету, пов'язаного з узагальненням теореми Карно. Однак якщо і були якісь узагальнення теореми Карно до мемуара Остроградського, то вони стосувалися лише окремих питань. Першості же Остроградського у вирішенні задач теорії удару в загальному випадку ніхто не оскаржував.

COURS

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

FAIT PAR

M^r. M. A. OSTROGRASKI

ET RÉDIGÉ

PAR

J. JANOUCHEVSKI,

CAPITAINE DU GÉNIE DES VOIES DE COMMUNICATION.

St.-PÉTERSBOURG

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1831.

Титульний аркуш книги
«Курс небесної механіки»

Невелика стаття «Замітка про варіації довільних сталих в задачах механіки» (1829) зіграла істотну роль в розвитку механічних ідей Остроградського. Зокрема, її ідеї були покладені в основу «Курсу небесної механіки». Рецензенти цього курсу - Араго і Пуассон - відзначали, що основна його ідея «належить автору» і «гідна уваги» і «що він виводить звідси ... принципи живих сил, центру ваги і площ, розглядаючи спеціальним чином довільну постійну, яка додається до тягаря, коли і сили і в'язі системи не залежать від цієї змінної ... ».

До раніше вказаних робіт, особливо до робіт 1838 р., примикає і стаття 1832 р. «Про рівновагу мотузкового багатокутника і гнучкої нерозтяжної нитки», а також глави XVIII-XX його «Лекцій з аналітичної механіки», в яких на основі поєднання принципу можливих переміщень (в його узагальненій формі) з принципом Даламбера були виведені

---

[1] Жуковский Н.Е. Ученые труды М.В. Остроградского по механике. — Собр. соч., т. VII. М. — Л., 1950.

рівняння руху систем з неутримуючими, але стаціонарними в'язями. На закінчення ж зроблені деякі зауваження щодо нестаціонарних в'язей, але вони носили попередній характер. Докладно розглянуті ці питання були в роботі «Мемуар про миттєві переміщення систем, підпорядкованих змінним умовам» (1838).

Ця робота має принципове значення для розвитку механіки. У ній Остроградський виклав визначення дійсних і можливих переміщень в поєднанні з узагальненим формулюванням принципу можливих переміщень; розглянув питання про сили інерції і довів їх реальність; розглянув в'язі самого загального виду - нестаціонарні, неутримуючі, неголономні; рівняння руху складав для довільних осей координат.

У ряді робіт Остроградський розвинув теорію канонічних рівнянь механіки. Відомо, що Гамільтон показав для випадку існування силової функції можливість подання диференціальних рівнянь руху системи точок в формі, що носить тепер назву канонічної. У результатах Гамільтона особливу роль грала функція, названа ним головною. Як зауважив О.М. Ляпунов в доповіді, присвяченій сторічному ювілею Остроградського, «при всій важливості цього відкриття воно не могло мати особливого практичного значення внаслідок складності умов, накладених Гамільтоном для визначення головної функції». У 1836 р. Якобі зауважив, що результат Гамільтона допускає узагальнення, при якому замість головної функції може розглядатися інша, що представляє собою будь-яке рішення деякого диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку. Це зауваження призводило до особливого методу інтегрування диференціальних рівнянь механіки. Згодом він узагальнив цей результат в лекціях, прочитаних в Кенігсберзькому університеті взимку 1842-1843 навчального року. Це узагальнення стосувалося перенесення результату Гамільтона на випадок, коли між точками системи є в'язі. Ніяких публікацій про це Якобі не зробив, і тільки в 1866 р. його лекції були видані Клебшем, коли і Якобі і Остроградський вже померли. Це означає, що Остроградський не міг бути знайомий з тим, що повідомив слухачам Якобі в його лекціях 1842-1843 навчального року. Тому результати Остроградського в роботі «Про інтеграли загальних рівнянь динаміки» (1846) отримані незалежно від Якобі. Якраз в цій статті міститься виведення канонічних рівнянь динаміки і ряд відповідних теорем в припущенні наявності в'язей, які можуть залежати від часу.

Вільям Ровен Гамільтон, англ. William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Олександр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918)

У 1848 р. Остроградський досліджував більш загальну задачу, яку він назвав ізопериметричною. Для неї їм було отримано результат, аналогічний результату його і Якобі, щодо канонічних рівнянь механіки. Найбільше дослідження Остроградського, пов'язане з механікою, «Мемуар про диференціальні рівняння, що відносяться до ізопериметрів» (1848) містило в якості окремих випадків результати Гамільтона, Якобі і самого Остроградського. Це показує, що успіхи теоретичної механіки XIX ст. значною мірою пов'язані з ім'ям Остроградського, і воно ніяк не може бути забуто в історії механіки. Про це слід не забувати і при читанні курсів лекцій, оскільки в курсах лекцій ми не тільки викладаємо теорію, а й виховуємо. Водночас великий виховальний вплив має знання істинних історичних подій.


Альфред Клебш,
нім. Alfred Clebsch
(1833 – 1872)

З середини XIX ст. починається інтенсивна розробка всього складного кола механічних, математичних і фізичних ідей, пов'язаних з варіаційними принципами механіки, з теорією Гамільтона-Якобі, з вченням про перетворення.

Детальний розгляд всіх віднесених сюди робіт представляє, власне кажучи, вже задачу історії варіаційного числення або історії аналітичної динаміки в цілому. Розглянемо лише ті з них, які в тій чи іншій мірі істотно збагатили, розвинули і поглибили розуміння варіаційних принципів механіки, перш за все з математичної точки зору. Перше місце тут по праву належить видатному українському математику М.В. Остроградському.

У 1848 р. Остроградський публікує статтю [Ostrogradsky, 1958], що містить важливі результати в розвитку математичної теорії рівнянь руху. Він показав, що в разі, коли силова функція містить час, рівняння руху можуть бути перетворені з лагранжевої в гамільтонову форму.

Нехай маємо функцію n змінних x_i

$$F = F(x_i).$$

Введемо нову групу змінних y_i за допомогою перетворення

$$y_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{19.13}$$

причому гессіан, утворений другими похідними від F, передбачається відмінним від нуля, так як тільки за цієї умови рівняння (19.13) мають рішення для x_i (як функції y_i.

Введемо нову функцію G

$$G = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - F. \tag{19.14}$$

Підставимо сюди x_i, виражені з рівнянь (19.13); тоді

$$G = G(y_i).$$

Розглянемо варіацію G, обумовлену довільною нескінченно малою варіацією y_i. Маємо:

$$\delta G = \sum \frac{\partial G}{\partial y_i}\delta y_i = \sum (x_i \delta y_i + y_i \delta x_i) - \delta F = \sum \left(x_i \delta y_i + (y_i - \frac{\partial F}{\partial x_i})\delta x_i \right). \quad (19.15)$$

Так як коефіцієнт при δx_i, дорівнює нулю згідно з визначенням (19.13), то

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}; \quad (19.16)$$

це рівняння, симетричне з рівнянням (19.13), відображає перетворення Лежандра:

$$\left.\begin{array}{ll} y_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i} & x_i = \dfrac{\partial G}{\partial y_i} \\ G = \sum x_i y_i - F & F = \sum x_i y_i - G \\ G = G(y_i) & F = F(x_i) \\ y_i & x_i \end{array}\right\} \quad (19.17)$$

Таким чином, так само, як нові змінні суть частинні похідні від вихідної функції по вихідним змінним, так і вихідні змінні суть частинні похідні нової функції по нових змінних. Тому з повним правом як ті, так і інші групи змінних можуть розглядатися і як вихідні, і як знову отримані. Обидві групи абсолютно еквівалентні при розглянутому перетворенні.

Розглянемо дещо детальніше перетворення Лежандра. Нехай тепер

$$F = F(z_i, x_i), \quad (19.18)$$

де z_i не є функціями x_i, і входять в F як деякі параметри, які не беруть участі в перетворенні Лежандра. Нова функція G також буде містити ці параметри. Якщо тепер знайти, як в (19.15), δG вважаючи, що z_i і y_i змінюються незалежно, то крім виразу (19.15), яке не зміниться, отримаємо додаткове співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = -\frac{\partial G}{\partial z_i}. \quad (19.19)$$

Застосуємо перетворення Лежандра до лагранжіана

$$L = L(q_n, \dot{q}_n, t).$$

Надалі для нашого розгляду несуттєво, чи є $\dot{q}_n$ дійсними швидкостями руху; істотно лише те, що $\dot{q}_n$ є змінними, що не залежать від змінних q_n. Нехай перетворюються тільки змінні $\dot{q}_n$, а решта $n+1$ змінних залишаються без зміни.

Перш за все введемо нові змінні

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (19.20)$$

і нову функцію H, звану повною енергією,

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \quad (19.21)$$

Виразимо нові змінні p_i через старі, тобто

$$H = H(q_n, p_n, t).$$

Функцію H ми будемо називати, як зазвичай, гамільтоніаном. Тоді перетворення Лежандра дасть:

в старій системі	*в новій системі*
Функція: лагранжіан L	Функція: гамільтоніан H
змінні: швидкості $\dot{q}_i$	змінні: імпульси p_i
$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$
$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$	$L = \sum p_i \dot{q}_i - H$
$H = H(q_n, p_n, t).$	$L = L(q_n, \dot{q}_n, t).$

Таким чином, застосування лежандрова перетворення до лагранжіана L перетворює його в гамільтоніан H, причому швидкості перетворюються в імпульси.

Що стосується рівнянь Лагранжа, які є рівняннями другого порядку щодо координат q_i то, ввівши нові змінні (19.20), їх можна перетворити в рівняння першого порядку в цих нових змінних, а саме

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Власне кажучи, найменування змінних p_i імпульсами має частинний характер. Вони мають набагато ширший зміст, дозволяючи замінити вихідні n рівнянь другого порядку $2n$ рівняннями першого порядку. Тим самим в рівняння руху входять похідні не вищі за перший порядок. Цей перехід аналогічний тому, як в векторній механіці, визначивши момент як добуток маси на швидкість, переходять від виразу сили як добутку маси на прискорення до виразу її як міри зміни імпульсу.

Згідно з перетворенням Лежандра з визначального рівняння (19.20) отримаємо

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Застосувавши перетворення Лежандра до рівняння (19.21), отримаємо

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Таким чином, лагранжеві рівняння замінюються так званими канонічними рівняннями Гамільтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

які в механіці повністю еквівалентні рівнянням Лагранжа. Однак вони мають велику перевагу перед цими рівняннями в тому відношенні, що похідні по t

знаходяться тільки в лівій частині рівнянь, так як гамільтоніан не містить ніяких похідних від p_i або q_i за часом t.

Дослідимо тепер, як варіація p_i впливає на інтеграл дії. Маємо:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i. \tag{19.22}$$

Так як множник в дужках дорівнює нулю, то це означає, що довільна варіація p_i не впливає на варіацію L. Отже, ця варіація p_i не впливатиме і на інтеграл від L за часом, тому p_i зовсім не повинно обов'язково бути функцією від q_i і $\dot{q}_i$ а варіація узагальнених імпульсів аж ніяк не повинна визначатися варіацією q_i. Отже, варіація інтеграла повинна бути стаціонарною навіть в тому випадку, коли p_i варіюються будь-яким довільним способом, або, інакше кажучи, навіть в тому випадку, коли p_i розглядаються як друга група незалежних змінних. Таким чином, можна написати

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\right]\mathrm{d}t \tag{19.23}$$

і вимагати, щоб цей інтеграл мав стаціонарне значення для довільних варіацій q_i і p_i.

Для цієї варіаційної проблеми маємо $2n$ диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L}{\partial p_i} \equiv 0 - \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0;\end{aligned}\right\} \tag{19.24}$$

це і є канонічні рівняння, отримані тепер як система $2n$ диференціальних рівнянь, виведених з інтеграла дії (19.23).

Таким чином, новий варіаційний принцип (19.23) еквівалентний попередньому, але має перед ним ту перевагу, що призводить до диференціальних рівнянь, які мають більш просту структуру: вони - першого порядку, похідні розділені, і рівняння не містять алгебраїчних операцій.

В інтегралі (19.23) як і раніше підінтегральна функція має зміст різниці кінетичної та потенціальної енергій, оскільки перший член залежить від швидкості, а другий - тільки від координат положення, якими тепер є q_i та p_i. Однак кінетична частина підінтегрального виразу є тепер лінійною функцією швидкості $\dot{q}_i$ виду

$$\sum p_i\dot{q}_i.$$

Отже, та обставина, що в класичній механіці в більшості випадків кінетична енергія є квадратичною функцією швидкості, не є необхідним в загальному випадку, так як будь-яка довільна лагранжева функція може бути приведена до канонічної формі.

Принцип Гамільтона-Остроградського

Хоча проблеми класичної механіки зазвичай призводять до лагранжевої функції, яка не містить похідних вище першого порядку, однак і в тому випадку, коли в ній містяться похідні до *n*-го порядку, задача може бути приведена до інтеграла (19.23) і канонічним рівнянням Гамільтона, які можна розглядати як нормальну форму, в яку може бути перетворена будь-яка група рівнянь, що виникає з варіаційної задачі, причому це перетворення не вимагає ніяких інших операцій, крім диференціювання.

Це і було вперше відзначено і досліджено М.В. Остроградським.

Тобто, кожна гамільтонова задача може бути пов'язана з відповідною лагранжевою задачею.

Застосовуючи сформульований ним в 1834-1835 рр. принцип, Гамільтон виходив з припущення, що система може бути і невільна, але кінетична енергія є однорідною функцією другого порядку від узагальнених швидкостей. Таким чином, він неявно припускав стаціонарність в’язей[1]. М.В. Остроградський отримав той же принцип в 1848 р., не накладаючи цих обмежень, а розглянувши пов'язану з ним варіаційну задачу в найзагальнішому вигляді. Тому даний принцип отримав назву принципу Гамільтона-Остроградського.

Остроградський читав свій мемуар 29 листопада 1848 р. на засіданні Російської Академії наук і опублікував його в 1850 р.[2] Ось коротко основна ідея Остроградського. Нехай V – функція незалежної змінної t і змінних x_m, які передбачаються також функціями t, і похідних цих функцій по t до n-го порядку включно. Якщо $\delta\int V\mathrm{d}t=0$, то за відомими правилами варіаційного числення отримаємо m диференціальних рівнянь, кожне з яких буде порядка $2n$. Остроградський показав, що ці диференціальні рівняння еквівалентні певній групі $2mn$ диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку.

---

[1] Кінетична енергія і силова функція можуть містити t в явному вигляді. Це має місце як в тому випадку, коли задані кінематичні умови залежать від часу, так і коли силова функція, крім координат положення, містить час явно. Якщо і кінетична енергія і силова функції не залежать від часу, тобто склерономни, то рівняння руху містять в собі фундаментальну теорему, яка називається законом збереження енергії. Якщо ж кінетична енергія, або силова функція або обидві разом залежать від часу, тобто реономни, то такий закон збереження не має місця.

[2] *Ostrogradsky M.* Memoire sur les equations differentielles, relatives au probHme isoperimttres, Memoires de l'Academie des Sciences, т. 6, St. Petersb., 1850, стр. 385—517; «Сборник», стр. 315—387.

Сер Ісаак Ньютон,
англ. Sir Isaac Newton
(1642 - 1727)

Крім перелічених робіт з механіки, які стали істотним внеском в розвиток цієї науки і значно її просунули, Остроградський написав ряд робіт, які не мали такого великого значення для прогресу механіки в цілому, як раніше названі. Перш за все це його перша самостійна робота «Мемуар про поширення хвиль в циліндричному басейні» (1826). Ця задача має багату історію. Першим нею зайнявся І. Ньютон. Значно пізніше, в 1776 р., до неї долучився Лаплас і розглянув її в досить окремому випадку. Майже одночасно з Лапласом цю задачу розглядав Лагранж, який вивчав питання за припущення, що глибина басейну мала. Цей результат він виклав з усіма подробицями в «Аналітичній механіці», неправомірно поширивши висновки на будь-які глибини. Однак докладне дослідження задачі пов'язано лише з іменами Коші і Пуассона, які отримали загальне рівняння в припущенні нескінченної глибини і скінченої малої глибини. Пуассон оскаржував деякі результати Коші, так само як і Коші, в свою чергу, не погоджувався з деякими результатами Пуассона. Найсуттєвіше, що вніс Остроградський в вивчення цього питання, - поширення хвиль в замкнутих басейнах зі скінченими глибинами. Крім зазначеної роботи, на ту ж тему їм була написана ще одна стаття, що відноситься до хвиль в посудині, що має форму сектора кругового циліндра.

Роботи з теорії пружності і теорії потенціалу

Дві основні роботи Остроградського з теорії пружності названі майже однаково: «Про інтегрування рівнянь у частинних похідних малих коливань пружного середовища» (1829 р.)[1] і «Мемуар про інтегрування рівнянь в приватних похідних, що відносяться до малих коливань пружних тіл» (1832 р.)[2]. Роки, коли вони писалися, були початком нового етапу в розвитку теорії пружності.

Після тривалого періоду, від Галілея до 1820 р., коли тільки на частинних задачах створювалися загальні основи механіки пружних тіл, в роботах третього десятиліття XIX ст. (Нав'є, Коші, Пуассона) були отримані диференціальні рівняння рівноваги і руху пружних тіл. Таким чином, був знайдений спільний підхід до трактування задач теорії пружності. Однак ще багато залишалося неясним і спірним; досить нагадати полеміку між Нав'є і Пуассоном, що припадає на те ж десятиліття, про яке йде мова. Тому першочерговою проблемою було застосування нових і загальних рівнянь до окремих задач, які мають певний і ясний фізичний зміст і допускають повний математичний розв’язок. Такою задачею і була та, якій присвячені розглядувані роботи Остроградського. У них, як і в інших своїх роботах, Остроградський був на першій лінії науки свого часу.

---

[1] П. с. тр., т. І, стр. 80—85.

[2] Там же, стр. 86—115.

Одночасно з Остроградським та ж задача, теж в два прийоми, була розглянута одним з творців загальних методів теорії пружності Пуассоном.

В теорії потенціалу почесне місце повинно бути відведено роботі, що носить скромну назву «Замітка про інтеграл, який зустрічається при обчисленні притягань сфероїдів»[1]. Друга робота Остроградського, яка стосується теорії потенціалу, - «Замітка про деякі формули, що відносяться до тяжіння сфери і сфероїда». Тут надано просте, не раз повторене пізніше доведення відомої теореми про тяжіння сфери[2]. Замітка написана в зв'язку з тим, що Пуассон розцінив доведення цієї теореми аналітичним методом як складну задачу, а Остроградський саме засобами аналізу отримав вельми просте доведення. Але перша «Замітка ... » - це багата змістом стаття.

Робота Остроградського дає виведення того диференціального рівняння, якому повинен задовольняти об'ємний (Ньютоновий) потенціал деякої маси, коли точка, що притягується, знаходиться всередині або на границі області, зайнятої масою. Лаплас перший показав, що потенціал U як функція координат точки впливу (a, b, c) задовольняє знаменитому рівнянню в частинних похідних - рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial c^2}=0,$$

але помилився, вважаючи, що це рівняння має місце при будь-якому положенні точки (a, b, c).

Пуассон в роботі 1813 р. виявив помилку Лапласа і вивів рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial c^2}=-4\pi k\rho, \qquad (19.25)$$

для того випадку, коли точка (a, b, c) знаходиться всередині маси, потенціал якої обчислюється (ρ - щільність в точці (a, b, c), k - коефіцієнт в законі тяжіння).

У 1826 р. Пуассон повідомив в «Науковому бюлетені» Паризької Академії наук, не вказуючи виведення, що це рівняння замінюється рівнянням

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial c^2}=-2\pi k\rho, \qquad (19.26)$$

якщо точка (a, b, c) знаходиться на поверхні, що обмежує притягуючу масу (сфероїд по термінології того часу).

Це все, що знав Остроградський, коли писав свою роботу. Додамо, що Пуассон ні в попередньому повідомленні, ні пізніше, при викладі виведення рівняння (19.26), не зробив необхідного застереження про те, що поверхня в точці (a, b, c) гладка. У порівнянні з відомими йому роботами Пуассона Остроградський значно вдосконалив виведення основного рівняння (19.26). Він досліджував також зміну цього рівняння, коли точка (a, b, c) знаходиться на ребрі поверхні або в точці перетину декількох ребер, але для того, щоб ці виведення

---

[1] Там же, стр. 46—58.

[2] Там же, стр. 59—61.

Остроградського мали цілком певний сенс, необхідно якесь узагальнення поняття лапласіана, чого у Остроградського немає. Проте в загальності і строгості підходу Остроградський набагато випередив свій час. Ця робота була новаторською для теорії потенціалу, так як спиралася на нову концепцію інтеграла, розроблену Коші (Пуассон залишився осторонь від цієї новизни), і в ній було строго проведено диференціювання невласних інтегралів по параметру, в чому помилився Лаплас, в чому помилялися і інші математики того часу.

Педагогічна діяльність. Учні

М.В. Остроградський приділяв значну увагу педагогічній діяльності. Наведемо загальну оцінку його курсу «Лекцій з аналітичної механіки», надану проф. Ю.Д. Соколовим: «Лекції з аналітичної механіки» характеризуються багатством матеріалу, повною оригінальністю викладення і, як за часом їх виникнення, так і за змістом займають проміжне місце між трактатами Ж.-Л. Лаґранжа і С.-Д. Пуассона і «Лекціями з динаміки» К. Якобі. В «Лекціях з аналітичної механіки» проявилась притаманна М.В. Остроградському майстерність і ясність викладення. Цей курс відобразив примітний етап у історії розвитку загальних принципів механіки і здійснив у свій час великий і дуже благодійний вплив на розвиток аналітичної механіки у Росії».


Юрій Дмитрович
Соколов
(1896 - 1971)

З поверненням Остроградського до Петербурга розкрився ще один визначний його талант - талант блискучого лектора і педагога. Від славетного Коші він успадкував лаконічність, легкість, витонченість викладу. Вчений викладав одночасно у Головному педагогічному інституті та в чотирьох військових навчальних закладах Петербурга - Морському кадетському корпусі, Інституті корпусу шляхів сполучення, Михайлівському артилерійському та Головному інженерному училищах, виступав з публічними лекціями, серйозно цікавився питаннями викладання та навчальних програм.

За образним висловом М.Є. Жуковського, «Остроградський став ланкою, що з'єднувала нашу вітчизну з тогочасним центром математичного світу. Своїми вченими працями він розширив та поповнив ідеї французьких геометрів, а своїми блискучими лекціями він насаджував ці ідеї серед російських молодих вчених».

М.В. Остроградський вражав сучасників глибиною і строгістю думки, чіткістю аналізу і разом з тим витонченістю викладення. Великого значення він надавав підвищенню ролі фундаментальних знань в інженерній практиці. Навчальні заклади, в яких викладав Михайло Васильович, забезпечували студентам найкращу математичну підготовку. Один з учнів М.В. Остроградського К. Яниш писав у 1838 р., що Остроградського можна назвати «центром усієї математичної діяльності в Росії».

Кілька поколінь інженерів шляхів сполучень, офіцерів армії і флоту, артилеристів, педагогів завдячували Остроградському глибиною своїх знань. Бути учнем Остроградського (а згодом — хоча б учнем когось з його учнів), слухати лекції видатного математика вважалося за велику честь. Збереглося багато захоплених розповідей про М.В. Остроградського як педагога.

Ось фрагмент із спогадів одного з його учнів - інженера В.А. Панаєва: «Остроградський читав у нас аналітичну механіку, його улюблену науку, в якій завдяки йому розв'язано головну її задачу загального руху… Остроградський був творцем не в одній тільки науці про рух… Як геометр-філософ він не переносив окремих вирішень питань: його геній вів до розв'язків загальних, абсолютних. Публічні лекції, які він читав у середині 50-х років, відкрили неосяжний, новий горизонт та нескінченне поле для математичного аналізу… Слухати його лекції було справжньою насолодою, він умів піднімати дух слухачів. Читав він з великим запалом, писав величезними буквами… Вся зовнішність Остроградського справляла враження сили. Дивлячись на його благородне високе чоло, на його приємне обличчя, яке виражало глибокий розум і твердість, ви відчували, що бачите перед собою могутнього мислителя…».

Карл Андрійович
Яниш,
нім. Carl Ferdinand
von Jänisch
(1813 - 1872)

Валеріан
Олександрович
Панаєв
(1824 — 1899)

Головну мету освіти М. Остроградський вбачав у тому, щоб пробудити здатність до самостійного мислення. Він намагався виховати у своїх учнях почуття гідності та впевненості у своїх силах. Великого значення надавав учений підвищенню ролі теоретичних знань в інженерній практиці, формуванню інженерної інтелігенції. Тому не дивно, що він залишив після себе велику кількість талановитих учнів, серед яких можна назвати основоположника теорії автоматичного регулювання І.О. Вишнеградського, творця гідродинамічної теорії тертя М.П. Петрова, вченого-інженера, основоположника теорії розрахунку в мостобудуванні Д.І. Журавського, інженера-фортифікатора Ц.А. Кюї (відомого композитора) та ін. Авторитет і популярність М.В. Остроградського були такими, що вже саме його ім'я стало синонімом вченого. Батьки, відправляючи дітей вчитись, бажали їм «стати другим Остроградським».

На здібних вихованців, які мали гострий і допитливий розум, Остроградський звертав особливу увагу, в них він намагався розвинути схильність до самостійних занять наукою. Результат цієї діяльності був приголомшливим: в досить короткий проміжок часу Остроградському вдалося підготувати цілу плеяду молодих дослідників в різних галузях знань, серед яких математики і механіки Є.І. фон Бейєр (1819-1899), Ф.Ф. Веселаго (1817-1895), І.О. Вишнеградський, Г.Є. Паукер, О.М. Тихомандрицький (1800-1888) і багато інших. Це відмічали і високо цінували всі його сучасники: «Заслуга Остроградського була велика, він приніс дуже велику користь: з його школи вийшло кілька чудових математиків, що утворили, якщо так можна висловитися, перший кадр викладачів для наших навчальних закладів». Причину викладацького успіху Остроградського його учень М.П. Петров[1] бачив в наступному: «Він був видатним вченим і разом з тим мав дивовижний дар майстерного викладання в найцікавішій і живій формі не тільки абстрактних, але, здавалося б, навіть сухих математичних понять. Ця майстерність і допомагала йому в підготовці багатьох чудових викладачів математики».

Лекції Михайла Васильовича справляли незабутнє враження на всіх слухачів незалежно від їх математичних здібностей. Він використовував широкий арсенал засобів для того, щоб викликати у своїх слухачів зацікавленість і любов до математики як до навчального предмета і науці.

Феодосій Федорович
Веселаго
(1817-1895)

Ге́рман Єго́рович
Па́укер
(1822 – 1889)

Іван Олексі́йович
Вишнегра́дський
(1813 - 1872)

Микола Павлович
Петров
(1836 — 1920)

В.А. Панаєв[2] в своїх спогадах зазначав: «Вся молодь з серйозним ставленням до навчання завжди чекала лекції Остроградського з гарячковим нетерпінням, як манни небесної. Слухати його лекції було справжньою насолодою, наче він читав нам високопоетичного твір ... Він був не тільки великий математик, але, якщо можна так висловитися, і філософ-геометр, що вмів надихати слухача. Ясність і стислість його викладів були вражаючі, він не мучив викладками, а постійно тримав думки слухача в напруженому стані щодо сутності питання».

Якщо найкращих учнів Остроградський називав «геометрами», таких було дуже небагато, то до решти звертався по-різному, найчастіше в залежності від навчального закладу: в Головному інженерному училищі – «гусари» і «улани», в Головному педагогічному

---

[1] Петров Микола Павлович (1836-1920) - творець гідродинамічної теорії мастил, почесний член Петербурзької АН.

[2] Панаєв Валеріан Олександрович (1824?) - інженер шляхів сполучення, будівельник Грушевської і Курсько-Київської залізниці, учень Остроградського по Інституту корпусу інженерів шляхів сполучення.

інституті – «землеміри», в Артилерійському училищі – «кінна артилерія», до якої взагалі ставився зверхньо.

Погляди Остроградського змінювалися протягом більш ніж тридцятирічної педагогічної діяльності. Як вони змінювалися простежити навряд чи можливо - матеріали надто уривчасті. Про те, в яку систему вони були зведені, говорять «Роздуми про викладання», написані спільно з А.І. Блумом[1].

У педагогічній практиці Остроградського - викладача вищої школи, про яку ми можемо судити за спогадами його учнів, можна відзначити прийоми і підходи, по духу родинні тим принципам, які він відстоював разом з Блумом в «Роздумах».

Остроградський розвивав ідею необхідності введення елементів вищої математики в курс середньої школи для розвитку в учнів, так би мовити, функціонального мислення. Він певною мірою домігся цього: в 1850 р. в усіх четвертих загальних класах кадетських корпусів було введено викладання елементів вищої математики. Звичайно, при цьому Остроградському довелося долати чималий опір.

Остроградський вважав, що основні поняття вищої математики повинні стати надбанням переважної більшості освічених людей. У цьому сенсі дуже характерним є його висловлювання в статті «Похибки при обчисленні відсотків», написаної для широкого кола читачів.

«Розглянемо ж, якими формулами повинно керуватися при обчисленні складних відсотків. Питання це можна вирішити на підставі найелементарніших правил алгебри, але ми застосуємо диференціальне числення, по-перше, для більшої простоти, а по-друге, щоб воно мало-помалу поширилося на всі класи читачів. Фраза: «Диференціальне числення є трансцендентний або вищий аналіз, доступний вельми небагатьом», - повторювана з часів Лейбніца, повинна, врешті-решт, втратити свою актуальність. Що може бути простіше диференціального числення для читачів, хоча б деякою мірою знайомих з математичними науками?»[2].

Маємо всі підстави зробити висновок, що в таких основних питаннях, як введення елементів вищої математики в курс середньої школи, розвиток функціонального мислення, встановлення зв'язку математики з питаннями фізики та природознавства, наочність викладання, врахування вікових особливостей учнів і т.і., Остроградський ще за 50 років до Фелікса


Готфрід Вільгельм Лейбніц,
нім. Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646-1716)

---

[1] Блум Ісаак Август (1812-1877) - французький математик; закінчивши Політехнічну школу, став офіцером морської артилерії; в 1835 р. пішов з армії, щоб зайнятися педагогічної діяльністю; активний учасник революційних подій 1848 р.; в 1844 р. заснував журнал з точних наук «Bulletin Polytechnique », в 50-х роках видавав журнал з чистої та прикладної математики - «La Science»; автор кількох навчальних посібників.

[2] П. с. тр., т. III, стр. 312—313.

Фелікс Крістіян Клейн,
нім. Felix Christian Klein (1849-1925)

Клейна висловлював і частково втілив ідеї, які потім лягли в основу відомого міжнародного руху за реформу викладання математики. Глибоко помилковою є думка, ніби тільки в 1900-і роки і тільки під впливом ідей Клейна в Росії почав розвиватися рух за реформу викладання алгебри в середній школі. Насправді, рух за реформу викладання математики почався в Росії набагато раніше XX ст., і вимоги, пред'явлені до викладання математики в Росії, йшли далі тих вимог, які висувалися в Західній Європі.

Ініціатором, натхненником і керівником цього прогресивного педагогічного руху в Росії був М.В. Остроградський.

Творчі і особисті зв’язки

Слава і заслужений авторитет в науковому світі нітрохи не затьмарили синівських почуттів прихильності академіка до рідної землі. Щорічно їздив в рідне село Пашенну, де з усіма спілкувався лише українською мовою. Любив дітей, охоче грав з ними, за тутешніми народними звичаями ходив колядувати і щедрувати. Був в хороших земляцьких відносинах з родиною композитора Миколи Лисенка. Проживаючи в Петербурзі, Михайло Васильович Остроградський входив в коло друзів українського генія Тараса Шевченка. Познайомив їх ще в 1837 році Жуковський і з тих пір їх з'єднувала щира дружба. Схоже, це не без впливу свого друга-академіка видатний художник і поет виявляв інтерес і до точних наук - астрономії, математики, фізики. Під час навчання в Петербурзькій Академії мистецтв Шевченко відвідував лекції Остроградського. Про це він згадує в повісті «Художник» (1861): «Я особисто знав геніального математика нашого Остроградського ..., з яким мені траплялося кілька разів обідати разом» ... У «Журналі» 1857 року також міститься згадка про їх дружні відносини: «Від Н.Д. Сєрова ми з Семеном (тобто з Гулаком-Артемовським) переїхали до М.В. Остроградського. Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як надовго від’їзджавшого свого сімейного. Дякую йому. Остроградський з сімейством їде на літо в Малоросію. Прийняв би, каже, і Семена зі мною, але боїться, що в Полтавській губернії сала не вистачить на його утримання ... ».

В листі до С.П. Левицького, знайденому у Шевченка під час трусу в Оренбурзькій фортеці, згадано про якесь доручення, що з ним треба було завітати в Петербурзі до видатного математика. Повернувшись із заслання, поет записав у своєму «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як свого сім'янина, який надовго кудись виїжджав. Спасибі йому».

Їх об'єднувала любов до рідної землі, її мови, пісні і думки про долю свого народу.

Повернувшись із заслання, Тарас Шевченко зустрівся з Остроградським, читав свої вірші. По щоках обох текли сльози, і Тарас Григорович звернувся до господаря, який володів на правах поміщика кріпаками: «Дайте свободу своїм людям, Михайло Васильович». «Я вже це вирішив» - була відповідь Остроградського.

Годинами просиджував Остроградський біля хворого поета. Розумів: катастрофа неминуча. Смерть змученого засланням і москальщиною поета, розправа над освіченими людьми, що дбають про народне благо, особиста невлаштованість - все це боляче ранило душу. Михайло Остроградський вирішує їхати в Україну, виконати заповіт перед Поетом - відпустити кріпаків на свободу і присвятити своє життя просвітницькій роботі, вихованню дітей. Але незабаром після кончини Кобзаря обірвалася і його життя.

Приятелював М.В. Остроградський також з С.С. Гулаком-Артемовським, з М.О. Головком - магістром математичних наук Харківського університету, який поділяв ідеї Шевченка, з М.Г. Білоусовим - колишнім професором юридичних наук Ніжинської гімназії. Із родинами Лисенків та Старицьких Остроградський мав родинні стосунки. Олена Пчілка в нарисі «Микола Лисенко. Спогади і думки» згадує, що бабуся композитора Марія Василівна Булюбаш доводилася сестрою «славетному полтавцю математику Остроградському». Вона жила у Гриньках (це село розташоване поряд з Устимівкою, звідки походила мати видатного вченого). Марія Василівна любила українські пісні й часто зимовими вечорами запрошувала своїх дівчат-покоївок співати. «Можливо, що через ті хори українська пісня найперше влилася чулою і дужою хвилею в серце малого Миколи», - зазначає Олена Пчілка. Це по-новому висвітлює і дитинство майбутнього математика, адже про ті роки збереглися дуже скупі відомості.


Семен Степанович Гулак-Артемовський (1813-1873)


Тарас Григорович Шевченко (1814-1861)


Микола Віталійович Лисенко (1842-1912)

Михайло Васильович на все життя зберіг любов до свого краю, до рідної мови. Навіть під час лекцій він частенько вставляв яке-небудь дотепне українське слівце. Влітку майже щороку виїжджав на Україну і тут, у своєму маєтку, проводив відпустку. Перебуваючи в Пашенній, він з властивою йому широтою влаштовував бенкети селянам. Та найбільше любив насолоджуватися спокоєм українського степового роздолля.

«Перебуваючи на вершині слави, вшанований за свої наукові праці в усій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги.., але своє походження від полтавських дворян він високо цінував», - відзначав М. Є. Жуковський.

Помер М.В. Остроградський раптово 20 грудня 1861 р. у Полтаві по дорозі з Пашенної на лікування до Харкова. Похований він у сімейному склепі у Пашенній.

У біографічній літературі обійшли увагою дивну зміну, яка сталася під кінець життя Остроградського. Мало того, що з віком він став дуже релігійною людиною, Михайло Васильович не приховував своєї віри: він став регулярно відвідувати храм, в його будинку навіть в невеликі свята горіли лампади біля ікон. Поштовхом до такої зміни стала смерть матері - самої близької за духом людини.

В останні хвилини життя поруч з Михайлом Васильовичем перебував священик Є.І. Ісаченко. Через 40 років йому ж довелося служити Божественну літургію в Самсонієвській церкві Петровського Полтавського кадетського корпусу в день святкування 100-річчя від дня народження великого вченого. Збереглися його спогади про останні дні життя Остроградського. Кончина Михайла Васильовича була воістину християнською, він причастився, і останнім рухом слабшаючої руки було хресне знамення.

Володимир Андрійович Стєклов (1864-1926)

У вересні 1901 року, коли відзначалося 100 років від дня народження М.В. Остроградського, з ініціативи Полтавського гуртка аматорів фізико-математичних наук в Полтаві відбулося урочисте засідання. В ньому взяли участь професори В.П. Єрмаков (з Києва), В.А. Стєклов, О.М. Ляпунов (з Харкова), М.Є. Жуковський (з Москви) та ін. Вітальні телеграми з цієї нагоди було отримано з Парижа, Варшави, Тарту, Праги, Кракова, Тбілісі, з багатьох міст Росії та України. Учасники ювілейного зібрання відвідали могилу М.В. Остроградського. М.Є. Жуковський після цього писав: «Коли дивишся на це мирне місце заспокоєння, на широкі поля, що розходяться в нескінченну далечінь, мимоволі виникає думка про вплив природи на дух людини. В математиці, панове, також є своя краса, як у живопису та поезії. Іноді ця краса виявляється в чітких, яскраво окреслених ідеях, коли на видноті кожна деталь висновків, а іноді вона вражає нас широкими задумами, що приховують у собі щось недосказане, але багатообіцяюче. У працях Остроградського нас приваблює загальність аналізу, основна думка, така ж безмежна, як і широкий простір його рідних полів».

Математики давно звикли до термінів: рівняння Остроградського, метод Остроградського, формула Остроградського-Гаусса, принцип Остроградського-Гамільтона. Та в наш час у наукових журналах з математичної фізики з'явилися нові терміни: механіка Остроградського, квантова теорія поля Остроградського, варіаційні принципи Остроградського. Як виявилося, саме ідеї М.В. Остроградського дають можливість правильно описувати рух електрона в магнітних полях або спінові ефекти в квантовій теорії поля. Оглядаючись подумки на життєвий шлях великого вченого, ми знову і знову з вдячністю вклоняємося його пам'яті, бо в наших сьогоднішніх досягненнях є велика частка його праці.

НАРИС 20

В.Л. КИРПИЧОВ

Поки живе людство не замовкне і жива мова, і передача цією мовою положень науки .

В.Л. Кирпичов

Віктор Львович КИРПИЧОВ
(1801–1861)

Сім'я, навчання, Петербузький період життя (1845-1885)

Віктор Львович Кирпичов народився 8 жовтня (26 вересня) 1845 р. в Петербурзі. Його дід, Матвій Кирилович Кирпичов (1781-1868), син селянина в одному з сіл Вітебської губернії, був у відомому сенсі видатною особистістю. Саме з нього і починається популярність роду Кирпичових. Він дав гарне виховання своєму синові Льву Матвійовичу Кирпичову (1808-1862). У 1826 р. Лев Кирпичов блискуче закінчив Головне інженерне училище. Як одному з перших учнів йому запропонували залишитися в училищі викладачем математики.

Лев Матвійович був добре знайомий зі знаменитим вітчизняним математиком М.В. Остроградським, який в ті роки викладав у всіх військових навчальних закладах Петербурга. Остроградський дуже схвально відгукувався про здібності та знання Льва Матвійовича. За словами А.А. Радцига (одного з біографів В.Л. Кирпичова) теплі дружні стосунки пов'язували Льва Матвійовича з відомим російським ученим, математиком Віктором Яковичем Буняковським (1804-1889). На честь Буняковского він і назвав свого сина Віктором. Радциг підкреслює, що Лев Матвійович «з великою повагою ставився до цих знаменитих російських математиків і передав це почуття дітям». Дійсно, В.Л. Кирпичов виключно високо цінував заслуги М.В. Остроградського у розвитку математичної освіти в Росії, про це, зокрема, він писав в статті [Кирпичёв, 21].

Михайло Васильович
Остроградський
(1801 — 1861)

Віктор Якович Буняковський
(1804-1889)

Іван Олексійович
Вишнеградський
(1832-1895)

На той час, коли через хворобу Лев Матвійович був змушений в 1848 р. вийти у відставку, в родині Кирпичових росли сім синів і одна донька. Вкорінені в родині військові традиції вплинули на долю Віктора та його братів. Всі вони закінчили Полоцький кадетський корпус, військове училище і військові академії. Лев, Костянтин, Віктор і Ніл у подальшому стали професорами, визнаними у своїй галузі фахівцями, викладачами військових навчальних закладів. П'ятий брат, Михайло (1847-1875), з 1871 р. також читав лекції, але з хімії. Він був улюбленим асистентом Д.І. Менделєєва і брав участь в його дослідженнях пружності газів (результати цих робіт викладені Д.І. Менделєєвим в 1875 році в книзі «Про пружності газів»). Михайло подавав великі надії як талановитий хімік. Він був навіть призначений репетитором і викладачем Михайлівській артилерійській академії, але захворів на сухоти і помер у віці 27 років. Життя інших двох братів Матвія і Івана, теж за відгуками виключно здатних, склалася не зовсім вдало внаслідок випадкових несприятливих обставин.

У 1862 р. після закінчення кадетського корпусу Віктор разом з Костянтином відправляються в Петербург і вступають в однорічне Михайлівське артилерійське училище. В училищі Віктор вивчав математику під керівництвом одного з учнів М.В. Остроградського Н. Буднєва. У цей період Віктор особливо зблизився зі своїм старшим братом Львом.

Лев Львович був виключно обдарованою особистістю. Про величезну ерудицію автора, широту його наукового кругозору свідчить таке його історичне спостереження, яке вельми оживляло книги з вузької спеціальної, зокрема військової тематики. «День народження Галілея, - пише Л.Л. Кирпичов, - є одночасно і днем смерті Мікеланджело. Ця дивна випадковість давно вже помічена біографами Галілея. Вони вбачають в ній як би ознаку того, що з цих пір припиняється блискуча епоха відродження мистецтв, одним з головних діячів якої був Мікеланджело, і починається не менше блискуча епоха відродження наук, одним з головних діячів якої став Галілей. Рік смерті Галілея є разом з тим роком народження Ньютона. У цій дивній випадковості історики цивілізації бачать неперервний ряд натуралістів з часів Галілея.

Галілей зробив багато наукових відкриттів. Він придумав телескоп, знайшов плями на Сонці, на Місяці гори, супутники Юпітера, у Венери фази, у Сатурна дивну будову, згодом роз'яснену Гюйгенсом. Але всі ці відкриття, безперечно важливі, незначні порівняно з тими, які викладені в третьому розділі «Бесід», кращому з його творів … де Галілей започатковує динаміку, балістику, теорію опору матеріалів».

Заключна глава книги Л.Л. Кирпичова присвячена законам подібності. На цю ж тему він опублікував грунтовну роботу в «Артилерійському журналі». Як бачимо, Лев Львович розглядає проблему, яка лягла в основу одного з найважливіших напрямків у наукових дослідженнях Віктора Львовича, якому, зокрема, належить пріоритет виведення умов подібності при пружних явищах.

Дещо пізніше життя зблизить його з ще одним братом - Нілом, який деяким чином вплинув на тематику наукових досліджень В.Л. Кирпичова.

Ніл Львович Кирпичов (1850-1927) - військовий інженер, генерал-лейтенант російської армії. У 1869 р. він закінчив Михайлівське артилерійське училище, а в 1874 р. Миколаївську інженерну академію. З 1879 р. Н.Л. Кирпичов почав викладати в цій Академії і в 1889 р. був обраний професором. Його наукові і практичні інтереси були різноплановими. Він відомий роботами з теоретичної та будівельної механіки; він створив метод розрахунку і вивів формулу опору фортифікаційних споруд при обстрілі їх артилерійськими снарядами нових типів. Ці розрахунки і формули використовуються і в теперішній час.

В 1911 р. Н.Л. Кирпичов став головою першого в Росії військово-технічного повітроплавного комітету при Головному інженерному управлінні. У 1918-1920 рр. він очолював Інженерний комітет Головного військово-інженерного управління Червоної армії, а в наступні роки викладав у Військово-інженерної академії ім. В.В. Куйбишева. Він є автором ряду фундаментальних праць, тематика яких дуже тісно пов'язана з такими роботами В.Л. Кирпичова як «Будівельна механіка. Теорія опору матеріалів» (С.-Пб., 1898), «Будівельна механіка. Графічна статика» (С.-Пб., 1899), «Основи теоретичної механіки. Курс 2» (С.-Пб., 1903), «Теоретична механіка. Курс 2, 3» (С.-Пб., 1904 - 1905). У 1914 р. в Петербурзі вийшло літографічне видання конспектів лекцій професора Н.Л. Кирпичова під назвою «Будівельна механіка, графічна статика і опір матеріалів». Цей курс Н.Л. Кирпичов читав у Миколаївській інженерній академії.

Схожість тематики робіт Ніла Львовича і Віктора Львовича свідчить про їхню очевидну співпрацю або про можливі взаємні консультації та взаємодопомогу, можливо у кожного з Кирпичових була вроджена риса дослідника-механіка. Думка про «наукову спадковость» сім'ї Кирпичових підтверджує і діяльність сина Віктора Львовича - Михайла Вікторовича Кирпичова (1879-1955). Видатний учений в галузі теплотехніки і теплофізики, академік, він надавав великого значення роботам з математичних основ теорії подібності. Ці праці М.В. Кирпичова мають особливе значення. Сформульована ним теорема подібності (теорема Кирпичова-Гухмана) є базою теорії моделювання фізичних процесів, що дозволила досліджувати на моделях роботу парових котлів, промислових печей та інших теплових агрегатів.

Вищу освіту В.Л. Кирпичов отримав в Михайлівській артилерійській академії, до якої він вступив в 1865 р. після закінчення служби в Кронштадті і яку блискуче закінчив у 1868 р.

Серед його вчителів були майбутні академіки І.О. Вишнеградський і А.В. Гадолін, член-кореспондент Імператорської Санкт-Петербурзької академії наук Н.В. Маієвський та ін. З 1868 р. В.Л. Кирпичов - викладач механіки і опору матеріалів в Михайлівській артилерійській академії. Перша наукова робота В.Л. Кирпичова була виконана в 1869-1870 рр. під керівництвом А.В. Гадоліна за дорученням Імператорського Російського технічного товариства. В.Л. Кирпичов розробив методику випробувань механічних властивостей гарматної сталі, обробленої за методом Д.К. Чернова.

У 1870 р. В.Л. Кирпичов після обрання за конкурсом викладачем прикладної механіки перейшов в Санкт-Петербурзький технологічний інститут (СПТІ). Він вів курси опору матеріалів, графічної статики, вантажопідйомних машин, деталей машин. У 1871 р. І.О. Вишнеградський організував товариство взаємодопомоги при науковій розробці питань механіки і теоретичного машинобудування. Крім В.Л. Кирпичова до нього входили майбутній академік Н.П. Петров, редактор журналу «Вісник товариства технологів» В.П. Котурницький і редактор журналу «Інженер» А.П. Бородін.

В 1872 - 1874 рр. В.Л. Кирпичов бере участь в дослідженнях великого вченого Д.І. Менделєєва з опису властивостей реальних газів. При розробці методів спостереження за дослідами він вирішує задачу про «найвигідніші розміри коромисла терезів».

Знайомство В.Л. Кирпичова з І.О. Вишнеградським (1831-1895) видатним російським інженером і вченим, основоположником теорії автоматичного регулювання, мало виключне значення для життя Кирпичова. І.О. Вишнеградському належить велика заслуга у введенні до викладання в Росії теоретичних основ машинобудування, що стало своєрідною підготовкою до вітчизняного виробництва машин. Його по праву вважають творцем наукової школи в галузі конструювання машин. У Михайлівській артилерійській академії і Петербурзькому технологічному інституті І.О. Вишнеградський крім прикладної механіки, термодинаміки і теорії пружності читав також різні курси з машинобудування «Вантажопідйомні машини», «Токарні верстати», «Парові машини» і ін.

Вельми примітна біографія І.О. Вишнеградського. Він народився в 1831 р. у Вишньому Волочку в родині священика, закінчив духовну семінарію, а потім фізико-математичний факультет Педагогічного інституту в Петербурзі. Працював учителем математики в кадетському корпусі. Ще в Педагогічному інституті І.О. Вишнеградський звернув на себе увагу академіка М.В. Остроградського, який викладав в інституті. Працюючи вчителем, Вишнеградський одночасно глибоко вивчав математику і механіку під керівництвом Остроградського і в 1854 р. захистив в Петербурзькому університеті дисертацію на ступінь магістра математичних наук (опонентами були П.Л. Чебишов і О.І. Сомов). Кримська війна 1854-55 рр., що виявила технічну відсталість Росії - і, особливо, в області артилерії, - спонукала І.О. Вишнеградського з особливою енергією зайнятися технікою артилерійської справи, виробництва озброєння і набоїв. В той період І.О. Вишнеградський виступав одночасно і як викладач, автор популярних підручників, і як інженер-практик.

В.Л. Кирпичов прослухав у Вишнеградського фундаментальні курси «Опір матеріалів», «Аналітична механіка», «Теорія пружності», «Термодинаміка» і в подальшому тісно спілкувався з Вишнеградським, з увагою ставився до його наукових порад, з вдячністю приймав підтримку маститого ученого. І як вже зазначалось, він був активним учасником гуртка, створеного Вишнеградським «для обміну думок з прикладної механіки».

У березні 1895 р. І.О. Вишнеградський помер. У зв'язку з цією сумною подією, В.Л. Кирпичов 27 травня 1895 р. виступив на засіданні Харківського відділення Російського технічного товариства з широко відомою промовою «Іван Олексійович Вишнеградський, як професор і вчений», опублікованою в [Кирпичев, 1895]. Про значущість цього виступу говорить і факт його повторного опублікування в 1949 р. в книзі Д.К. Максвелла, І.О. Вишнеградського, А. Стодоли «Теорія автоматичного регулювання». У своєму виступі В.Л. Кирпичов, зокрема, сказав: «У науковій сфері, подібно іншим областям духовної діяльності людини, існує спадкоємна передача духовних дарів від учителя до учня, щось на зразок посвяти на розумову діяльність. Це можна простежити історично і зазначити для багатьох знаменитих в науці людей тих учених, які передали їм священний вогонь наукового дослідження і направили їх діяльність на розробку тієї чи іншої науки. Така розробка часто потім ведеться цілком самостійно і оригінально, але перший імпульс майже завжди викликається особистими стосунками з ученими, що займаються тією наукою, яку вибирає собі початківець-діяч. Так, наприклад, Платон отримав таку посвяту від Сократа, Ейлер від Йоганна Бернуллі, Лібіх від Гей-Люссака». Зазначене положення цілком можна віднести і до самого В.Л. Кирпичова, який отримав таку посвяту від найбільших учених того часу, і в першу чергу від І.О. Вишнеградського, яка багато в чому визначила всю подальшу науково-педагогічну діяльність майбутнього вченого.

В свою чергу, таке посвячення від В.Л. Кирпичова отримали С.П. Тимошенко, Д.С. Зернов, І.І. Бобариков, Б.Г. Гальоркін, О.М. Динник, А.А. Радциг, М.М. Давиденков, Л.М. Мацієвич, Г.Ф. Бураков, П.М. Мухачев, Г.М. Хоткевич, Н.І. Карташов, В.М. Маковський, Л.В. Ассур і багато інших.

Своєю чудовою математичною освітою В.Л. Кирпичов зобов'язаний видатному математику П.Л. Чебишову (1821 - 1894), чий курс з теорії ймовірності він слухав взимку 1873 р. в Петербурзькому університеті.

Після закінчення в 1868 р. Михайлівської артилерійської академії В.Л. Кирпичов залишився в ній репетитором (молодша посада, щось на кшталт керівника практичних занять). У 1869 р. він вже викладач академії і читає перший в своєму житті курс опору матеріалів.

У 1873 і 1876 роках В.Л. Кирпичов, маючи певний стаж педагогічної роботи 1869 – 1873 рр., виїжджає в наукові закордонні відрядження, де слухає лекцій великих учених Г.Р. Кірхгофа, лорда Кельвіна, Дж. Максвелла, лорда Релея і ін. Він відвідує ряд найбільших машинобудівних заводів Німеччини, Бельгії, Швейцарії, Великобританії, працює та вивчає теорію і методи викладання в найкращих у світі навчально-наукових лабораторіях.


Бори́с Григо́рович
Гальоркін
(1844-1945)


Дмитро Степанович
Зернов
(1860 - 1922)


Леонід Володимирович Ассур
(1878-1920)


Степан Прокопович
Тимошенко
(1878-1972)


Микола
Миколайович
Давиденков
(1879 – 1962)


Олександр
Миколайович
Динник
(1876 - 1950)


Аксель Вільгельмович
Гадолін
(1828 – 1892)


Густав Роберт Кірхгоф
(1824 – 1887)


Вільям Томсон
(лорд Кельвін)
(1824-1907)


Микола Павлович
Петров
(1836 – 1920)

В.Л. Кирпичов першим поставив питання про теорію подібності фізичних процесів і вивів умови подібності при пружних явищах. Виведення умов пружної подібності елементарним шляхом розглядався В.Л. Кирпичовим в лекціях з будівельної механіки, виданих літографічним способом в 1872 р. У 1874 р.

В.Л. Кирпичов виступив на засіданні Російського фізико-хімічного товариства і опублікував в його «Журналі» викладення і доведення закону «Про подібність при пружних явищах», що базувалось на загальних диференціальних рівняннях рівноваги теорії пружності. У 1878 і 1881 рр. з'явилися статті В.Л. Кирпичова «Закон подібності» і «Закон однорідності».

У 1876 р. Навчальний комітет інституту обирає В.Л. Кирпичов на посаду професора з прикладної механіки.

У 1884 – 1885 рр. В.Л. Кирпичов читає лекції з прикладної механіки в нещодавно організованому Санкт-Петербурзькому інституті цивільних інженерів. У 1884 р. він опублікував роботу «Застосування теореми лорда Релея до питань будівельної механіки» [Кирпичев, 1884], в якій була вперше показана значимість теореми Релея для будівельної механіки. В.Л. Кирпичов проаналізував застосування теореми Релея до балок, що лежать на трьох опорах, а також до пружних арок. С.П. Тимошенко підкреслював: «Завдяки цій спільності висновків, вся теорія статично невизначених систем могла бути представлена в досить стислій формі і в той же час з великою ясністю. Завдяки Кирпичову методи Релея знайшли широке застосування в Росії, а пізніше і в інших країнах».

У 1884 р. В.Л. Кирпичов бере участь в складанні з ініціативи І.О. Вишнеградського загального плану технічної і професійної промислової освіти.

В.Л. Кирпичов з властивою йому пристрастю працює у вищій школі. Педагогічна діяльність В.Л. Кирпичова в Петербурзькому технологічному інституті тривала півтора десятка років. У 1876 р. на 31-му році життя він став професором цього інституту.

У 70-ті роки В.Л. Кирпичов почав роботу над знаменитим курсом «Опір матеріалів». Він багато і наполегливо працює над своїм дітищем: протягом 25 років курс неодноразово переробляється, доповнюється і друкується літографічним способом. Вчений ніби не поспішає з виданням, лише в 1898 р. після досить ретельної підготовки був виданий перший том, а в 1900 р. – другий.

Джеймс Клерк Максвелл
(1831 – 1879)

Пафнутій Львович Чебишов
(1821 – 1894)

Джон Вільям Стретт,
третій барон Релей
(1842 - 1919)

Основою виданого курсу «Опір матеріалів» стали лекції, які В.Л. Кирпичов читав в Артилерійській академії (1869), а потім у Петербурзькому технологічному інституті і, нарешті, в Харківському практичному технологічному інституті.

В.Л. Кирпичов мав підвищений інтерес до питань машинобудування. Цей інтерес характерний і для виданого курсу. Наприклад, перший том мав таку назву: «Опір матеріалів. Учення про міцність будівель і машин». Саме машин! Про своє серйозне ставлення до цієї галузі техніки В.Л. Кирпичов заявляв вже в назві.

Книга швидко розійшлася, і до В.Л. Кирпичова стали наполегливо звертатися з проханнями по її перевидання. Вчений до кінця життя не залишав думки ще раз випустити в світ перероблений курс «Опір матеріалів». «На жаль, - пише А.А. Радциг, - цю працю Віктору Львовичу не вдалося закінчити головним чином внаслідок крайньої вимогливості його до свого викладення: неосяжна кількість експериментальних і теоретичних досліджень властивостей матеріалів, накопичене за останній час насилу піддавалась викладенню в тому стрункому і закінченому вигляді, який звик давати Віктор Львович своїм працям».

У Петербурзі вчений створив ще один курс лекцій, присвячений графічній статиці. Він працював над ним надзвичайно довго, показуючи тим самим приклад виключної вимогливості до своїх праць. Вперше «Графічна статика» була опублікована лише в 1902 р. Згодом курс неодноразово перевидавався, причому щоразу в покращеному вигляді. Так, друге перероблене і доповнене видання цього дуже поширеного підручника вийшло в 1907 р.

Харківський період життя (1885-1898), створення Харківського практичного технологічного інституту

У Харківському практичному технологічному інституті (ХПТІ, в даний час Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут») В.Л. Кирпичов створив зразкову вищу технічну школу. Вперше закладені ним принципи вищої технічної освіти були фундаментальними і логічними внаслідок того, що базувалися на досконалому синтезі різних систем підготовки фахівців в країнах Європи і Америки. В.Л. Кирпичов розробив ідеологію інтегрованої і всебічної підготовки інженерів. Вперше в Росії при організації інституту він застосував новий прогресивний підхід до побудови навчального процесу, в якому гармонійно поєднувалися теоретична підготовка з практичними і лабораторними заняттями і виробничою практикою. Першорядним для В.Л. Кирпичова стало формування професорсько-викладацького складу, досконале опрацювання навчальних програм і планів, організація і обладнання лабораторій. Цю роботу полегшувало те, що В.Л. Кирпичов мав тісні зв'язки з науковим співтовариством. Він міг безпомилково розгледіти в студенті дар викладача і вченого. Кращі таланти країни змагалися за право зайняти вакантні посади викладачів. Успіх в цьому залежав, в основному, від опублікованих наукових праць здобувача. Просування по службі викладача також залежало від практичного використання його наукової діяльності. Девізом викладачів того часу було: «Хто рухає науку, той і вчить».

В.Л. Кирпичов прагнув застосовувати нові математичні і фізичні методи до вирішення складних технічних проблем і використання інженерних методик в постановці наукового експерименту.

В.Л. Кирпичов залучив до роботи в ХПТІ кращих викладачів харківського університету. Академік М.М. Бекетов читав курс лекцій з хімії, професор О.П. Шимков з механічної теорії тепла, професор А.К. Погорілко - фізику та електротехніку, професор Л.В. Рейнгард - анатомію і фізіологію рослин.

В.Л. Кирпичов прагнув максимально високого рівня викладання математики, як основи всіх наук. Він був одним з найактивніших учасників і товаришем голови Харківської математичного товариства, яке перетворилося в визнаний у світі науковий центр, залучав до його діяльності викладачів ХПТІ і своїх учнів. Засідання товариства проводилися регулярно, в середньому двічі на місяць. З 1888 р. випускалися «Повідомлення Харківського математичного товариства», які стали відомими в усьому світі.

Кращі математики університету викладали в ХПТІ. Голова Харківського математичного товариства, член-кореспондент АН К.А. Андрєєв читав курс лекцій з аналітичної геометрії; М.А. Тихомандрицький, удостоєний в 1896 р. премії В.Я. Буняковського, - з диференціального і інтегрального числення; Г.В. Левицький, в подальшому голова Російського астрономічного товариства - з геодезії. Професора М.А. Тихомандрицького змінив завідувач математичним кабінетом ХТІ В.П. Олексіївський, директор Томського технологічного інституту з 1907 по 1911 рр.

В.Л. Кирпичов привернув до читання першого в інституті курсу аналітичної механіки початківця приват-доцента О.М. Ляпунова. Його запросив до Харківського університету на вакантну протягом 4 років посаду один із засновників математичного товариства Д.М. Деларю, син якого був випускником ХПТІ 1890 р. і єдиним з українських інженерів депутатом Першої Державної Думи Російської імперії. О.М. Ляпунов розглядав теорії збуреного руху, пружності, малих коливань і ін. Його докторська дисертація «Загальна задача про стійкість руху», видана в Харкові в 1892 р. коштом товариства, є засадничою роботою в теорії стійкості. Вже як всесвітньо відомий вчений О.М. Ляпунов викладав курс лекцій з аналітичної механіки в ХПТІ з 1887-1894 рр.

Олександр Михайлович Ляпунов
(1857 – 1918)

О.М. Ляпунов народився в 1857 р. в Ярославлі, де його батько на той час був директором Демидівського ліцею. Після закінчення в 1876 р. гімназії в Нижньому Новгороді він до 1880 р. навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету Петербурзького університету, де на нього найбільший вплив справив П.Л. Чебишов.

Тут в життя О.М. Ляпунова увійшла проблема стійкості – основний інтерес його наукової діяльності на всі наступні роки. У 1885 р. він захистив магістерську дисертацію «Про стійкість еліпсоїдальних форм рівноваги рідини, що обертається», був затверджений у званні приват-доцента і переїхав до Харкова, де очолив кафедру механіки університету. У Харкові О.М. Ляпунов працював до 1902 р., коли після обрання дійсним членом Російської Академії наук він переїхав до Петербурга. У Петербурзі Ляпунов вже не займався викладанням, а цілком зосередився на науковій роботі, присвяченій проблемам рівноваги і стійкості фігур небесних тіл. У червні 1917 р. О.М. Ляпунов переїхав до Одеси і там же, 3 листопада 1918 р. помер.

До харківського періоду життя О.М. Ляпунова відноситься і його найбільш знаменита робота - докторська дисертація «Загальна задача про стійкість руху», опублікована в 1892 р. в Харкові і захищена в тому ж році в Московському університеті.

Академік В.А. Стєклов (1863-1926), учень О.М. Ляпунова, так характеризував його: «Вихований спочатку своїм батьком, товаришем М.І. Лобачевського за часів навчання в Казанському університету, потім в колі осіб, близьких до фізіолога І.М. Сеченова, який свою юність провів в середовищі найбільш освіченої частини нашого тодішнього суспільства, на уми якого ще продовжували впливати М.О. Добролюбов і М.Г. Чернишевський, О.М. Ляпунов уособлював собою кращий тип ідеаліста 60-х років ... ».

Після того як в роботах І.О. Вишнеградського, А. Стодоли, О.М. Ляпунова та інших учених була вирішена найважливіша проблема забезпечення стійкості, автоматичне керування і регулювання стали швидко розвиватися, охоплюючи все нові і нові галузі.

Костянтин Олекійович Андрєєв (1848 - 1921)

Володимир Андрійович Стєклов (1864-1926)

Дмитро́ Олександрович Граве (1863 - 1939)

З 1893 по 1905 рр. курси лекцій з аналітичної механіки в ХПТІ вів В.А. Стєклов. Якщо захист докторської дисертації О.М. Ляпунова в 1892 р. проходив в Московському університеті, то В.А. Стєклов захистив в 1894 р. магістерську дисертацію в Харкові, а в 1902 р. - докторську. Наукові інтереси Стєклова включали теорію пружності, гідродинаміку, вищу алгебру, за якими він опублікував цілу низку праць. У 1901 р. був виданий літографічний курс його лекцій з теоретичної механіки. За пропозицією В.А. Стєклова замість так званих «репетицій» (проміжних іспитів) в ХПТІ були введені практичні заняття, на яких розв'язувалися задачі, що ілюстрували теорію. Надалі В.А. Стєклов став віце-президентом АН СРСР. У

1926 році Фізико-математичному інституту при АН СРСР було присвоєно ім'я його засновника і директора В.А. Стєклова.

Д.О. Граве почав викладати в ХТІ після того, як вимушено залишив Петербург через хворобу. В подальшому - творець першої великої вітчизняної алгебраїчної школи; почесний член АН СРСР, перший математик, який став академіком АН України.

На той час у вітчизняних університетах вважалося, що основна задача викладача - читання лекцій, а наукова діяльність - справа другорядна. Прилади, як правило, купувалися на особисті гроші або виготовлялися самими вченими. Часто в якості лабораторій використовувалися приватні приміщення. В.Л. Кирпичов поставив задачу створення дослідних лабораторій. У 1885-1886 роках утворюються фізична і хімічна лабораторії ХПТІ, для читання лекцій з хімічної технології мінеральних речовин в хімічному корпусі оснащується технічна лабораторія.

Маючи великий досвід науково-педагогічної та організаторської роботи, В.Л. Кирпичов швидко сформував кваліфіковані професорсько-викладацькі кадри у виші. Система підготовки і підвищення кваліфікації науково-педагогічних кадрів у ХПТІ була під його особливим контролем.

В.Л. Кирпичов притримувався суворого принципу, згідно з яким вища технічна школа мала надавати учням науково-технічну та наукову освіту, а також вміння розвивати науки і використовувати їх на практиці. Виходячи з цього з його безпосередньою участю для механічного і хімічного відділень були створені навчальні плани і проведено розподіл навчальних дисциплін. Майбутніми інженерами-механіками згідно навчальних планів передбачалося вивчення таких дисциплін, як аналітична геометрія, диференціальне й інтегральне числення, фізика, хімія, механіка, нарисна геометрія, іноземні мови, креслення, малювання – на першому курсі. На другому курсі викладали такі дисципліни, як опір матеріалів, прикладна математика, фізика, хімія, теоретична механіка, геодезія, мінералогія, будівельне мистецтво, архітектура, іноземні мови, технічне й архітектурне креслення. На третьому курсі – загальні предмети для обох відділень: механічна теорія теплоти, технологія металів, теорія і будівництво парових котлів, теорія електрики, архітектурне проектування. Спеціально для механічного відділення читалися гідравліка, додаток механічної теорії тепла до парових котлів і термічних двигунів, графічна статика, теорія і устрій підйомних машин, будівництво парових машин, металургія, сільськогосподарські машини, проектування з механіки. На четвертому курсі – загальні для обох відділень предмети: гідравлічні споруди, борошномельні млини. Спеціально для механічного відділення читалися будівельна механіка, технологія деревини, механічна технологія, заводські машини, проектування з механіки. На п'ятому курсі студенти, готуючись до складання випускних іспитів, виконували завдання з проектування машин, промислових будівель або підприємств. Студенти, які закінчили повний курс навчання, складали випускні іспити і захищали технічні проекти. Залежно від результатів складання іспиту випускникам присвоювалося звання інженера-технолога або технолога. Випускні іспити приймали спеціальні комісії, які щорічно призначалися Міністерством освіти. Серед вказаних навчальних предметів найбільша кількість годин відводилась аналітичній геометрії, диференціальному й інтегральному численню, фізиці, механіці, хімії, нарисній геометрії, кресленню, малюванню.

У Харківському технологічному інституті послідовно формувався певний погляд на методику викладання у вищій технічній школі. Основу його складали лекції. Це не єдиний, але, безсумнівно, найкращий спосіб навчання. «Поки живе людство, не замовкне і жива мова, і передача цією мовою положень науки», – вказував В.Л. Кирпичов.

Крім лекцій, в інституті були поширені семінарські, лабораторні і практичні заняття. Велике значення надавалося навчанню студентів навичкам і прийомам експериментальних досліджень, глибокому вивченню математики, фізики, хімії, геології, творчому розвитку інженера, його здатності самостійно ставити технічні задачі, умінню долати відсталість і рутину віджиаваючого, старого виробництва.

У створенні матеріально-технічної бази ХПТІ велику допомогу надав Санкт-Петербурзький практичний технологічний інститут. У 1886-1887 рр. у ХПТІ організовано фізичну і хімічну лабораторії, технічну лабораторію в хімічному корпусі тощо. Лабораторії та кабінети, аудиторії тут були оснащені інвентарем, креслярськими столами, машинами і апаратами, приладами й інструментом, демонстраційними наочними засобами. Значна частина обладнання для лабораторій була придбана за кордоном.

Окрім дослідів, які проводились в лабораторіях ХПТІ, важливе значення надавалось дослідженням, для яких лабораторією була вся промисловість, кожне окреме підприємство, окремий експеримент, що здійснюється у крупних розмірах. Майстерні й лабораторії інституту стали місцем проведення наукових досліджень, потребу в яких вимагали умови виробництва підприємств Харкова та інших регіонів Росії. ХПТІ став місцем для промислових підприємств, установ і власників, земств, губерній, транспортних організацій, де можна було зробити замовлення на виконання дослідження і отримати аргументовані висновки щодо можливостей використання на практиці матеріалів і сировини.

В.Л. Кирпичов переконливо доводив, що для кожного майбутнього інженера необхідно фундаментальне вивчення математики, фізики, хімії і механіки, які є фундаментом усієї решти знань інженера. Перше місце серед навчальних дисциплін він відводив математиці, як основи усіх наук. І це не випадково. Він вбачав, що технічна діяльність, як і природознавство лише тоді будуть прогресувати, коли провідна роль в процесах творчості буде належати математиці – справжній мові сучасної науки. Вивчення явищ природи, технічних процесів і з точки зору якості, і з кількісного боку вимагає широкого використання математичних засобів [Кирпичев, 1903a].

У стінах інституту В.Л. Кирпичов з 1886 по 1898 рік підготував і прочитав низку навчальних курсів, в тому числі з опору матеріалів, графічної статики, деталей машин, термодинаміки, теоретичної механіки та ін. У 1897 р. в Харкові вийшов підручник В.Л. Кирпичова «Основи графічної статики». Дослідження В.Л. Кирпичова теоретично обґрунтовують графічні побудови статики, можливості застосування останніх до розрахунку різного роду стрижневих систем (ферм, плоских шарнірних механізмів). Перше друкарське видання знаменитого підручника В.Л. Кирпичова: «Опір матеріалів. Частина І. Вчення про міцність будівель і машин» було здійснено в 1898 р. в Харкові. Друга частина підручника була видана в 1900 році. Ця праця стала настільною книгою багатьох поколінь студентів і інженерів. У самій назві книги підкреслюється роль машинобудування. В.Л. Кирпичов проаналізував наукові основи міцності і розрахунок елементів машинобудівних конструкцій. Велику роль відводив В.Л. Кирпичов експериментальним дослідженням. Близько 100 сторінок підручника (частина ІІ) присвячені механічними властивостями матеріалів, які використовуються в будівлях і машинах. Підручник відрізняється ясним, чітким викладом, в ньому гармонійно поєднується теоретичні питання з експериментальними даними. В.Л. Кирпичов - автор відомих науково-педагогічних робіт («Лишние неизвестные в строительной механике», «Детали машин» і ін.), за якими навчалося кілька поколінь студентів і інженерів. Шосте видання книги В.Л. Кирпичова «Беседы о механике» вийшло через 101 рік після першого в серії «Физико-математическое наследие». Титульні листи деяких робіт В.Л. Кирпичова наведені нижче.

В той час в інституті був закладений фундамент найбільшої наукової школи механіки і машинобудування. Головною постаттю наукової школи був її лідер, видатний, авторитетний вчений В.Л. Кирпичов, який генерував актуальні ідеї (нові напрямки досліджень) і згуртував навколо себе однодумців-послідовників, їх учнів. У діяльності наукової школи В.Л. Кирпичова були здійснені такі функції: продукування нових наукових знань, підготовка обдарованих науковців і фахівців.

Вперше курс «Будівельної механіки» в ХПТІ був прочитаний в 1888 р. професором Х.С. Головіним. Він застосував рівняння двовимірної пружності до обчислення напружень в кругових арках і показав, що елементарна теорія згину кривого бруса великої кривизни прямокутного поперечного перерізу досить точна для практичного застосування. У 1891 р. помічник директора ХПТІ Х.С. Головін був призначений директором Санкт-Петербурзького Технологічного інституту (СПТІ), а в 1902 р. - попечителем Петербурзького навчального округу.

Після професора В.Л. Кирпичова курс «Опір матеріалів» з 1898 р. по грудень 1902 р. в ХПТІ читав його учень, професор Д.С. Зернов - видатний фахівець з прикладної механіки. На той час він - директор інституту і голова Південно-Російського товариства технологів. Надалі Д.С. Зернов був директором СПТІ (1902-1922), головою Товариства технологів в Петербурзі, механічного відділення Російського технічного товариства і Всеросійської асоціації інженерів.

Серед вчителів професора Д.С. Зернова були професори В.Л. Кирпичов, І.А. Вишнеградський; Н.П. Петров; Х.С. Головін та ін.


30377

НОВЫЯ ИЗСЛѢДОВАНІЯ

ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЧНОСТИ

ЖЕЛѢЗА, СТАЛИ и МѢДИ.

Титульний лист роботи В.Л. Кирпичова «Новые исследования относительно прочности железа, стали и меди»


В. Кирпичевъ

СОПРОТИВЛЕНІЕ МАТЕРІАЛОВЪ

ЧАСТЬ I

проф. С. ТИМОШЕНКО

Титульний лист посмертного видання книги В.Л. Кирпичова «Сопротивление материалов» (1918, під ред. С.П. Тимошенка)


Физико-Математическое Наследие

В.Л.Кирпичев

БЕСЕДЫ О МЕХАНИКЕ

Физика

Механика

Титульний лист книги В.Л. Кирпичова «Беседы о механике» (видавництво ЛКИ, 2008)

Для отримання професорського звання Д.С. Зернов з 1.04.1887 р. - 10.10.1889 р. виїжджає в наукові відрядження за кордон, де слухає лекції Рело, Веєрштрасса, Кронекера, Кірхгофа; Стокса, Кельвіна, Релея, Рейнольдса, Гельмгольца і ін. Д.С. Зернов відвідав ряд найбільших заводів Європи; ознайомився з навчальними методами кращої в світі за своїм обладнанням механічної лабораторії в Шарлоттенбурзі, першої в світі навчально-наукової лабораторії в Кавендіші, Дрезденського технічного університета. Д.С. Зернову було присвоєно звання приват-доцента для викладання механіки у 1889 р. На запрошення директора В.Л. Кирпичова Д.С. Зернов прийняв на себе обов'язки ад'юнкт-професора механіки ХПТІ.

Лекції Д.С. Зернова слухали видатні вчені Л.С. Лейбензон; І.А. Калінніков; Л.В. Ассур.

Після того, як у 1898 р. В.Л. Кирпичов обійняв посаду директора Київського політехнічного інституту (КПІ), Д.С. Зернов отримав звання професора і був призначений директором ХПТІ.


О́сборн Ре́йнольдс, Osborne Reynolds (1842 – 1912)


Герман фон Гельмгольц, Hermann von Helmholtz (1821 - 1894)

Д.С. Зернов був першим лектором курсу «Прикладна механіка» в ХПТІ. Видатний підручник Д.С. Зернова «Прикладная механика» багаторазово перевидавався і став настільною книгою для декількох поколінь інженерів-машинобудівників [Зернов, 1937].

Франц Рело.
нім. Franz Reuleaux
(1829 – 1905)

Карл Теодор
Вільгельм,
нім. Karl Theodor
Wilhelm Веєрштрасс,
Weierstraß
(1815 - 1897)

Леопо́льд Кро́некер,
нім. Leopold
Kronecker
(1823 – 1891)

Сер Джордж Габріель
Стокс,
англ. Sir George G.
Stokes,
(1819 - 1903)

У 1902 р. після призначення директора СПТІ Х.С. Головіна попечителем Санкт-Петербурзького навчального округу, директором СПТІ призначається Д.С. Зернов. Він викладає курси опору матеріалів, прикладної механіки, теорії пружності, парових машин, а паралельно читає різні навчальні курси в Гірничому інституті, в Морській і Михайлівській артилерійській академіях. Після великої перерви за Д.С. Зернова СПТІ значно розширює свої навчальні приміщення.

Для читання лекцій з теоретичної механіки Д.С. Зернов в 1911 р. запрошує Є.Л. Николаї, в подальшому заслуженого діяча науки і техніки, який започаткував спеціальність «Динаміка і міцність машин». В тому ж році він запросив до СПТІ С.П. Тимошенка.

Знаний учений-механік Б.Г. Гальоркін назвав серед найбільш видатних учених, що працювали в галузі будівельної механіки до революції, професорів В.Л. Кирпичова, Х.С. Головіна, Д.С. Зернова, «які відіграли величезну роль у підготовці інженерів». Курс «Графічна статика» після В.Л. Кирпичова з 1898 по 1905 рр. і курс «Будівельна механіка» після Х.С. Головіна з 1895 по 1905 рр. читав професор А.І. Предтеченський, відомий фахівець з будівельної механіки.

З самого початку В.Л. Кирпичов грунтував свою діяльність на тісному зв'язку науки і промисловості. Це стало кроком вперед у порівнянні з системою підготовки інженерних кадрів за кордоном. 15 вересня 1890 р. ХПТІ урочисто відзначав перший випуск інженерів. У промові, яку виголосив з цієї нагоди В.Л. Кирпичов, фактично була представлена програма технічної освіти, яку він надалі розвивав. В основу її ставився лекційний метод викладання, який пропагував і захищав, проведення практичних і лабораторних занять, а також семінарів. Кирпичов завжди дотримувався методу історичного викладення.

Завдяки зусиллям і під редакцією В.Л. Кирпичова була видана головна праця академіка, міністра шляхів сполучення Г.Є. Паукера «Будівельна механіка. Курс Миколаївської інженерної академії» (1891), яка здобула високу оцінку фахівців і тривалий час мала славу класичної праці.


Ге́рман Єгорович
Паукер
(1822-1889)


Харлампій
Сергійович Головін
(1844 - 1904)


Олексій Іванович
Предтеченський
(1857 – 1905)


Євген Леопольдович
Николаї
(1880-1950)

В 1893 р. В.Л. Кирпичов був відряджений до Чикаго для вивчення механічної промисловості Північноамериканських Сполучених штатів і участі в експертизі на Всесвітній промисловій виставці, де був обраний секретарем міжнародної комісії з механіки. У книзі «Отчёт о командировке в Северную Америку» [Кирпичёв, 1895] В.Л. Кирпичов показав специфіку американського машинобудування у зв'язку із загальною економічною ситуацією в країні.

Кирпичов придбав вперше представлену на виставці парову турбіну, винайдену шведським інженером Лавалем. Вона стала першою паровою турбіною на території Росії. Надалі його учень, випускник ХПТІ В.М. Маковський був ректором Дніпропетровського гірничого інституту (попередника Національного гірничого університету та Національної металургійної академії України), організатором кафедри турбобудування в Харківському машинобудівному інституті. У Харкові були створені Інститут промислової енергетики, турбінний завод, Інститут енергетики АН України, Інститут проблем машинобудування НАН України. Харків став найбільшим центром енергетичного машинобудування.

Взимку 1895-1896 рр. В.Л. Кирпичов взяв участь у другому з'їзді з технічної та професійної освіти. В рамках проведення з'їзду викладачами, керівниками заводів, впливовими урядовцями обговорювалися стан технічної освіти, навчальні плани і програми технічних навчальних закладів, їх участь у розвитку промисловості. Під редакцією Д.С. Зернова та помічника директора Департаменту торгівлі і мануфактур С.П. Лангового були видані праці секції з'їзду з вищих технічних навчальних закладів. Серед доповідачів були М.Є. Жуковський, П.М. Мухачов, М.М. Бекетов та інші.


Микола Єгорович
Жуковський
(1847-1921)


Петро
Матвійович
Мухачов
(1861 – 1935)


Микола
Миколайович
Бекетов
(1827 – 1911)

В.Л. Кирпичов виступив з доповіддю

«Експериментальна механіка і механічні лабораторії в вищих технічних навчальних закладах», в якій проаналізував систему викладання, рівень підготовки, підвищення кваліфікації викладачів. Він стверджував, що у вищих технічних навчальних закладах, в яких готуються спеціалісти-механіки, має бути введено систематичне викладення експериментальних прийомів дослідження матеріалів і машин, а також отримання навичок практичної роботи на різних механізмах і верстатах. Термін вивчення спеціальних прийомів і навичок повинен бути не менше ніж два роки. Для бажаючих студентів старших курсів можна призначити спеціальні експериментальні роботи. У цій роботі В.Л. Кирпичов вказав на необхідність розвитку у майбутніх інженерів схильності до експериментальних досліджень технічних питань. В.Л. Кирпичов писав: «Експеримент є такий же інструмент в руках науковців, як і вища математика». Вважається, що автором терміна «експериментальна механіка» є В.Л. Кирпичов, а його слова: «Наука повинна якомога частіше звертатися до перевірки експериментальних даних, які є її основою; в цьому поверненні до землі вона буде черпати нові сили для подальшого розвитку» можуть слугувати епіграфом праці більшості сучасних наукових закладів.

Розвиток наукових шкіл політехнічних вишів Харкова, Петербурга і Києва, їх світовий авторитет багато в чому мають завдячувати діяльності В.Л. Кирпичова. У Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» продовжує успішно функціонувати наукова школа механіки і машинобудування, створена В.Л. Кирпичовим. Його дослідження в галузі міцності і динаміки машин успішно продовжили академіки АН України А.П. Філіппов, А.Н. Підгорний, Ю.М. Мацевітий, В.Л. Рвачев; члени-кореспонденти АН УРСР В.М. Майзель, А.Е. Божко; заслужені діячі вищої школи, науки і техніки, лауреати Державних премій І.М. Бабаков, С.І. Богомолов, А.В. Бурлаков, Є.Г. Голоскоков, В.В. Бортовий, В.Б. Гриньов, А.С. Вольмір, А.В. Дабагян, А.С. Іловайський, Б.Г. Скрамтаєв, Ю.С. Воробйов, Б.Я. Кантор, Е.А. Сімсон, Н.Г. Шульженко; професори В.М. Серебровський, Я.В. Столяров, В.І. Блох, Л.І. Штейнвольф, В.Н. Карабан, Л.В. Курпа, В.А. Жовдак, В.І. Лавінський, Г.І. Львов, О.К. Морачковський, Д.В. Бреславський та ін.


Веніамін Ізраїльович
Блох
(1895-1960)


Анатолій Петрович
Філіпов
(1899 - 1978)


Арнольд Сергійович
Вольмір
(1910 - 1986)


Анатолій
Миколайович
Підгорний
(1932-1996)

Зазначимо, що вулиця, на якій розташований НТУ ХПІ, була поіменована на честь В.Л. Кирпичова.

Київський період життя (1898 - 1903), створення Київського політехнічного інституту

В.Л. Кирпичов в черговий раз проявив себе видатним організатором і, як сказали б у наш час, ефективним антикризовим менеджером. Пожертви на заснування КПІ приймалися з 1880 р. Перші курси КПІ були відкриті у 1898 р. в тимчасовому приміщенні. Незважаючи на поважний вік, В.Л. Кирпичов взяв участь в розробці навчальних планів чотирьох відділень КПІ: хімічного, механічного, інженерного і сільськогосподарського. До початку 1899-1900 навчального року в КПІ було 598 студентів, з них 341 на І курсі і 252 на II-му.

Після закінчення будівництва (1902 р.) КПІ мав повний комплекс приміщень чотирьох відділень. Тривалість курсу на всіх відділеннях становила 4 роки. Напрацьований в Харкові досвід В.Л. Кирпичов переніс в КПІ. Надалі його переймали інші нові технічні заклади.

З цього часу починається особливо плідний період в житті В.Л Кирпичова.

Для організації КПІ він застосував нові прогресивні принципи побудови навчального процесу, головним серед яких вважав постановку вищої технічної освіти на основі наукового експерименту. За кілька років цей метод навчання набуде широкого розвитку в програмах Петербурзького політехнічного інституту.

Відомо, що термін «інженер» походить від латинського слова «ingeniosus», тобто «кмітливий». Аналіз цього слова дозволяє казати про двоїстий характер інженерної діяльності. Перш за все ця діяльність має прикладний характер, оскільки спрямована на розробку, впровадження нових і супровід наявних технологій. З іншого боку, в процесі своєї діяльності інженер потребує проведення фундаментальних досліджень і, зрештою, сам може стати виробником нових фундаментальних знань.

Двоїстий характер інженерної діяльності - прикладної та фундаментальної - визначає різницю в моделях інженерної освіти. Відповідно до історичного контексту та існуючого попиту сформувався цілий спектр моделей інженерної освіти. З одного боку цього спектру - модель, яка об'єднує широку фундаментальну природничо-наукову підготовку з «конкретною» спеціалізацією в конкретній галузі знань. З іншого - спеціалізована модель освіти інженера, здатного успішно працювати в системі сучасного виробництва.

Принципи такої інженерної освіти, що впроваджуються В.Л. Кирпичовим в КПІ в 1889 - 1903 рр., беруть свій початок від принципів освіти відомої в той час «Еколь політехнік» (L. Ekole Polytechnikye - Вища політехнічна школа), заснованої в 1794 р. в Парижі, а також Аахенського, Віденського, Магдебурзького технічних університетів. В основі цієї системи - поєднання глибокої природничо-наукової базової підготовки з фізики, математики, хімії та інших дисциплін із загальноінженерною і отримання професійно-практичних навичок на виробництві та в науці.

Наведемо скорочений варіант промови першого директора КПІ В.Л. Кирпичова на урочистому відкритті КПІ 31 серпня 1898 р.

«Політехнічний інститут є вищий навчальний заклад, призначений для підготовки інженерів, тобто, як свідчить сама назва, людей генія, здатних придумувати і влаштовувати нове.

Для інженера, перш за все, необхідна солідна наукова підготовка. Він повинен грунтовно вивчити теоретичні предмети - математику, фізику, хімію, геологію і ін., залежно від спеціальності. Тому завжди існує тісний зв'язок між вищими навчальними закладами та університетами; допомога університету необхідна кожному вищому технічному закладу.

Але крім загальних, абстрактних наук, присвячених виключно шуканню істини для неї самої, в технічних навчальних закладах викладають ще так звані прикладні інженерні науки, присвячені практичним цілям.

У класичній стародавності і в середні віки не було прикладних наук. Реальні знання того часу зводилися до семи вільних мистецтв. Всі інші мистецтва вважалися не вільними і заняття ними надані були рабам, від чого й пішла назва невільні мистецтва. Вся техніка була віднесена до числа рабських занять. У філософів давнини багаторазово зустрічається вияв зневаги до занять прикладними питаннями; очевидно, це вважалося справою, негідною для вільної людини.

Важливе значення техніки, необхідність займатися нею, вказівка на гідність цих занять, реабілітація цієї справи, звільнення її від тяжів назви «рабське мистецтво», саме встановлення поняття про прикладні науки і їх мету - все це належить знаменитому Бекону Веруламському.

Підставою беконовської доктрини служать два поняття - користь і прогрес - і до сих пір вони залишилися девізом технічних наук: вони мають на увазі користь, і вони безперервно прогресують і удосконалюються.

На зорі епохи Відродження ми зустрічаємося з людиною, на яку потрібно дивитися, як на родоначальника інженерів, що представляє ідеальний тип інженерної професії. Це Леонардо да Вінчі. У ньому поєднуються вчений, практик і художник, і всі ці три сторони повинні бути розвинені в справжньому інженері. Да Вінчі стояв дуже високо як вчений, і в деяких питаннях випередив Галлілея.

Сутність вимог від інженера була добре виражена символічно при будівництві Цюріхської політехнічної школи. Там відділення загальних наук - університетське - з'єднується з відділенням прикладних наук - технічним - залою, яка представляє собою художній музей. Це вказує на склад інженерної освіти: потрібно починати з чистої науки і на ній засновувати прикладні знання, але в той же час не залишати без уваги і мистецтво.

Виробництво багатств в цьому сенсі слова є вже саме по собі дуже важливе заняття, якому варто присвятити себе, постійно знаходячи кошти для поліпшення способів накопичення багатства. Один із сучасних учених говорить з цього приводу: «Ступенем досконалості у виробництві визначається ступінь незалежності людини і влади його над природою; з усіх істот лише одна людина дійшла до майже необмеженого панування над виробництвом поживних речовин».

Але, крім цього свого прямого значення, виробництво важливо ще й тому, що характер, вид його, ступінь успішності його роблять сильний вплив на всі інші сторони діяльності людини, на суспільний лад, юридичні поняття і т.і., переплітаючись нерозривно з усіма цими проявами людського життя.

Дуже часто дивляться на діяльність інженера, як на вкрай важку, гнітючу, похмуру.

Деякі відділи заводів, наприклад, кочегарки, де топляться парові котли, зображуються, як земну подобу пекла; особливо картинно це зроблено у відомому романі Альфонса Доде.

На багатьох одне слово «машина» справляє гнітюче враження. Вона розглядається, як темна сила, з якою не можна боротися, якій людина повинна служити як ідолу, що вимагає іноді людських жертв. Один автор, описуючи завод, каже: «машини панували всюди, і біля них жалюгідними здавалися ці похмурі люди». Зробимо ще крок по шляху цих поглядів, і доведеться згадати казку, розказану у Рело, про подальшу майбутність людського роду, а саме: удосконалення машин дійшло до того, що вони збунтувалися проти людей, поневолили їх і змусили служити собі.

Такі погляди не можуть розділятися інженерами, які самі роблять машини та інші споруди, заводи, залізні дороги, втілюючи свої творчі думки в форми, зроблені з заліза і каменів. Вид думки, що перетворилася в справу, в факт, не може виробляти гнітюче враження, а навпаки, саме світле і радісне.

Будову пристроїв для заощадження праці, для полегшення, безпеки його, для гігієнічності праці - ось гідні терени для заняття діяльних умів».

Промова В.Л. Кирпичова «Значення фантазії для інженерів»

Сто років тому в журналі «Известия Киевского политехнического института» (1903) був опублікований текст промови першого ректора КПІ В.Л. Кирпичова на незвичну як для технічного навчального закладу тему: «Значення фантазії для інженерів». Думки, висловлені в ній, і сьогодні лишаються цікавими - щось подібне нечасто пишуть або про що говорять останнім часом. Зокрема, він сказав наступне.

«Я припускаю викласти Вам кілька думок з приводу однієї дуже важливої сторони цієї діяльності і присвячу сьогоднішню промову питанню про значення фантазії для інженерів.

У цій темі я маю знаменитого попередника. Відомий англійський фізик Джон Тіндаль на одному із з'їздів Британської Асоціації виголосив чудову промову «Про роль уяви в розвитку наук», в якій чудово усвідомив значення фантазії для фізичних наук. Тіндаль, по справедливості, цінує дуже високо цю здатність людського духу, про яку він виражається в такий спосіб: «Для того, щоб розсіяти морок, що огортає світ відчуттів, ми забезпечені даром уяви».

Між іншим, він наводить такі приклади дії фантазії в науковій сфері, взявши для зразка двох найзнаменитіших англійських учених: «Коли Ньютон від падіння яблука подумки перейшов до падіння місяця, - це був стрибок фантазії. У Фарадея гра уяви завжди передувала його дослідам».

Мені здається, що серед усіх наук найбільша сила уяви потрібно в математиці.

Фантазія потрібна математику, щоб придумувати нові прийоми, нові побудови.

Математика дає нам зразки найсміливіших результатів фантазії, в ній мають місце, можна сказати, найбільш сміливі концепції людського генія - поняття про простір чотирьох і більше вимірів, і про неевклідову геометрію.

Тіндаль в своїй промові говорить головним чином про значення уяви при створенні фізичних гіпотез.

Щоб отримати нові результати, потрібно постійно вигадувати нове. Для цього необхідна багата фантазія, і ми по справедливості можемо назвати Коперніка, Кеплера, Ньютона, Фарадея геніальними фантазерами.

У технічній галузі фантазери називаються винахідниками; у них фантазія розвинена у високому ступені, і в цьому відношенні вони мають схожість з великими вченими.

Та ж якість становить приналежність до поетів, і хоча це може здатися дивним, але при найближчому розгляді ми помічаємо численні риси подібності у трьох розрядів геніальних людей - вчених, поетів, винахідників. Один письменник, характеризуючи Джеймса Уатта, найзнаменитішого з усіх винахідників світу, винахідника par excellence, каже, що «Уатт в механіці був той же, що Ньютон в астрономії і Шекспір в поезії», і ці слова повинні бути визнані дуже міткою і вірною характеристикою ...

Відсутність фантазії нічим не може бути замінена в технічній справі.

Винахідники машин не можуть керуватися наслідуванням ручної роботи, а повинні придумати щось зовсім інше, відмінне від існуючого.

Вивчаючи роботи великих винахідників, ми, перш за все, дивуємося багатством їх фантазії. Винаходи, пропозиції висипаються як з рогу достатку, захоплюють всілякі сфери промисловості і техніки. Один геніальний винахідник дає матеріал, достатній для того, щоб прославити сотні людей. Подібно до того, як в сучасній науці зародки багатьох відкриттів можна простежити раніше і знайти у колишніх великих майстрів науки, так і в техніці зародки багатьох пізніших винаходів відшукуються у геніальних фантазерів попередніх століть. Попереду всіх стоїть знаменитий художник Леонардо да Вінчі. У малюнках, начерках, ескізах, які наповнюють його рукописи, ми, на подив свій, знаходимо безліч конструкцій, яким приписувалося давніше походження. Ми бачимо у нього тангенціальну турбіну з кривими лопатками (на кшталт колеса Цуннінгера), сучасну конічну передачу, гвинтові колеса, ланцюг Вокансона, ланцюг Галля, машину для насічки напилків, прядильную машину - прототип сучасних ватерів, парашут, землечерпальну машину і т.д., і т.д., і т.д.

Таким же є Джеймс Уатт, у якого ми зустрічаємо зародки всіх нових удосконалень парових машин - парову сорочку, систему компаунд, індикатор, ротатив і т.д. У Роберта Гука, сучасника Ньютона, ми знаходимо фрези, колеса Уайта. У Брама (початок минулого століття) зустрічаємо гідравлічну і пневматичну передачі. Дуже оригінальною фігурою є Маркіз Вустер (Worcester) з його сотнями винаходів (1663 р.), в числі яких фігурують і парова машина і perpetuum mobile.

За геніальними винахідниками слідують винахідники меншої сили, але все ж таки людей з дуже багатою фантазією, і, нарешті, армія конструкторів, що змінюють деталі, варіянти розташування, і які виробляють численні типи машин.

Теж було і з турбінами; виробляли турбіни радіальні, осьові, комбіновані, з внутрішнім або зовнішнім підведенням води; ставили вісь турбіни вертикально або горизонтально; влаштовували турбіни-двійники; робили турбіни активні і реактивні, повні і партіальні і т.д. Те ж можна простежити і в інших розрядах машин.

Винахідники всіх часів і народів представляють дуже строкату картину. Це армія, яка вербується серед усіх людей різного соціального стану і професій. Єдина умова, яка ставиться для рекрутів, - значна сила фантазії. Я вже згадував, що з усіх наук сила фантазії потрібна в математиці, і підтвердженням цьому служить той факт, що серед математиків ми зустрічаємо багато винахідників. Вкажу на Архімеда, Кардано, Паскаля (гідравлічний прес, арифметична машина), Роберваля, Дезарга, Лагіра, Іогана Бернуллі (йому належить так званий шпиль Бетанкур), Ейлера (осьова турбіна, зачеплення по розгортці кола), Сегнерово, Понсоле, Клапейрона (випередження і перекришки золотників), Посельє, Гарта, Сильвестра (плагіограф, ізокліностат) і нарешті на нашого знаменитого математика П.Л.Чебишова, з його безліччю механічних винаходів.

Серед винахідників зустрічаються і знатні люди як, наприклад, Маркіз Вустер, один з первинних винахідників парової машини, і бідні люди з народу, ремісники. Або, як кажуть англійці - є люди, які отримали дворянство від Вільгельма Завойовника, і є люди, яким дворянство подаровано природою ...

Серед винахідників ми зустрічаємо людей чесних, високої моральності, якими є Джеймс Уатт і Маркіз Вустер, ідеалістів - як Леонардо да Вінчі. Але зустрічаємо і приклади протилежних якостей.

Доля цих фантазерів часто була дуже плачевна; багато з них ставали жертвами своєї нестримної потреби вигадувати нове. Скільки їх розорялися, кінчали життя в борговій в'язниці, в будинках божевільних. Інші розбивалися на смерть, випробовуючи свої літальні машини, тонули разом зі своїми підводними човнами, гинули від вибуху ними ж винайдених вибухових речовин. Але ці нещастя не в змозі утримати людей з палкою фантазією від розвідки невідомого.

...

Удавана казковість винаходів неодноразово викликала недовіру до них; на них дивилися як на химери і заперечували можливість їх здійснення. Зразком поглядів практичних людей на винаходи може служити відомий відгук Вальполя про книгу Маркіза Вустера «Сотня винаходів». Вальполь називає її «дивовижний зразок божевілля». Всім відомі глузування над першими спробами пароплавства і залізничного сполучення. Такі ж глузування сипалися з приводу пропозиції Мардока освітлювати Лондон кам'яновугільним газом. Гемфрі Деві питав винахідника, чи не має наміру він за резервуар для свого газу взяти купол собору Св. Павла. А Вульстен стверджував, що пропозиція проводити світильний газ в трубах вулицями Лондона рівнозначна наміру освітлювати місто скибочкою місяця і т.д. Але ось проходить менше ніж сто років, і те, що здавалося неможливим, не тільки здійснюється, але в значній мірі перевершує задум. Звичайно, сучасні резервуари светильного газу (газгольдери) за обсягом значно більше купола собору Св. Павла. У Манчестері один газгольдер має діаметр в 260 футів, тобто в два з половиною рази більше, ніж діаметр куполу Св. Софії в Константинополі. А висота цього газгольдера 150 футів, тобто більше внутрішньої висоти готичних соборів. Обсяг одного цього газгольдера 7.000.000 куб. футів, а повний обсяг усіх газгольдерів міста Манчестера доходить до двадцяти п'яти мільйонів куб. футів.

Не завжди протидія винаходам обмежувалося глузуванням; нерідко застосовувалися і сильніші заходи, коли винахід зачіпав інтереси відомих класів. На винахід часто дивилися як на чудовисько, на кшталт новітнього Мінотавра, який буде пожирати людей або капітали. Іноді робочі вважали шкідливими для себе машини і ламали їх. Таких бунтів проти машин було кілька в Англії в кінці XVIII-го і початку XIX-го століть. Прядильники ходили натовпами і ламали джени Гаргрівса, кард, ватери Аркрайта ...

Винаходи часто є невигідними для заводчиків і фабрикантів.

Чи можна підготувати винахідників? Я в цьому дуже сумніваюся. В Америці було видано книгу під назвою «Як робити винаходи». Путівник для винахідників. Це дуже цікавий твір, але я не думаю, що він досягне своєї мети. Путівник для фантастичної, невідомої країни важче написати, ніж для Франції або Швейцарії: винахідники ніколи не дочекаються свого Бедекера.

Але можливо якось розвити природну фантазію, або, принаймні, не заважати їй вільно розвиватися. Для маленьких дітей дуже важливим в цьому сенсі є читання чарівних казок. Тепер нерідко можна зустріти батьків, які заперечують казки; вони не дають їх своїм дітям, прагнучи виховати тверезих, ділових людей. Я завжди передрікав таким батькам, що з їхніх дітей не вийдуть ані математики, ані винахідники.

У школі велику користь для розвитку фантазії дає розв’язок геометричних задач. Це повинні бути справжні задачі, що вимагають від учня самостійного вигадування розв’язку, пошуку побудови. Цікаво, що саме це заняття зустрічає загальне неспівчуття. Намагаються усунути в школі розв’язки геометричних задач. Існує дивний погляд, що відокремлює геометрію від розв’язку геометричних задач, як два різні предмети. Припускають, що можна знати перший з них, не володіючи другим. Або намагаючись полегшити роботу учнів, видають для них готові розв’язки задач, правила і шаблони для такого розв’язку, настільки ж шкідливі, як плани для писання творів на задані теми».

Зв'язки кафедри з промисловістю та науковими організаціями

Під керівництвом К.К. Симінського та за участю професорів кафедри, відомих учених у галузі механіки матеріалів і інженерних конструкцій М.М. Давиденкова (академіка АН УРСР з 1939 р.) та Ф.П. Бєлянкіна (академіка АН УРСР з 1948 р.) було налагоджено та розширено зв'язки з промисловістю та науково-дослідними організаціями. Механічна лабораторія кафедри опору матеріалів стала центральною станцією з випробування матеріалів, яка обслуговувала усю Україну та деякі інші республіки. Починаючи з 1921 р., у зв'язку із призначенням К.К. Симінського на посаду директора Інституту технічної механіки АН УРСР (1921 - 1932), наукова робота на кафедрі тісно пов'язується з науковою діяльністю цього інституту.


Костянтин
Костянтинович
Симінський
(1879-1932)

Вихованцем кафедри був всесвітньо відомий засновник наукового напряму з циклічної та термоциклічної міцності сучасного машинобудування, зокрема авіаційного моторобудування, руйнування та довговічності інженерних конструкцій, С.В. Серенсен – випускник 1926 р. На кафедрі він пройшов шлях від лаборанта до професора, завідувача кафедри (1931 р.). З 1932 по 1940 рр. С.В. Серенсен працював директором Інституту будівельної механіки АН УРСР та начальником кафедри літакобудування в Київському авіаційному інституті (1933-1941 рр.). У 1939 р. він був обраний академіком АН УРСР.

У передвоєнні роки в КПІ проводилися дослідження міцності матеріалів і елементів конструкцій в енергомашинобудуванні, результати яких було захищено у вигляді низки кандидатських дисертацій, у тому числі аспірантами А.Д. Коваленком «Дослідження напружень в колесах турбомашин» (1938 р.) та Г.С. Писаренком «Визначення прогинів і напружень в роз'ємних елементах парових турбін» (лютий 1941 р.). Згодом вони стали академіками АН УРСР.


Микола Миколайович
Давиденков
(1879 - 1962)


Федір Павлович
Бєлянкін
(1892-1972)


Анатолій Дмитрович
Коваленко
(1905-1973)


Сергій
Володимирович
Серенсен
(1905-1977)

У зв'язку з окупацією Києва багатьох викладачів кафедри було евакуйовано разом з АН України до Уфи. Після повернення КПІ з евакуації кафедру опору матеріалів очолив член-кор. АН УРСР Ф.П. Бєлянкін (академік АН УРСР з 1948 р.). Одночасно з керівництвом кафедрою (1944-1952 рр.) він був директором

Інституту механіки АН УРСР (1944-1958 рр.), читав лекційні курси «Опір матеріалів» та «Теорія пружності».

У 1952–1959 та 1961–1984 рр. кафедрою завідував професор Г.С. Писаренко. З 32 років завідування кафедрою 26 він працював за сумісництвом, маючи основну роботу в АН УРСР – як директор Інституту проблем міцності (1966-1988 рр.), головний вчений секретар Президії (1962-1966 рр.), перший віце-президент АН УРСР (1970-1978 рр.). З 1959 по 1961 рр. кафедрою опору матеріалів КПІ завідував проф. В.В. Хільчевський.

Керуючи кафедрою, проф. Г.С. Писаренко багато зробив для розвитку творчого співробітництва кафедри з науковими інститутами АН УРСР, залучаючи провідних учених до роботи на кафедрі за сумісництвом, проводячи наукові семінари за участю вчених з інших вишів України та Академії наук, використовуючи експериментальну базу не тільки кафедри, але й Академії наук для підготовки науковців.

Із завдань, які Г.С. Писаренко ставив перед собою, головним він вважав підготовку висококваліфікованих науково-педагогічних кадрів. Він дбав про вдосконалення викладання курсу опору матеріалів; підготовку підручників та навчальних посібників з опору матеріалів, насамперед з лабораторних занять, як необхідної умови підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу студентами; докладав зусиль до залучення до роботи на кафедрі талановитої молоді.

У шістдесяті роки XX ст. подальшого розвитку на кафедрі набули актуальні дослідження міцності та довговічності жароміцних матеріалів, результати яких було впроваджено в конструкторські розробки ряду підприємств і організацій авіакосмічного комплексу. Цими дослідженнями керував учень академіка Г.С. Писаренка проф. М.С. Можаровський, який у 1984 р. очолив кафедру.

Співробітниками кафедри Г.С. Писаренком, В.А. Агарєвим, О.Л. Квіткою, В.Г. Попковим і Е.С. Уманським було написано декілька підручників, у тому числі повний курс під назвою «Опір матеріалів» для механічних спеціальностей, уперше виданий в 1963 р. Цей підручник перевидавався у 1967, 1973, 1979, 1986 та 1993 рр.

Важливим етапом розвитку школи механіків КПІ стало відкриття в 1970 р. на кафедрі опору матеріалів спеціальності «Динаміка і міцність машин». Необхідність запровадження такої спеціальності була викликана потребами як інститутів АН УРСР (таких як Інститут проблем міцності, Інститут механіки, Інститут надтвердих матеріалів, Інститут проблем матеріалознавства, Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона), так і великих машино-, авіа- і суднобудівних підприємств України.

До відомих учених в цій галузі належать академіки: О.М. Динник, С.П. Тимошенко, Ф.П. Бєлянкін, М.М. Давиденков, А.Д. Коваленко, М.В. Корноухов, К.К. Симінський, А.О. Лебедєв, Є.О. Патон, С.В. Серенсен, Г.П. Сухомел, В.Т. Трощенко, В.В. Матвєєв, М.В. Новіков, В.В. Харченко; члени-кореспонденти: Б.М. Горбунов, І.Я. Штаєрман, В.О. Стрижало та А.Я. Красовський, М.І. Бобир.

Євген Оскарович
Патон
(1870-1953)

Олександр
Миколайович Динник
(1876-1950)

Георгій Йосипович
Сухомел
(1888 - 1966)

Ілля Якович
Штаєрман
(1891-1962)

Борис Миколайович
Горбунов
(1901–1944)

Микола Васильович
Корноухов
(1903-1958)

Георгій Степанович
Писаренко
(1910-2001)

Анатолій Олексійович
Лебедєв
(1931—2012)

У 1989 р. завідувачем кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів було обрано д.т.н., проф. Є.О. Антипова.

На сьогодні випускаюча кафедра динаміки та міцності машин і опору матеріалів стала провідною кафедрою з міцності та надійності машин і конструкцій, що забезпечує водночас викладання загального інженерного курсу опору матеріалів студентам багатьох факультетів та інститутів НТУУ «КПІ». Її очолює член-кореспондент НАН України, професор М.І. Бобир.

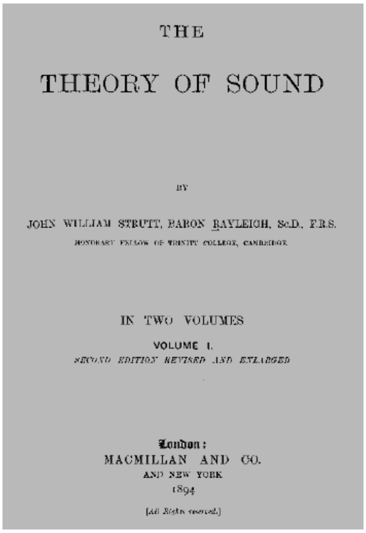
Значна роль у розвитку будівельної механіки належить Г.С. Писаренку, який упродовж багатьох років очолював кафедру опору матеріалів Київського політехнічного інституту, був засновником і першим директором Інституту проблем міцності АН УРСР (нині Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України). З 1989 по 2011 р. Інститут очолював академік НАН України В.Т. Трощенко, а з 2011 р. – академік НАН України В.В. Харченко.

У жовтні 2016 р. інститут відсвяткував своє 50-річчя і за цей час став визнаним науковим центром фундаментальних і прикладних досліджень міцності матеріалів і елементів конструкцій в умовах екстремального термосилового навантаження. Основними напрямками діяльності інституту є: граничний стан і критерії міцності матеріалів і конструкцій; розрахункові та експериментальні методи дослідження напружено-деформованого стану; механіка руйнування і живучість конструкцій; коливання неконсервативних механічних систем.

Створені і функціонують відомі наукові школи:

- міцність матеріалів та елементів конструкцій в екстремальних умовах термосилового навантаження (академік НАН України Г.С. Писаренко);
- крітерії міцності та закономірності деформування і руйнування матеріалів та конструкцій при складному напружено-деформованому стані (академік НАН України А.О. Лебедєв);
- втома матеріалів та критерії руйнування і статистичні теорії міцності матеріалів при циклічному навантаженні (академік НАН України В.Т. Трощенко);
- теорія коливань неконсервативних механічних систем (академік НАН України В.В. Матвєєв).

Повертаючись до київського періоду життя В.Л. Кирпичова, відзначимо також його виключну плідну науково-педагогічну діяльність. За відносно нетривалий час роботи в КПІ він видав другий том курсу «Опір матеріалів» (перший том з'явився у пресі в Харкові в 1898 р.), курс «Основи графічної статики» (1902 р.), фундаментальну монографію «Зайві невідомі в будівельній механіці». У 1899 р. Кирпичов написав і надрукував в Київському журналі «Інженер» знамениту «Замітку про ґратчасті ферми»; в 1901 р. в журналах «Технічний збірник» і «Вісник промисловості» з'явилася його стаття «Формули складного опору», в 1903 р. була видана його чудова промова «Значення фантазії для інженерів», а в «Ізвєстіях Київського політехнічного інституту» опубліковані дві вельми цікаві статті: «Замітка з питання про вплив температури на пружні напруження в твердому тілі» і «Доказ теореми Моріса Леві». Слід підкреслити, що «Ізвєстія КПІ», які виходять з 1901 р., своїм народженням зобов'язані ініціативі В.Л. Кирпичова, який клопотав перед Департаментом торгівлі і мануфактур щодо дозволу видавати наукові праці інституту.



THE

THEORY OF SOUND

BY

JOHN WILLIAM STRUTT, BARON RAYLEIGH, Sc.D., F.R.S.
HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

IN TWO VOLUMES

VOLUME I.
SECOND EDITION REVISED AND ENLARGED

London:
MACMILLAN AND CO.
AND NEW YORK
1894

[*All Rights reserved.*]

Обкладинка другого випуску першого тому «Теорії звуку» лорда Релея

Значний вплив на В.Л. Кирпичова мала «Теорія звуку» [Rayleigh, 1877, 1878] Джона Вільяма Стретта, барона Релея (1842–1919). Він рекомендував цю роботу тим своїм читачам, які виявляли цікавість до теорії споруд. Одним з таких зацікавлених був учень В.Л. Кирпичова С.П. Тимошенко. Проте, вплив вдалої адаптації В.Л. Кирпичовим методів з «Теорії звуку» Дж.В. Релея для теорії статично невизначуваних систем в часових рамках поступився впливу Берлінської школи будівельної механіки, яка грала домінуючу роль в процесі формування теорії в першій половині консолідаційного періоду теорії споруд.

Без сумніву, двотомна робота Дж.В. Релея належить до бібліотеки класики фізики і є першою книгою, що присвячена акустиці. У своєму огляді першого тому цієї книги для журналу Nature (Природа), Г. Гельмгольц пише: «Автор заслужить вічну подяку всіх, хто вивчає фізику і математику, якщо він продовжить свою роботу в тому ж дусі, в якому він почав перший том. Через свою вдалу систематичну організацію всього об’єму найскладніших проблем акустики, автор дав можливість вивчати цей предмет способом набагато простішим, ніж раніше». За пропозицією «канцлера німецької фізики» Г. Гельмгольца, двотомна робота Дж.В. Релея була негайно перекладена німецькою мовою. Друге, доповнене і розширене видання англійською мовою з’явилося в 1894 р. і 1896 р.; саме це видання без змін було передруковане Dover Publications в 1945 р.

Цікаво, що лорд Релей був удостоєний звання Лауреата Нобелівської премії з фізики 1904 р. «За дослідження щільностей найбільш розповсюджених газів і за відкриття аргону в ході цих досліджень».

Але яке відношення класик акустики має до класичної теорії споруд? Погляд на перший том «Теорії звуку» дає нам підказку. Після того, як Дж.В. Релей розглядає коливання систем взагалі в перших чотирьох розділах, він аналізує коливання тросів, стержнів, мембран і пластин; у другій частині тому він вивчає коливання оболонок і електричні коливання. Його другий том присвячений аеродинамічним проблемам акустики.

Поняття енергії займає центральне місце в акустиці Дж.В. Релея. Наприклад, в третьому розділі, «Коливальні системи взагалі», він починає з потенціальної енергії П і кінетичної енергії T і узагальнює теорему взаємності коливальних пружних систем, сформульовану Е. Бетті в 1872 р., за допомогою поняття узагальнених сил F_k і відповідних узагальнених координат переміщень δ_k і принципу Д’аламбера: «Якщо гармонійна сила даної амплітуди і періоду діє на систему в точці P, переміщення, що виникає, в іншій точці Q буде таким же самим і по амплітуді і по фазі, яким воно було б в точці P, якби сила діяла в Q» (цит. за [Betti, 1872/73, с. 321]). У книзі «Лишние неизвестные в строительной механике» [Кирпичев, 1903, 1934], В.Л. Кирпичов перекладає математично сформульовану Дж.В. Релеєм проблему коливань на мову енергетичного принципу, а формалізм Ж.-Л. Лаґранжа щодо узагальнених координат і сил – на рівень аналізу споруд.

В.Л. Кирпичов завершив період формування дисципліни теорії споруд в Росії своєю книгою «Лишние неизвестные в строительной механике», яка містить всього лише 140 сторінок. Вона пояснює всю теорію статично невизначуваних шпренгельних ферм в надзвичайно простій манері викладу. Таким чином, він і Мюллер-Бреслау можуть вважатися фігурами, які підвели підсумок в класичній теорії споруд. В.Л. Кирпичов пише, що при складанні цієї книги йому всього більше принесли користі такі два класичні твори: Lord Kelvin (William Thomson) and P.G. Tait «Treatise on Natural Philosophy» і Lord Rayleigh «Theory of Sound». З обох цих книг він зробив багато запозичень. Також багато в чому допомогла робота Мюллера-Бреслау «Die neueren Methoden der Festigkeitslehre» і «Графічна статика споруд».

Кирпичов досяг загального і послідовного формулювання теорії статично невизначуваних, лінійно-пружних ферм, яка не притаманна ні енергетичній, ні кінематичній доктрині в теорії споруд, і таким чином залишив відкритими двері як для методу сил, так і для методу переміщень. Загальна база під двоїстою структурою теорії споруд, так чітко представлена в книгах В.Л. Кирпичова, передбачає шлях, по якому послідують постійні інновації в теорії споруд першої половини XX ст.

Аналізуючи цей період С.П. Тимошенко пише у своїх спогадах:

«До цього ж часу відносяться і мої перші зустрічі з Віктором Львовичем Кирпичовим, який в подальшому справив значний вплив на мою наукову кар'єру.

В.Л. Кирпичов користувався в Росії великою популярністю як видатний професор опору матеріалів і згодом як будівельник і організатор двох відомих інженерних шкіл: Харьківського технологічного і Київського політехнічного інститутів. У 1903 – 1904 рр. Кирпичов був уже у відставці, не займав професорської кафедри, а в якості позаштатного викладача читав в Петербурзькому політехнікумі курс прикладної механіки, що складався з кінематики машин, теорії тертя, динаміки машин і додаткової глави до курсу опору матеріалів (нерозрізні балки і формула Ейлера). Студенти дуже любили цей курс і аудиторія Кирпичова була завжди сповнена. Головна причина успіху, як мені здається, була у величезній ерудиції Кирпичова. Він не обмежувався вузько своєю спеціальністю і завжди намагався встановити зв'язок свого предмета з одного боку, з предметами чисто технічними, такими, як деталі машин, з іншого боку - з теоретичною механікою. У студентів виходила ясна картина тісного зв'язку між цими предметами.

На мене особливе враження справила книга Кирпичова «Лишние неизвестные в строительной механике». Це був курс про статично невизначені системи в статиці споруд. Характер цієї книги був на тодішні часи зовсім незвичайний у інженерній літературі.

Кирпичов з самого початку вводить поняття «узагальнених сил» і «узагальнених координат». У найзагальнішому вигляді він доводить теорему Кастільяно і теорему про взаємність переміщень. Випадки зосередженої сили, розподіленої навантаження, пари сил все це є у нього як приватні приклади узагальнених сил.

Завдяки цій спільності висновків, вся теорія статично невизначених систем могла бути представлена в досить стислій формі і в той же час з великою ясністю. Відділ інфлюентних ліній був представлений особливо ясно за допомогою теореми взаємності переміщень (Reciprocity Theorem), в загальному вигляді доведеною лордом Релеєм. Кирпичов був під великим впливом робіт Релея і в передмові до своєї книги дуже рекомендував інженерам, які займаються статикою споруд, читати книгу Релея «Теорія звуку». Завдяки Кирпичову методи Релея знайшли широке застосування в Росії, а пізніше і в інших країнах.

Я зустрічався з Кирпичовим на вищезазначених заняттях з англійської. Кирпичов знав мову теоретично і хотів вдосконалити свою вимову. Зустрічався з Кирпичовим також в нашому механічному гуртку, організованому молодими викладачами різних відділів теоретичної і прикладної механіки. Ми збиралися вечорами, раз на тиждень. Доповіді складалися в рефератах за новою літературою в області механіки, головним чином з літератури німецькою. Кирпичов був беззмінним головою і керівником наукової діяльності гуртка. До нього я не раз звертався за порадою при виборі книг для вивчення. Його поради принесли мені велику користь і допомогли вибрати напрямок моєї подальшої діяльності. Я не хотів бути інженером-практиком. У той же час відірвана від додаткових розділів математика і механіка мене не задовольняли. Я хотів знати ці науки лише настільки, наскільки вони потрібні, щоб продуктивно працювати в науках прикладних. У Росії в той час технічні науки розвивалися головним чином під впливом німецької літератури. В області механіки і опору матеріалів були найкращими підручниками книги А. Фьоппля, і я вирішив використати літо 1904 року для поїздки в Мюнхен, де в той час Фьоппль був професором механіки».

Петербурзький період (1902-1913)

У 1902 р. В.Л. Кирпичова призначають членом Ради з навчальних справ Міністерства фінансів.

19 лютого 1899 р. Миколою II була затверджена доповідь Міністра фінансів С.Ю. Вітте про організацію Санкт-Петербурзького політехнічного інституту (СППІ). Першим головою будівельної комісії став К.К. Циглер фон Шафгаузена, брат дружини В.Л. Кирпичова. 7 січня 1900 р. директором інституту і головою Особливої будівельної комісії був призначений князь А.Г. Гагарін. В.Л. Кирпичов був членом будівельної комісії та керував складанням перших навчальних планів 3 технічних відділень (металургійного, електромеханічного, кораблебудівного) в комісії, яку очолював Н.П. Петров.

В.Л. Кирпичов в кінці 1903 р. стає першим лектором з прикладної та будівельної механіки в СППІ. Курс, що складався з кінематики машин, теорії тертя, динаміки машин і додаткової глави до курсу опору матеріалів (нерозрізні балки і формула Ейлера), набув ведучої ролі в програмі технічних відділень СППІ. Найближчими помічниками В.Л. Кирпичова, які проводили під його керівництвом практичні заняття (вправи), були: Л.В. Ассур, А.К. Зайцев, Б.Е. Классен, Н.А. Ринін, А.А. Радциг і ін.

У 1905 році В.Л. Кирпичов брав участь в підготовці «Записок 342-х учених» про те, що народна освіта - головний рушій соціально-економічної та культурної модернізації країни. В результаті восени1905 р. вища школа отримала часткову автономію на території вищих навчальних закладів, був полегшений доступ до вищих шкіл, прийом студентів був значно збільшений.

З введенням системи виборів в 1905 р. В.Л. Кирпичов багато разів відмовлявся від висунення на здобуття керівної адміністративної посади. В.Л. Кирпичов головував в різних комісіях, які формували правила вивчення курсів, програми та інші компоненти навчального буття. Він проводив аналіз праць і давав висновки по всіх дисертаціях з прикладної та будівельної механіки.

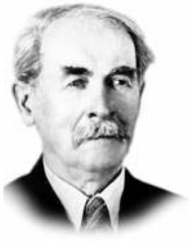
Серед них були роботи таких надалі відомих учених, як основоположник будівельної механіки корабля І.Г. Бубнов; засновник наукової школи мостобудування, академік Г.П. Передерій; один з основоположників теорії реактивного руху Н.А. Ринін; один із засновників Американського Національного фонду Наукових досліджень Б.А. Бахметьєв та ін.

Найвідоміший вчений В.Л. Кирпичов, по суті, був главою петербурзької школи механіків, яка була зосереджена в основному в СППІ. До спільноти механіків примикали вчені-суднобудівники О.М. Крилов і К.П. Боклевський.


Сергій Ю́лійович
Вітте
(1849-1915)


Андрій Григорович
Гагарін
(1856-1920)


Іван Григорович
Бубнов
(1872-1919)


Григорій Петрович
Передерій
(1871-1953)

В.Л. Кирпичов був засновником в 1903 р. і керівником протягом десяти років науково-технічного гуртка викладачів теоретичної і прикладної механіки, опору матеріалів, термодинаміки тощо, де велося творче обговорення різноманітних проблем механіки і суміжних наук. Аналогічні семінари вважаються основою всесвітньо визнаних наукових шкіл. Його заступником був професор І.В. Мещерський, вченим секретарем К.Е. Реріх. Гурток збирався в приміщенні кабінету механіки вечорами, раз на тиждень. Коли СППІ через революцію закрили, збори продовжилися у будинку В.Л. Кирпичова, після революції - у великій аудиторії тепер вже Петроградського політехнічного інституту (ППІ).


Іван Всеволодович
Мещерський
(1856 - 1927)


Олексій
Миколайович
Крилов
(1863-1945)

Після смерті В.Л. Кирпичова кілька наукових товариств носило його ім'я.

«Батько американської інженерії», основоположник сучасної механіки суцільних середовищ С.П. Тимошенко був одним з найактивніших учасників гуртка.

Найкращі відгуки про В.Л. Кирпичова і діяльность гуртка С.П. Тимошенко зберіг для нащадків в своїх знаменитих книгах з історії науки - «Спогади», «The development of engineering education in Russia»; «Гурток імені В.Л. Кирпичова»; «History of the development of strength of materials in Russia»; «Teaching dynamics»; «З життя товариств технологів. Науково-механічний гурток»:

«Згадуючи тепер про діяльність механічного гуртка, ясно видно, що він не тільки сприяв науковій роботі учасників, але ним свого часу була виконана важлива робота по введенню в життя нового методу викладання механіки, який виявився плідним і прийнятим тепер не тільки в Росії, але і далеко за її межами. У всій цій роботі керівництво і вказівки В.Л. Кирпичова зіграли важливу роль».

«Обдумуючи причину наших досягнень в Америці, я приходжу до висновку, що чималу роль в цій справі зіграла освіта, яку нам дали російські вищі інженерні школи».

«Студенти дуже любили цей курс, і аудиторія Кирпичова була завжди переповнена. Головна причина успіху, як мені здається, була у величезній ерудиції Кирпичова. Він не обмежувався - з одного боку предметами чисто технічними, такими як деталі машин, з іншого боку - теоретичною механікою. У студентів виходила ясна картина про тісний зв'язок між цими предметами».

«Грунтовна підготовка в математиці і основних технічних предметах давала нам величезну перевагу перед американцями, особливо при вирішенні нових, нешаблонних задач».

«Кирпичов був незмінним головою і керівником наукової діяльності гуртка. До нього я не раз звертався за порадою при виборі книг для вивчення. Його поради принесли мені велику користь і допомогли вибрати напрямок моєї подальшої діяльності».

«Програми були, безумовно, значно нижчі за наші російські вимоги».

«У себе вдома В.Л. Кирпичов прочитав для невеликої групи свої «Бесіди з Механіки», які згодом вийшли окремою книжкою. Лекції ці мали для мене великий педагогічний інтерес. Якщо згодом я виявився непоганим викладачем, то цим у великій мірі завдячую Кирпичову».

«Інженерні школи розвинулися в Росії набагато раніше, ніж в Америці, і роль російських інженерів в розвитку інженерних наук вельми істотна».

«Доповідь мала великий вплив на мою подальшу кар'єру, головним чином завдяки сприянню Кирпичова».

Голова об'єднання випускників С.-Петербурзького Політехнічного інституту Е.А. Вечорін в передмові до «Спогадів» С.П. Тимошенка підкреслив: «Спілкування в С.-Петербурзькому Політехнічному інституті з професорами такого масштабу, як В.Л. Кирпичов, залишили незгладимий слід у молодого викладача і направили його за новими шляхами зближення теорії з практичними додатками».

У роботі гуртка брав участь і син В.Л. Кирпичова - Михайло - перший в Росії академік-теплотехнік, найближчий друг і соратник А.Ф. Йоффе. У монографії В.Л. Кирпичова «Бесіди про механіку» є розділ «Теорема про подібність в механіці», де розглядається подібність процесів, зокрема, стосовно руху рідини в трубах і опору твердого тіла в потоці рідини. М.В. Кирпичов поширив принципи подібності на теплові процеси. Сформульована ним третя теорема подібності (теорема Кирпичова-Гухмана) є основою теорії моделювання фізичних процесів.

Михайло Вікторович
Кирпичов
(1879-1955)

Олександр
Олександрович
Радциг (1869-1941)

Петро Федорович
Папкович
(1887 - 1946)

Абра́м Фе́дорович
Йоффе
(1880-1960)

Професор ППІ, Херсонського політехнічного і Дніпропетровського гірничого інститутів К.Е. Реріх балотувався в дійсні члени ВУАН. О.О. Радциг став директором ППІ, член-кореспондентом АН СРСР, заслуженим діячем науки і техніки. Л.В. Ассур створив раціональну класифікацію плоских шарнірних механізмів і розробив методику створення плоских механізмів будь-якої жорсткості методом послідовного нашарування кінематичних ланцюгів «груп Ассура». А.П. Фан-дер-Фліт став одним із засновників російської вищої авіаційної освіти, а згодом творцем югославської кораблебудівної науки. М.М. Давиденков створив найбільшу вітчизняну школу міцності і пластичності матеріалів, став академіком АН УРСР, лауреатом Державної премії СРСР і премії ім. Д.І. Менделєєва. Випускник ППІ П.Ф. Папкович став член-кореспондентом АН СРСР, заслуженим діячем науки і техніки РРФСР. Випускник ППІ Я.М. Хлитчієв викладав на кафедрі будівельної механіки, а в подальшому був обраний дійсним членом Сербської Академії наук. Випускник ППІ Б.М. Малінін став автором перших радянських проектів підводних човнів.

Результатом творчого спілкування вченого з колегами і учнями стало написання книги «Бесіди про механіку», виданої в 1907 р. Вона представляла собою зразок ясного і популярного викладу найважчих питань теоретичної механіки. Більшість бесід присвячено основним законам динаміки: закону руху центру ваги; законам кількості руху і моментів кількостей рухів із застосуванням останнього до обертання тіл навколо нерухомої осі, а також до дзиги та гіроскопа; закону площ і закону живих сил. У спеціальному розділі Кирпичов розглядає сили інерції в машинах і способи врівноваження деталей машин, що швидко обертаються і є зворотньо рухомими.

У «Бесідах про механіку» яскраво проявилася і характерна риса наукового стилю Кирпичова: вченому було легше писати книгу за матеріалами, попередньо викладеним у вигляді бесід або лекцій. Так, ще в Києві Кирпичов обговорював зі слухачами проблеми механіки. Однак найбільш цілеспрямований характер такі бесіди мали в Петербурзі. З 1903 р. вчений прочитав цикл лекцій з багатьох питань прикладної механіки. Він і надалі продовжував свої «Бесіди про механіку». Його другий цикл лекцій, прочитаних в вузькому колі фахівців, був присвячений рівнянням Лагранжа 2-го роду, началу найменшого примушення, Гамільтонівському началу тощо.

Ця книга до сих пір може служити прекрасним доповненням до курсів теоретичної механіки, про що свідчить кількість її видань, останнє з яких (п'яте) було здійснено в 1951 р.

Через рік він з успіхом прочитав перед великою аудиторією, що складалася не тільки зі студентів-економістів, а й представників технічних спеціальностей, цикл лекцій-бесід про історичний розвиток машин.

У «Бесідах …» В.Л. Кирпичов, наслідуючи Лагранжа наводить доведення принципу можливих переміщень, яке використовується і у сучасній навчальній літературі.

Вперше це доведення було опубліковано Лагранжем в п’ятому зошиті «Журнала Політехнічної школи» в 1798 р., після чого воно було включене до другого видання «Аналітичної механіки». У тому ж зошиті «Журнала» були розміщені розгорнуті доведення принципу віртуальних швидкостей Проні і Фур’є.

В.Л. Кирпичов [Кирпичев, 1934] писав: «Викладений прийом доведення начала можливих переміщень належить Лагранжу. Я вважаю це доказ найкращим і найбільш переконливим з усіх запропонованих доведень начала можливих переміщень; сутність самого закону, значення можливих переміщень для рівноваги, виключення при цьому всіх сил зв'язку, про які навіть не згадується під час доведення, всі ці основні риси начала чітко проглядються при доведенні. Також дуже виразно видно, як потрібно застосовувати це загальне начало до частинних питань.

Але я повинен при цьому згадати, що, висловлюючи таку думку про лагранжеве доведення, я входжу в протиріччя з більшістю сучасних авторів, що пишуть про механіку. Зазвичай дорікають цьому доведенню нестачею строгості і навіть іноді називають міркування Лагранжа не доведенням, а ілюстрацією начала можливих переміщень. Але навіть і противники міркувань Лагранжа визнають геніальність його міркувань, знаходять їх дуже корисними для з'ясування начала.

Надамо особам, які мають заперечення проти нього, право вважати міркування Лагранжа не доведенням, а постулатом. Принаймні, треба зізнатися, що цей постулат природний і легкий до сприйняття. Можна сказати, що якщо вибирати для начала механіки найбільш прийнятний постулат і порівнювати, наприклад, закон паралелограма сил і начала можливих переміщень, то, звичайно, потрібно віддати перевагу другому, як більш сприйнятного для розуму.

Додамо до цього, що коли начало можливих переміщень встановлено (тобто, або доведено або прийнято в якості постулату), то з нього можна вже строго вивести всі інші закони рівноваги, а в числі їх і паралелограм сил».

О.М. Крилов [Крылов, 1937] відзначав: «Доведення Лаґранжа за своєю простотою і наочністю представляється кожному техніку і інженеру цілком ясним і переконливим, і всі вони це доведення, що займає дві сторінки, знають. Математики вважають це доведення не строгим, а тому і не переконливим, і віддають перевагу доведенню Фур'є, яке займає 40 сторінок».

Спеціальний розділ «Бесід ...» присвячений проблемі, над якою В.Л. Кирпичов працював майже усе життя, це теорема про подібність у динаміці.

Теорема про подібність висловлює умови, при яких дві системи, геометрично подібні, будуть отримувати геометрично подібні рухи, тобто одна система буде як би копіювати рух іншої, але тільки змінивши масштаб.

Теорема ця була знайдена Ньютоном і викладена в «Математичних засадах натуральної філософії» в тій главі цього твору, яка говорить про опір рідин руху[1]; закон цього опору виведений Ньютоном за допомогою теореми про подібність. Сама теорема виходить у Ньютона, швидше, як геніальна інтуїція, ніж як результат суворого виведення. Майже через двісті років після того Бертран показав, що ця теорема є безпосереднім наслідок начала Д'аламбера.

Для виведення її спочатку покажемо, в якій формі зображується начало Д'аламбера, якщо застосувати до вираження всіх обставин руху декартові прямокутні координати і розглядати будь-яку систему як сукупність матеріальних точок.

Координати будь-якої з цих точок, що має масу m, назвемо x, y, z, а складені активні сили, які прикладені до тієї ж точки, позначимо через X, Y, Z.

Перш за все сформулюємо умови рівноваги цієї матеріальної системи. Якщо для нашої точки проекції можливих переміщень назвемо через $\delta x, \delta y, \delta z$, то робота активної сили на дозволеному зв'язками переміщенні дорівнюватиме

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z.$$

Складемо такі самі вирази для роботи для всіх точок, що утворюють нашу систему, і просумуємо ці вирази:

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z).$$

На підставі начала можливих переміщень ця сума робіт повинна дорівнювати нулю, отже:

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0. \tag{20.1}$$

Це рівняння виражає начало можливих переміщень.

Рівняння руху отримаємо, якщо в знайденій умові рівноваги, активні сили замінимо втраченими силами, тобто рівнодійними активних сил і сил інерції.

Але, якщо x, y, z представляють змінні (поточні) координати точки, що рухається, то проекції прискорення її на осі будуть: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$, а проекції сил інерції виглядатимуть від'ємними добутками маси m на ці прискорення, тобто

$$-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, -m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, -m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

Втрачені сили матимуть своїми проекціями

---

[1] II книга, 7-й відділ, переклад рос. А.Н. Крилова (Собрание трудов А.Н. Крылова, т. VII, 1936).

$$X-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ Y-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ Z-m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}.$$

Їх потрібно підставити в рівняння рівноваги (20.1) замість зовнішніх сил X,Y,Z; тоді отримаємо рівняння руху:

$$\sum\left[\left(X-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta z\right]=0.$$

Це і буде та форма начала Д'аламбера, яку отримує це начало, якщо застосувати декартові координати і розглядати систему як сукупність матеріальних точок.

Уявімо собі тепер іншу систему, яка геометрично подібна першій системі, але відрізняється від неї розмірами, а також масами матеріальних точок. Позначимо відношення лінійних розмірів нової системи до розмірів колишньої через λ, а відношення мас відповідних точок через μ. Забажаємо, щоб рухи цих систем були геометрично подібними; отже, відповідні точки двох систем повинні рухатися подібно. Визначимо більш повно, що слід мати на увазі під цим поняттям «подібні рухи». Ми сказали, що друга система повинна копіювати рух першої, змінивши масштаб; ця зміна має дорівнювати відношенню лінійних розмірів, тобто λ. Якщо поточні координати частинки m першої системи суть x,y,z, то координати відповідної точки другої системи x',y',z' повинні мати значення $x'=\lambda x,\ y'=\lambda y,\ z'=\lambda z$, тобто має бути співвідношення

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=\lambda=\text{const}.$$

Тоді переміщення другої системи будуть паралельні переміщенням першої системи і в λ разів більше. В цьому і полягає подібність переміщень двох систем.

Тепер потрібно ввести умову щодо того, з якою швидкістю друга система буде копіювати переміщення першої. Припустимо, що відповідні самі кінці дороги проходяться двома системами не в один і той же час; нехай друга система використовує для цього час в τ разів більше, ніж перша; τ - число довільне, але стале під час усього руху і однакове для всіх точок, що складають систему. Отже, якщо в першій системі частинка з масою m в момент часу t має координати x,y,z, то в другій системі відповідна частинка, що має масу $m\mu$, матиме в момент часу $t'=t\tau$ координати $\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z$.

Тепер цілком визначено те, що називається подібними рухами двох систем. Як наслідок цього визначення отримуємо співвідношення швидкостей і прискорень подібних точок двох систем; при цьому порівнюємо швидкості і прискорення, що виходять для відповідних часів, тобто для першої системи беремо момент часу t, а для другої момент часу $t'=t\tau$. Так як для цих моментів часу маємо:

$$x'=\lambda x,$$

то, диференціюючи та пам'ятаючи, що τ т і λ не залежать від часу, отримаємо:

$$dt' = \tau dt,$$

$$dx' = \lambda dx.$$

Отже,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau}\frac{dx}{dt}, \qquad (20.2)$$

тобто відношення швидкостей $\frac{dx'}{dt'}$ і $\frac{dx}{dt}$ для відповідних часів є постійною і однаковою для всіх частинок величиною $\frac{\lambda}{\tau}$. Диференціюючи рівняння (20.2), отримаємо:

$$d\left(\frac{dx'}{dt'}\right) = \frac{\lambda}{\tau} d\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

а ділячи обидві частини цього рівняння на dt', або, що все одно, на τdt, знайдемо:

$$\frac{d\left(\frac{dx'}{dt'}\right)}{dt'} = \frac{\lambda}{\tau^2}\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt},$$

тобто

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{\lambda}{\tau^2}\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (20.3)$$

Отже, співвідношення прискорень відповідних точок двох систем для відповідних часів представляється постійним і однаковим для всіх частинок множником $\frac{\lambda}{\tau^2}$.

Співвідношення сил інерції, тобто добутків маси на прискорення буде: $\frac{\mu\lambda}{\tau^2}$.

Такими є співвідношення в тих рухах, які ми назвали подібними. Подивимося, які активні сили повинні бути прикладені до цих систем, щоб вони отримали подібні рухи. Якщо в першій системі на точку m діють сили X, Y, Z, то які сили X', Y', Z' повинні бути прикладені до відповідної точки другої системи?

Для відповіді на це питання звернемося до рівняння (20.1), що зображує рух першої системи, і подивимося, як потрібно перетворити його, щоб отримати рух другої системи.

Зауважимо, що друга система повинна бути подібна до першої в усіх відношеннях, тобто не тільки частини другої системи повинні бути подібні до частин першої системи, але необхідно дотримуватися також і подоби у зв'язках. Отже, можливі переміщення другої системи можуть відрізнятися від можливих переміщень $\delta x, \delta y, \delta z$ першої системи тільки множником, загальним для всіх частинок; його можна відкинути.

Потім, замість сил інерції $-m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, в другій системі з'являться ті ж величини, помножені на $\dfrac{\mu\lambda}{\tau^2}$. Замість активних сил X,Y,Z в другій системі будуть сили X',Y',Z'. Таким чином, рівнянням руху другої системи буде:

$$\sum\left[\left(X'-\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta x+\left(Y'-\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta y+\left(Z'-\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta z\right]=0. \qquad (20.4)$$

Потрібно визначити, які сили X',Y',Z' задовольняють цьому рівнянню; це будуть сили, що надають другий системі рух, подібний до того руху першої системи, який визначається рівнянням (20.1). Але, порівнюючи рівняння (20.4) і (20.1) між собою, бачимо, що, якщо рівняння (20.1) задовільнено, то можна задовольнити рівняння (20.4), приймаючи

$$X'=\gamma X,\ Y'=\gamma Y,\ Z'=\gamma Z$$

і вважаючи при цьому

$$\gamma=\frac{\lambda\mu}{\tau^2}.$$

Насправді, при такій підстановці рівняння (20.4) стає цілком узгодженим із рівнянням (20.1), за виключенням лише постійного множника $\gamma=\dfrac{\lambda\mu}{\tau^2}$, який можна скоротити, так як цей множник входить в усі члени рівняння.

Отже, сили, які надають другій системі рух, подібний до руху першої системи, повинні відповідати таким вимогам:

$$X'=\gamma X,\ Y'=\gamma Y,\ Z'=\gamma Z$$

і

$$\gamma=\frac{\lambda\mu}{\tau^2},$$

тобто 1) активні сили другої системи повинні бути паралельні і пропорційні відповідним силам першої системи; 2) коефіцієнт пропорційності сил повинен дорівнювати добутку відношення лінійних розмірів двох систем та відношення відповідних мас цих систем, поділеному на квадрат відношення відповідних часів.

В цьому і полягає теорема Ньютона про подібність.

Для сил в'язів, звичайно, вийде таке ж співвідношення, яке вказане для активних сил.

Робота виходить як добуток сили на переміщення: тому відношення відповідних робіт для двох подібних систем дається величиною

$$\frac{\lambda\mu}{\tau^2}\lambda=\frac{\lambda^2\mu}{\tau^2}. \qquad (20.5)$$

У техніці має особливе значення величина роботи, виконаної машиною в одиницю часу; вона виражається звичайно в кінських силах. Відношення таких робіт для двох подібних систем вийде діленням виразу (20.5) на відношення часів τ:

$$\frac{\lambda^2\mu}{\tau^3}. \tag{20.6}$$

Цю сукупність відношень доповнимо вищевказаними відношеннями швидкостей

$$\frac{\lambda}{\tau}$$

і прискорень

$$\frac{\lambda}{\tau^2}.$$

Ми можемо дійти того ж результату, підходячи до питання з абсолютно іншої точки зору, а саме, розглядаючи розмірність величин, що входять в рівняння руху.

У рівняння руху входять різнорідні величини; з них три величини основні, а саме: довжина (*L*), маса (*M*) і час (*T*); інші ж величини похідні. Прискорення має свою розмірність:

$$LT^{-2},$$

а так як сила дорівнює добутку маси на прискорення, то розмірністю її буде:

$$MLT^{-2}.$$

Уявімо собі будь-який випадок руху системи, який визначається одним або кількома рівняннями. Змінимо одиниці, якими вимірюються величини, що входять в рівняння руху; тоді ці величини будуть зображуватися іншими числами, ніж раніше, згідно зі зміною одиниць.

Зробимо наступну зміну одиниць: зменшимо одиницю довжини в λ разів, одиницю маси в μ разів і одиницю часу в τ разів. Тоді одиниця для вимірювання сил зменшиться в $\frac{\lambda\mu}{\tau^2}$ разів. Числа ж, що представляють величини довжин, мас, часу і сил, збільшаться в тих же відносинах, тобто в λ, μ, τ, $\frac{\lambda\mu}{\tau^2}$ разів.

Ці нові числа повинні задовольняти попереднім рівнянням руху, так як вони представляють дані, які стосуються руху попередньої системи. Отже, якщо в будь-якому рівнянні руху ми всі довжини помножимо на довільну постійну величину λ, всі маси на μ, весь час на τ і всі сили на $\frac{\lambda\mu}{\tau^2}$, то рівняння як і раніше буде задовільнено.

Але ми можемо дивитися на це видозмінене рівняння з іншої точки зору. Спочатку ми вважали, що воно описує рух попередньої системи, зі зміною лише одиниць, якими вимірюються величини. Тепер припустимо, що одиниці залишилися попередніми. Ми можемо тлумачити видозмінене рівняння як рівняння руху іншої системи, яка виходить з первісної шляхом збільшення всіх довжин в λ разів, всіх мас в μ разів, всього часу в τ разів і всіх сил в $\frac{\lambda\mu}{\tau^2}$ разів.

Ця нова система подібна первісній і порівняння рівнянь їх руху показує, що новий рух подібний до первісного руху. Отже, отримуємо знову теорему про подібність; умова подібності, тобто співвідношення сил, звичайно, вийшло те ж саме, що і в попередньому способі доведення.

Викладене друге доведення показує, що закон подібності в динаміці представляє безпосередній наслідок необхідної однорідності всіх членів, що входять в яке завгодно рівняння; його можна називати «законом однорідності». Звідси легко вивести поширення цього закону на різні питання математичної фізики[1].

Застосування теореми про подібність досить численні і дають дуже важливі результати, так що один з теоретиків-механіків справедливо називає теорему про подібність великим принципом подібності.

В.Л. Кирпичов домігся в 1909 р. курсу з математичної фізики в СППІ для П.С. Еренфеста, подолавши негативне ставлення чиновників до людини, яка «не належить ні до якої віри». Семінар-гурток П.С. Еренфеста в 1907-1912 рр. заклав основи наукової школи в галузі теоретичної фізики. Семінар-гурток з нової фізики А.Ф. Іоффе став його своєрідним наступником. Його «господинею» була М.В. Кирпичова, перший помічник і співавтор А.Ф. Іоффе, невістка В.Л. Кирпичова. П.С. Еренфест допомагав радянським фізикам «усіма доступними йому засобами», зокрема в організації Українського фізико-технічного інституту.

Б.Г. Гальоркін під час подій 1905 р. як член бюро Союзу інженерів був заарештований і утримувався 35 днів у в'язниці. У 1909 р. його взяли керувати вправами з будівельної механіки і проектуванням на механічному відділенні ППІ через два місяці після виходу з в'язниці, де він відбував 1,5-річне ув'язнення за політичну діяльність.

В.Л. Кирпичов вперше в Росії застосував оптичний метод дослідження напружень. Він був автором особливого методу розрахунку просторових ферм за допомогою так званої стереографічної проекції. Останньою науковою працею Кирпичова стала робота «До питання про втому металів», опублікована після його смерті завдяки А.М. Драгомірову і М.М. Давиденкову. У ній вчений викладав результати досліджень, заснованих на новому напрямку з вивчення

---

[1] Теорема про подібність в теорії тепла була виведена Фур'є; це питання розібрано в мало відомому його мемуарі, що носить назву «Metnoire sur la distinction des racines imaginaires etc.». Див. в зібранні творів Фур'є (Oeuvres de Fourier), т. II, стор. 135-144. Ця робота відноситься до 1827 р., тобто з'явилася п'ятьма роками пізніше, ніж «Tпёо-rie analytique de la chaleur». Див. також статтю: J. Bert r and, Sur l'homogeneite dans les formules de physique, «Coraptes Rendus», 86, стр. 916 (1878). Тут розглянуто подобу в теорії тепла і теорії електрики. [Питання подібності і розмірності викладені в книзі: Сєдов Л.І., Методи подібності і розмірності в механіці, изд. 2, Москва, 1951].

структурних змін, що з'являються під дією пружних і пластичних деформацій.

20 жовтня 1913 р. В.Л. Кирпичова не стало. Він помер в Петербурзі від крововиливу в мозок.

З метою увічнення пам'яті В.Л. Кирпичова в 1918 р. в Петрограді під редакцією С.П. Тимошенко вийшло посмертне видання його книги «Опір матеріалів». У 1917 р. в Петрограді вийшло зібрання творів Кирпичова під редакцією найбільш близьких до нього Іоффе, Радцига і Тимошенка. Там наведено слова Д.С. Зернова: «Ми всі будемо пам'ятати чарівність його особистості до кінця наших днів. І після нас ім'я його перейде в подальші покоління інженерів. Не тільки твори його будуть ними читатися як класичні, зразкові. Віктор Львович буде жити вічно у вдячній пам'яті, як втілення ідеалу, як людина, яка в дивовижній гармонії поєднувала в собі силу наукової творчої думки, високий моральний авторитет і бездоганну громадянську доблесть».

Видатний вчений і організатор В.Л. Кирпичов брав активну участь у створенні політехнічних інститутів у Харкові, Ризі, Томську, Києві та Петербурзі. Розроблені В.Л. Кирпичовим методи викладання механіки, його навчальні посібники справили великий вплив на вчених-механіків і інженерів у всьому світі. Йому вдалося досягти не лише значних наукових результатів, а й сформувати нові методи навчання і скласти підручники, спрямовані на те, аби «наблизити викладання механіки до вимог інженерів», які згодом завдяки його учням стали основою освітнього процесу в багатьох інженерних школах.

В.Л. Кирпичов залишив порівняно невелику, зате дуже цінну наукову спадщину - понад 40 опублікованих наукових робіт. Всі вони, на думку відомого історика науки і техніки, члена-кореспондента Академії наук України О.М. Боголюбова, «увійшли в золотий фонд … технічної літератури».

НАРИС 21

С.П. ТИМОШЕНКО

Важко вказати напрям у будівельній механіці, де не були б ним одержані результати, які залишили незабутній слід. Він умів підкреслити найголовніше в розглянутих явищах і розв'язати поставлену задачу, застосувати мінімальний математичний апарат. Така постать, як С.П. Тимошенко могла виникнути тільки в умовах великої інженерної школи, яка сформувалася в Росії у другій половині XIX і на початку XX століття.

Г.С. Писаренко

Тепер, через сорок років, обмірковуючи причини наших досягнень, я приходжу до висновку, що немалу роль у цьому відіграла освіта, яку надали нам російські вищі інженерні школи. Фундаментальна підготовка у математиці і в основних технічних предметах давали нам величезну перевагу перед американцями, особливо при розв'язанні нешаблонних задач.

С.П. Тимошенко

Степан Прокопович ТИМОШЕНКО
(1878–1972)

Дитинство. Навчання. Студентські роки

Степан Прокопович Тимошенко народився 23 грудня 1878 р. в Україні у селі Шпотівка недалеко від міста Конотоп (зараз Сумська область) в родині землеміра.

Батько вченого, Прокопій Тимошенко був кріпаком, і тільки щасливий випадок зробив його вільною людиною. Можна лише уявити, що життя в Степана Прокоповича могло б скластися інакше, якби його батько у дитинстві не потрапив до поміщицького будинку, де він одержав непогану освіту у приватних учителів. Потім він продовжив свою освіту в Харкові.

Мати - Юзефіна Яківна Сарнавська (1854-1920) - дочка відставного військового. Вона закінчила жіночу Фундуклеївську гімназію в Києві. Свій м’який характер, любов до праці, схильність до читання, легкість письма вона передала своєму старшому синові - Степану.

Після закінчення реального училища у місті Ромни в 1896 р. С.П. Тимошенко подає прохання про вступ до двох навчальних закладів у Петербурзі: Інституту інженерів шляхів сполучення та Інституту цивільних інженерів. Справа в тім, що С.П. Тимошенко, як випускник реального училища, не мав права вступати до університету. Він успішно складає вступні іспити в обидва, надаючи перевагу першому. До речі, до останніх днів свого життя Степан Прокопович вважав, що саме його навчання в Роменському реальному училищі, прекрасне викладання і спілкування з талановитими однолітками стало фундаментом його подальшої кар’єри.

Спогади про Ромни С.П. Тимошенко проніс через все своє життя, і ті, хто зустрічався з ним у пізню пору його життя, знають, що Ромни - це найулюбленіша тема його розмов: вони спливають неминуче, з чого б не починалася розмова.

При навчанні у Інституті шляхів сполучення тоді перші два роки відводилися загальноінженерним, а наступні три - спеціальним технічним предметам. Раніше в цьому інституті читали опір матеріалів і теорію споруд Г. Ламе і Б. Клапейрон, які організували лабораторію випробувань, пізніше тут працював Д.І. Журавський, виходець із України, вихованець Ніжинського ліцею, видатний будівельник мостів. При С.П. Тимошенко математику читав Д.О. Граве, механіку - автор тритомної монографії Д.К. Бобильов, проектування мостів - М.А. Белелюбський і Л.Ф. Николаї, статику споруд - Ф.С. Ясинський. Останній залишив найсильніше враження у С.П. Тимошенко.


Prof. S. Timoschenko.
Festigkeitslehre.

КУРСЪ

СОПРОТИВЛЕНІЯ МАТЕРІАЛОВЪ.

Проф. С. П. Тимошенко.

ИЗДАНІЕ
КНИЖНАГО МАГАЗИНА Л. ИДЗИКОВСКАГО.
КІЕВЪ
1912.

Підручник С.П. Тимошенка «Курс опору матеріалів»


Ґабріель Ламе,
Gabriel Lame
(1795 - 1870)


Бенуа Поль
Еміль
Клапейрон,
Benois Paul Emile
Clapeyron,
(1799 - 1864)


Дмитро
Костянтинович
Бобильов
(1842–1917)


Микола
Аполлонович
Белелюбський
(1845 – 1922)


Леопольд
Федорович Николаї
(1844-1908)

Математику в інституті їм викладали, як вважав С.П. Тимошенко, неправильно. «Інженерам треба знати тільки те, що складає сутність математичних дисциплін і як ці знання застосовувати на практиці». Цьому професори математики не вчили. Вони лише повторювали курси, які їм викладали в університетах, перевантажуючи їх доведеннями, але майже не даючи їх прикладного застосування. Великий математик і логік Бертран Рассел, з цього приводу зазначив, що «математики готують у вищих навчальних закладах тільки викладачів математики, щоб ті, в свою чергу, готували викладачів математики і т.д. до нескінченності». С.П. Тимошенко розділяв цю думку. Багато років потому видатний фізик А.Ф. Йоффе, співучень С.П. Тимошенка по роменському училищу, напише, що С.П. Тимошенку принесло славу саме впровадження математики у сучасні інженерні розрахунки.

Дмитро́
Олекса́ндрович
Гра́ве
(1863-1939)

Абра́м
Фе́дорович
Йо́ффе
(1880-1960)

Ще в студентські роки С.П. Тимошенкові довелося побувати у Франції та Швейцарії. Він брав участь у Всесвітній паризькій виставці як кращий студент, знаючий іноземну мову. Більш за все його цікавив розділ інженерних споруд, де було виставлено багато моделей різних мостів, покрівель, каналів, портів з їх кресленнями, описом та розрахунками. Побував на будівництві віадука через річку Віорд. За опис цього віадука його нагородили премією.

Науково-педагогічна діяльність

В 1901 р. С.П. Тимошенко серед десяти кращих випускників закінчив один з найкращих навчальних закладів Росії, який забезпечив йому гарну підготовку з проектування і будівництва відповідальних інженерних споруд. Однак вже під час навчання він намагається пізнати якомога більше, ходить на необов’язкові курси з математики, потім в якості вільного слухача - до Петербурзького університету. Формування вченого відбувалося на заняттях у В.Л. Кирпичова, І.Г. Бубнова та інших видатних вітчизняних механіків, на лекціях в Геттінгенському університеті.

Професор Петербурзького політехнічного інституту В.Л. Кирпичов прищепив С.П. Тимошенкові найкращі риси вітчизняної інженерної школи. Одне з основних її положень полягало в тому, що «Теорія повинна мати практичне застосування». Сучасник Тимошенка і колега по викладанню в КПІ професор Є.О. Патон у наставлянні молоді ту саму мету виразив фразою: «Не вважай свою роботу завершеною доти, поки її не перевірило життя, практика».

Бажаючи познайомитись з гідроелектричними установками, С.П. Тимошенко їде до Німеччини, Швейцарії та Італії.

Віктор Львович
Кирпичов
(1801-1861)

Євген Оскарович
Патон
(1870-1953)

Іван Григорович
Бубнов
(1872-1919)

З вересня 1901 р. як доброволець приступає до обов’язкової військової служби сапером строком на один рік.

З 1902 р., відслуживши рік в армії згідно вимог того часу, С.П. Тимошенко розпочинає свою трудову біографію асистентом у механічній лабораторії свого інституту, якою відав М.А. Белелюбський. Виходець із України М.А. Белелюбський здобув визнання як першокласний викладач і лектор. У 1895 р. він опублікував курс лекцій з будівельної механіки. Вперше він приділив увагу теорії «Косих зусиль» - головних напружень, як їх визначив О. Коші. М.А. Белелюбський запропонував методику розрахунку стінок двотаврових балок. Цікаві його обґрунтування з посиланням на мудрість природи: «... розглянуті траєкторії найбільшого розтягу чи стискання, що мають місце в балках, які згинаються, дійсно існують у кістках тварин, що відображається своєрідним розподілом кісткової речовини».

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

ЛЕКЦІИ

Проф. Н. А. Бѣлелюбскаго,

ТЕКСТЪ.

Лекції М.А. Белелюбського з будівельної механіки

З 1903 р. С.П. Тимошенко працює в Петербурзькому політехнічному інституті. Потім в 1906 р. його запрошують до Київського політехнічного інституту.

Вільний час він присвячував вивченню переведеної книги А. Фьоппля з опору матеріалів, перекладу першого тому відомого курсу А. Лява з теорії пружності, вивчанню курсів Г. Ламе і А. Клебша, монографії Г. Рімана «Диференціальні рівняння в частинних похідних» (1869). Слухав також курс теорії пружності І.Г. Бубнова, відвідував заснований в 1903 р. механічний кружок В.Л. Кирпичова. Влітку 1904 р. - поїздка за кордон для ознайомлення з німецькими вищими технічними школами: відвідини Берлінського політехнікуму, політехнікуму в Мюнхені і, зокрема, лекцій і лабораторії А. Фьоппля, заснованої ще І. Баушингером.

Август Отто Фьоппль, Föppl August Otto (1854 – 1924)

Альфред Клебш, нім. Alfred Clebsch (1833 – 1872)

При вивченні книги Релея «Теорія звуку» С.П. Тимошенка захопила ідея наближеного розрахунку частот коливань, і в розвиток роботи В. Фрама (1902) про коливання однорідного суднового валу з двома дисками на кінцях він урахував методом Релея вплив маси валу на частоту коливань, а також показав, як розвинути рішення для випадку декількох дисків. Це була його перша друкована робота «До питання про явища резонансу у валах», опублікована в «Вістях Політехнічного інституту» за 1905 р. «Надалі я не раз користувався методами Релея, і його книга дуже сильно вплинула на мою подальшу роботу» - зазначає С.П. Тимошенко – «В цей час я помітив роботу Вальтера Рітца, надруковану в «Анналах Фізики»[1] і присвячену наближеному обчисленню частот коливань прямокутної пластинки з вільними

---

[1] Annalen der Physik. 1909. Ser. 4. Vol. 28.

краями. Основна ідея методу була та ж, що і у Релея, але Рітц давав математичне доведення збіжності процесу. Ясно було, що для інженера цей метод може бути особливо корисним, і я вирішив застосувати його до двох задач: 1) згину прямокутної пластинки, навантаженої рівномірним поперечним навантаженням і поздовжніми розтягуючими силами; 2) до згину шлюзних воріт, що представляють складну систему перехресних балок. Задачі ці були виконані моїми студентами, і в обох випадках вдалося отримати наближені розв'язки, досить точні для практичних застосувань. Це, ймовірно, було одним з перших застосувань методу Рітца до розв'язання інженерних задач.

Взимку 1909-1910 навчального року я почав розробляти питання про застосування методу Релея-Рітца до обчислення критичних навантажень в задачах стійкості. Уже перші спроби застосування цього методу до задач поздовжнього згину стрижнів дали хороші результати, і я старанно почав працювати над цією задачею. І вчасно - Інститут інженерів шляхів сполучення оголосив конкурс на премію імені Журавського, яка видається раз в десять років за кращі роботи з будівельної механіки. Я вирішив взяти участь в цьому конкурсі і підготувати на премію роботу, яка повинна була показати застосування методу Релея-Рітца до вирішення задач стійкості».


Джон Вільям Стретт, Лорд Релей, Third Baron Rayleigh, John William Strutt (1842–1919)


Вальтер Рітц, Walter Ritz (1878 - 1909)

Після нового 1905 р. внаслідок революційних подій і пов'язаних з ними студентських виступів вузи закрилися; вони були закриті і більшу частину 1906 р. С.П. Тимошенко, не зв'язаний викладацькою роботою, вирішив поїхати в Геттінгенський університет, на філософському факультеті якого відкрили інститут математики на чолі з К. Рунге і інститут прикладної механіки на чолі з Людвігом Прандтлем. Тут він відвідував лекції В. Фойгта з проблем механіки, лабораторні заняття з опору матеріалів Л. Прандтля, лекції Макса Абрахама з диференціальних рівнянь в частинних похідних, а також семінар з прикладної математики і механіки Фелікса Клейна. В інституті Л. Прандтля він почав займатися дослідженням стійкості двотаврової балки, заздалегідь вперше показавши, що в задачі кручення такої балки принцип Сен-Венана не є справедливим.

З осіннього семестру 1905 р. вже в Петербурзькій політехніці він продовжив розв'язок початої задачі про стійкість двотаврової балки і поставив відповідні досліди. Решта часу йшла на слухання лекцій І.В. Мещерського з рівнянь Лаґранжа, І.І. Іванова з еліптичних функцій, І.В. Станевіча з теорії ймовірності, університетських лекцій А.М. Крилова з наближених обчислень, а також домашніх «Бесід про механіку» В.Л. Кирпичова. «Якщо згодом я виявився непоганим викладачем, то цим у великій мірі завдячую Кирпичову», - писав С.П. Тимошенко. І далі:

«Згадуючи тепер про діяльність механічного кружка (В.Л. Кирпичова), ясно видно, що він не тільки сприяв науковій роботі учасників, але ним свого часу була виконана важлива робота по введенню в життя нового методу викладання механіки, що став плідним і прийнятий тепер не тільки в Росії, але і далеко за її межами. У всій цій роботі керівництво і вказівки В.Л. Кирпичова зіграли важливу роль»[1].


Карл Давид Тольме Рунге
Carl David Tolmé Runge
(1856 - 1927)


Людвиг Прандтль,
Ludwig Prandtl
(1875 – 1953)


Фелікс Крістіян Клейн,
Felix Christian Klein
(1849 - 1925)


Адемар Жан-Клод Барре де Сен-Венан,
Adhemar Jean Claude Saint-Venant
(1797-1886)

На початку 1906 р. вийшла стаття «Про стійкість двотаврових балок». Літню пору цього року Тимошенко знов провів в Геттінгені, відвідував лекції Е. Цермело з теорії потенціалу и В. Фохта по термодинаміці. В цей час він почав свою роботу зі стійкості прямокутних рівномірно стислих пластин і в «Вістях Київського політехнічного інституту» за 1907 р. опублікував статтю «До питання про стійкість стислих пластинок». Характерне відношення самого автора до цієї роботи: «Ця робота є, мабуть, найбільш істотною зі всього, що мною зроблено в галузі стійкості деформацій».

В листопаді 1906 р. С.П. Тимошенко отримав з Києва телеграму з поздоровленням. Із семи кандидатів, які брали участь у конкурсі, він був обраний професором кафедри опору матеріалів КПІ. Це стало успіхом для молодого 28-річного інженера, який на той час не мав лекторського досвіду. Вчена рада КПІ віддала перевагу С.П. Тимошенку з огляду на його наукові праці, які були кращими за інші, подані старшими та більш досвідченими кандидатами на цю посаду.


Іван Всеволодович Мещерський
(1856 - 1927)


Олексій Миколайович Крилов
(1863-1945)

---

[1] Див.: «Кружок імені В.Л. Кирпичова», Munchen, 1958, 11 стор.

Благословивши на цей крок молодого вченого, професор В.Л. Кирпичов радив йому: «кожна лекція тільки тоді досягає мети, коли вона ретельно підготовлена, коли обраний найбільш простий спосіб потрібних доведень і підібрані хороші приклади для ілюстрації теорії. Бажано починати викладення предмета з найпростіших випадків. І тільки тоді, коли вони добре засвоєні слухачами, можна переходити до більш загальних і складних задач». Цю пораду талановитого педагога С.П. Тимошенко пам’ятав та використовував на протязі всього свого життя.

Ернст Цермело,
Ernst Zermelo
(1871 - 1953)

Вольдемар
Фохт,
Woldemar Voigt
(1850 – 1919)

Кіріа́к Самсо́нович
Заврієв
(1891 - 1978)

У вищих навчальних закладах і КПІ також була традиція - на першу лекцію нового професора збирались студенти і викладачі усіх інженерних факультетів. Студенти на лекції тоді, як правило, майже не ходили. Велика фізична аудиторія, найбільша в КПІ, 8 січня 1907 р. була переповнена. Сюди зійшлися понад 400 студентів усіх інженерних відділень Київської політехніки, щоб послухати першу лекцію з опору матеріалів нового професора С.П. Тимошенка. Лекція вдалася, студенти переконались, що молодий професор має хист хорошого лектора. С.П. Тимошенко сказав тоді [Тимошенко, 1993]: «…лектор з мене непоганий, і мої лекції слід відвідувати...».

Почалась його кар’єра лектора, яка тривала багато років і завершилась лише у 60-х роках XX ст. в Стенфордському університеті штату Каліфорнія.

С.П. Тимошенко виявився чудовим лектором. Слухач його лекції професор К.С. Заврієв (до речі, дуже багато хто з його слухачів стали професорами) розповідав про лекторські манери С.П. Тимошенко. Кожну лекцію С.П. Тимошенко будував як розв’язок інженерної задачі, яку він формулював спочатку. Завжди без всяких записок, він створював ілюзію, що розв’язок шукається на очах у слухачів. Непоодинокими були і помилки, які слухачі знаходили самі, шумно сперечаючись один з одним. Ці моменти він вважав найбільш продуктивними в процесі навчання, а зовсім не механічне списування з дошки готових формул. Звичайно ж, це була лише артистична імітація процесу творчості. Насправді виведення формул ретельно готувалось заздалегідь, але студентам рішення здавалося неважким завдяки такому підходу, і лектор через помилки не виглядав неповторним небожителем. Студент «сам брав участь у приємному процесі народження нових формул». На питання чи всі помилки народжувалися природно, чи не було нарочитих, К.С. Заврієв впевнено не відповів.

Для короткого односеместрового елементарного курсу опору матеріалів студенти всіх спеціальностей КПІ користувались підручником В.Л. Кирпичова. Для студентів інженерно-будівельного та механічного відділень курс опору матеріалів був повний та читався два семестри, а необхідного підручника не було. Цей підручник С.П. Тимошенко написав паралельно з читанням лекцій та надрукував у 1911 р. Він складався саме з лекційного курсу опору матеріалів, що був побудований за принципом «від простого до складного» (літографічне видання 1908, 1909 рр.; остаточний варіант - 1911), а також з задачника за курсом (1910). Фактично він заново побудував курс опору матеріалів. Те традиційне викладення предмету, яке прийняте в даний час, сформоване завдяки С.П. Тимошенку. Одночасно він впродовж декількох років читав курс теорії пружності, літографічне видання якого вийшло в 1909 р. російською мовою. Незабаром ця книга набула значної популярності та використовувалася як підручник багатьма вищими навчальними закладами. Пізніше С.П. Тимошенко переробив та видав його у двох частинах. Нині практично у кожному технічному університеті світу студенти механічних спеціальностей користуються цим підручником, який видано декільками мовами. Для підвищення рівня підготовки студентів-механіків КПІ С.П. Тимошенко самостійно вирішив прочитати їм необов'язковий курс теорії пружності. На той час цей курс лекцій читали в абстрактній формі, без достатнього інженерного обґрунтування та конкретизації прикладних задач. Для зацікавлення студентів, Тимошенко вирішив показати, що, користуючись теорією пружності, можна отримати розв'язки таких задач, які неможливо дослідити за допомогою елементарної теорії опору матеріалів. Необхідних підручників для такого курсу на той час не було. Тому С.П. Тимошенко багато часу приділив тому, щоб зібрати необхідні матеріали для своїх лекцій та знаходженню методик, які б дозволяли студентам більш глибоко зрозуміти курс теорії пружності. Прочитавши цей курс декілька разів, він надрукував його повністю уже в Петербурзі в 1916 р. Пізніше підручник було перекладено англійською та іншими мовами. На титульній сторінці цієї фундаментальної книги можна прочитати: «Посвящается памяти дорогого учителя Виктора Львовича Кирпичева».

Навесні 1909 р. Тимошенко знов відвідав Геттінген, де слухав лекції Ф. Клейна з теорії пружності, В. Фохта з гідродинаміки та Л. Прандтля з аеродинаміки. В цей час ним були отримані результати з застосування методу нормальних координат до згину стержнів і пластин. Крім того, із використанням методу Релея була досліджена проблема вимушених повздовжніх і поперечних коливань стержнів.

С.П. Тимошенка завжди цікавила педагогічна діяльність і він не шкодував часу на цю роботу. Але з осені 1908 р., коли його обрали секретарем інженерно-будівельного відділення КПІ, прийшлось витрачати час і на адміністративні справи. Деканом цього відділення був на той час Є.О. Патон, який зробив дуже багато корисного в удосконалені організації навчального процесу в КПІ. З 1909 по 1911 рр. деканом інженерно-будівельного факультету працював

С.П. Тимошенко. 1909-1910 роки були присвячені застосуванню енергетичного методу до проблеми стійкості і написанню монографії «Про стійкість пружних систем» (1910). Представлення рішень за допомогою тригонометричних рядів і обчислення коефіцієнтів цих рядів з умови мінімуму енергії дозволило йому розглянути широкий клас важких проблем стійкості і ввести енергетичний метод в практику інженерних досліджень.

У 1911 р. урядом рішуче ліквідовувалися залишки реформ революційного часу 1905 р. У цей рік С.П. Тимошенко у числі трьох деканів КПІ був звільнений з роботи за свої прогресивні погляди за прямою вказівкою голови кабінету міністрів Росії П.А. Столипіна. Ця ситуація докладно описана у «Воспоминаниях» С.П. Тимошенка [Тимошенко, 2016] Але майже весь професорсько-викладацький склад КПІ підтримав опальних професорів. Рада КПІ підкреслювала, що під керівництвом С.П. Тимошенка «… три випуски набули блискучих знань в галузі його спеціальності, і низка молодих учених гідно очолює кафедри в інших вишах». З почуття солідарності багато професорів подали у відставку, і інститут втратив 40% професорського складу. Ця акція мала серйозні наслідки: жодна державна установа не могла прийняти на штатну посаду звільненого професора. Крім того довелося звільнити займану державну квартиру. С.П. Тимошенку вдалося пережити цей складний період його життя за рахунок гонорару за видання курсу опору матеріалів, а також премії імені Д.І. Журавського за роботу з теорії стійкості. Він подав цю роботу на здобуття присуджуваної раз в десять років премії імені Д.І. Журавського, рівної річному професорському окладу. Це було перше і останнє присудження премії імені Д.І. Журавського. Нею в липні 1911 р. була відмічена представлена робота і стаття «Про стійкість плоскої форми згину двотаврових балок» згідно відгукам І.Г. Бубнова, М.А. Белелюбського, С.І. Белзецького, В.Л. Кирпичова, Г.В. Колосова, Г.Н. Соловйова, журі у складі М.А. Ляхницького, Г.К. Мерчинга, Н.Н. Мітинського, А.І. Прілєжаєва, Г.Н. Соловйова. Відгуки І.Г. Бубнова, С.І. Белзецького, В.Л. Кирпичова, Г.В. Колосова були опубліковані в 1913 р. в «Збірці Інституту інженерів шляхів сполучення». 1913 р. вважається роком народження відомого загального методу розв'язку диференціальних рівнянь - методу Бубнова. Насправді цей метод був сформульований на два роки раніше і приводом для цього стала поява роботи С.П. Тимошенко.

У 1911 р. С.П. Тимошенко змушений був знову переїхати до Петербурга і влаштуватися позаштатним консультантом з питань міцності на російських суднобудівних заводах, проте вже в 1912 р. йому запропонували читати курс теорії пружності, а потім і курс теоретичної механіки в Інституті шляхів сполучення. Незабаром опала була знята і С.П. Тимошенко був затверджений у професорському званні двох інститутів: Інституту шляхів сполучення і електротехнічного інституту.

А.М. Крилов відмовився від професорської посади в С.-Петербурзькому Інституті інженерів шляхів сполучення на користь С.П. Тимошенко, і, в результаті, коли в січні 1913 р. опала була знята, С.П. Тимошенко вдалося

Гурій Васильович
Колосов
(1867-1936)

Едуард Іванович
Григолюк
(1923 - 2005)

Михайло Сергійович
Грушевський
(1866-1934)

отримати посаду професора з теоретичної механіки; лекції з цього курсу згодом були опубліковані в розширеному викладі. Згодом він отримав кафедру теоретичної механіки. Потім він був зарахований і в Електротехнічний інститут. Часу стало більше і йому вдалося вирішити ряд нових задач. В кінці 1913 р. він закінчив перший том свого курсу теорії пружності, який відрізнявся від відомих у той час курсів Д.К. Бобильова (1886), Ф.С. Ясинського (1897, 1903), І.Г. Бубнова (1909).

Влітку 1915 р. головним чином по раніше опублікованих роботах С.П. Тимошенко склав другу частину курсу теорії пружності (1916). Влітку 1917 р. він почав писати «Статику споруд». Влітку 1918 р. він почав писати книгу з розрахунку арок, яка в 1922 р. вийшла французькою мовою.

У 1927 р. він закінчив книгу по вібраціям «Теорія коливань в інженерній справі» (1928), узявши приклади зі своєї заводської практики, а теорію - з раніше опублікованих робіт.

Навесні 1917 р. він отримав телеграму з Києва із запрошенням повернутись у Київську політехніку. Він ним скористався і був зарахований професором КПІ, та з осені 1918 р. повернувся до педагогічної роботи.

Навчання в КПІ закінчилося в перших числах грудня через відсутність опалення. Решту часу до самого від’їзду за кордон (на початку 1920 р.) С.П. Тимошенко займався, в основному, організаційними проблемами.

Створення Української академії наук

Слід особливо відзначити участь С.П. Тимошенка у створенні Української академії наук.

Після розпаду Російської імперії Українське наукове товариство (УНТ), створене в 1907 р. у м. Києві на чолі з М.С. Грушевським на об’єднаному засіданні 8 липня 1917 р. утворило Комісію для створення Української Академії наук. А 3 квітня 1918 р. УНТ звернулося в Міністерство освіти Української народної республіки (УНР) із пропозицією розглянути можливість фінансування робіт з реорганізації УНТ в УАН. Національна академія наук за концепцією М.С. Грушевського повинна була стати недержавною інституцією без власних наукових установ.

Майже в той же час виникла інша концепція створення національного академічного центру. У вересні-жовтні 1917 р. у Петрограді товаришем міністра народної освіти Росії був М.П. Василенко. Вони разом з В.І. Вернадським були

Микола Прокопович Василенко (1866-1935)

Володимир Іванович Вернадський (1863 – 1945)

Павло́ Петро́вич Скоропадський (1873 – 1945)

серед прихильників створення державних організацій наукових досліджень в Україні, Грузії та Сибіру.

Під час правління в Україні гетьмана П.П. Скоропадського з 29 квітня 1918 р. М.П. Василенко очолював Міністерство народної освіти і мистецтв і 5 травня 1918 р. запропонував програму дій в галузі освіти, науки і культури, у якій уперше був сформульований намір держави створити Національну Академію наук у м. Києві.

Для організації Української академії наук М.П. Василенко запросив В.І. Вернадського, котрий перебував у цей період у Полтаві. Відомий організатор науки В.І. Вернадський був прихильником створення державної мережі науково-дослідних інститутів. Він, як людина передових поглядів, відверто вважав, що «задачею є не державна організація науки, а державна допомога науковій творчості націй». 7 червня В.І. Вернадський обговорив питання створення Української академії наук з М.С. Грушевським, який стояв на принципах побудови УАН як вільного союзу високих наукових авторитетів. Його позиція була проти концепції Вернадського-Василенка. Теж саме було і у відношенні кадрового складу і напрямку діяльності УАН. В.І. Вернадський наполягав на створенні «Академії українознавства», принаймні на початковому етапі. Сам М.С. Грушевський категорично відмовився від участі у будь-яких заходах, що пропонувалися урядом П.П. Скоропадського.

Перше засідання Комісії для розробки законопроекту про створення Української Академії наук відбувалося в кабінеті міністра М.П. Василенка 9 липня 1918 р. На ньому були присутні: В.І. Вернадський, Н.Ф. Кащенко, Д.І. Багалей, С.П. Тимошенко, П.А. Тутковський та ін. Пізніше членами Комісії стали також А.Е. Кримський, М.І. Туган-Барановський та ін.

Комісія визначила принципові проблеми, пов’язані з розробкою структури академії і складом її відділень, переліком кафедр, наукових установ, порядок їхнього утворення. На цьому засіданні дійшли висновка, що призначення першого складу Академії верховною владою є логічним з огляду на шлях створення УАН державою.

Ініціативна група на чолі з В.І. Вернадським доручила С.П. Тимошенку скласти доповідну записку про організації підрозділу прикладних наук у фізико-математичному відділенні Української академії наук. Ідея зближення науки із запитами життя завжди була близька С.П. Тимошенку, і він з радістю і великим інтересом зайнявся складанням записки.

У вступній частині С.П. Тимошенко писав: «Характерною рисою сучасного розвитку промисловості і техніки є широке використання наукового методу і зібраних наукою фактів. Часи, коли наука і техніка йшли різними шляхами, уже пройшли, і тепер часто-густо для рішення суто технічних завдань користуються могутнім знаряддям, яке дають нам математика і механіка. Користуються методами експериментальних наук і широко пристосовують їх для рішення технічних завдань лабораторним шляхом». «Почин у справі об’єднання науки і техніки повинна узяти на себе Академія наук. Завдяки своєму центральному положенню і науковому авторитетові вона зможе зібрати навколо себе ті нечисленні наукові сили, що зараз маються на Україні, і об’єднати їх у загальній роботі, де буде можливим співробітництво людей техніки і науки». «Представники технічної науки, - відзначав далі С.П. Тимошенко, - будуть мати можливість більшою мірою, ніж тепер, користуватися науковими методами і накопиченими чистою наукою знаннями. З іншого боку, і представники чистої науки в галузі прикладного природознавства наштовхнуться на цілий ряд нових, ще не досліджених питань, рішення яких не тільки збагатить науку, але й буде сприяти розвиткові промисловості і технічного життя краю. В галузі експериментального досвіду люди науки зможуть використовувати ті могутні засоби, які дає в руки експериментатора сучасна техніка».

С.П. Тимошенко вважав, що у новоутвореній Українській Академії наук повинно більше уваги приділяти об’єднанню чистої науки з рішенням технічних задач, відповідно до запитів техніки. При організації в новій Академії наук підрозділу прикладного природознавства, Тимошенко прагнув досягнення наступної мети: «1) сприяння розвиткові науки в самому широкому змісті цього слова, 2) вивчення природних багатств країни, 3) вивчення й удосконалення методів використання природних багатств, 4) участь у справі підготовки професорського складу для вищих шкіл». У складі фізико-математичного відділення, крім основного звичайного підрозділу, властивого усім академіям, він планував створення нового «прикладного природознавства», припускаючи, «що в ньому повинні розроблятися не окремі випадки техніки, а її основи, що спираються на природознавство і математику, що вимагають їхнього розвитку для виявлення тих нових наукових задач, що виникатимуть із новими запитами життя. Техніка, у широкому змісті цього слова, на кожнім кроці має справу з питаннями тих же наук, з якими мають справу у своїй дослідницькій роботі математики й натуралісти. Але вона одержує їх із життя, а не ставить їх собі вільним особистим вибором, як це робить науковий дослідник». «Об’єднана робота науки і техніки, - підкреслював Тимошенко, - особливо плідна й приводить до разючих успіхів в обох галузях». Він думав, що цю роль повинна взяти на себе УАН, яка, завдяки своєму центральному положенню, зможе зібрати наявні наукові сили й об’єднати їх у загальній роботі. При цьому фахівці-пракики будуть ширше використовувати наукові методи, а представники науки знайдуть безліч недосліджених пракичних питань, а в галузі експериментальних досліджень з’явиться сучасна техніка, що, у свою чергу, збагатить практику.

Комісія закінчила свою роботу з вироблення законопроекту про створення Української Академії наук 17 вересня, а 12 жовтня міністр народної освіти і мистецтв М.П. Василенко передав пакет документів Раді Міністрів. 14 листопада 1918 р. гетьман України П.П. Скоропадський затвердив ухвалений Радою Міністрів «Закон Української держави про утворення Української академії наук у Києві», а також прикладені до нього Статут і штати академії та її установ, підготовлені Комісією з розробки законопроекту організації УАН на чолі з В.І. Вернадським, яка була утворена Міністерством освіти і мистецтв з ініціативи М.П. Василенка. За пропозицією Комісії були призначені і перші дійсні члени (академіки) УАН. Ними стали Д.І. Багалій, А.Є. Кримський, М.І. Петров, С.І. Смаль-Стоцький (історико-філологічне відділення), В.І. Вернадський, С.П. Тимошенко, М.Ф. Кащенко, П.А. Тутковський (фізико-математичне відділення), М.І. Туган-Барановський, Ф.В. Тарановський, В.А. Косинський, О. Левицький (соціально-економічне відділення).

Ось як згадує ті часи П.П. Скоропадський (Гетьман Української держави 29.04-14.12.1918) у своїх «Спогадах» [Скоропадський, 1995]:

«Київ, хоча і був головним культурним центром всього півдня Росії, проте завжди був провінційним містом, тепер же, коли він в деякому роді став столицею 40 мільйонів людей, в ньому, особливо в перший час, відчувалася жахлива нестача в людях науки.

Для того, щоб поповнити нестачу в наукових силах, у нас складалися списки осіб, яких бажано було б залучити для роботи в Україні. Це дало можливість Василенку внести проект про створення Української Академії наук.

Я гаряче співчував цьому починанню. Була складена комісія під головуванням професора Вернадського і внесений закон про заснування Академії з усіма необхідними ассигновками, і він пройшов. Уже й приміщення для початку робіт Академії було знайдено.

Я так по пам'яті не можу в подробицях вказати всі відділи Академії, пам'ятаю лише, що там був відділ розвитку української мови і приділялась велика увага створенню відділу з природознавства України, причому цьому відділу передбачалося надати значення, головним чином практичне.

Василенко мав багато ворогів, його безбожно критикували з багатьох питань. Можливо, критика була і справедлива, але хто не помиляється раз багато працює. У всякому разі, безсумнівно, що будь-які випробування не стояли перед Україною, слід діяльності Василенка залишиться».

У період з листопада 1918 р. до січня 1919 р. УАН проводила активну науково-організаційну роботу. Фізико-математичне відділення УАН складалося з 14 кафедр основного класу і 16 кафедр класу прикладного природознавства.

У цей час були засновані академічні кафедри фізико-математичного відділення, в числі яких була кафедра прикладної механіки, яку очолив С.П. Тимошенко. Одночасно пройшли вибори і затвердження на посадах директорів. 27 листопада 1918 р. відбулися перші Загальні збори УАН, на яких головою-президентом Академії був обраний В.І. Вернадський. А на других

Загальних зборах УАН, що відбулися 30 листопада, був утворений Інститут технічної механіки УАН і його директором затверджено С.П. Тимошенка. Перше десятиріччя свого існування інститут займав провідне місце у фізико-математичному відділенні.


Дмитро Іванович
Багалі́й
(1857 - 1932)


Агатангел
Юхимович
Кри́мський
(1871 – 1942)


Микола Іванович
Петро́в
(1840 – 1921)


Степан Йосипович
Сма́ль-Сто́цький
(1859 – 1938)


Микола
Феофанович
Кащенко
(1855 – 1935)


Павло
Аполлонович
Тутковський
(1858 - 1930)


Миха́йло
Іва́нович Туган-
Барановський
(1865 – 1919)


Фе́дір
Васильович
Тарано́вський
(1875 – 1936)


Володи́мир
Андрійович
Косинський
(1864 – 1938)


О́рест Іва́нович
Левицький
(1848 – 1922)

У 1929 р. Інститут технічної механіки був розділений на Інститут будівельної механіки і Кабінет транспортної механіки. У 1959 р. Постановою Ради міністрів УРСР Інститут будівельної механіки перейменований в Інститут механіки АН УРСР, а в 1993 р. Постановою Президії АН України Інститутові механіки АН України присвоєно ім’я С.П. Тимошенко.

Власне вся історія розвитку інституту, на базі якого було утворено чимало інших самостійних наукових установ АН УРСР, ґрунтується якоюсь мірою на принципах, закладених С.П. Тимошенком на зорі зародження української академічної науки. Варто визнати, що ідеї, висловлені ним майже сто років тому під час організації Української Академії наук, виявилися досить прогресивними і знайшли втілення на практиці. Досвід першої Української Академії наук, де вперше у світовій практиці до числа академічних наук були включені технічні науки, пізніше був розповсюджений у практиці роботи АН УРСР та у всіх інших республіканських академіях. Ідеї С.П. Тимошенка, закладені ним при створенні

Української Академії наук, з часом, одержавши подальший розвиток у наші дні, сприяють широкому впровадженню результатів наукових досягнень у практику.

Інститут очолювали відомі вчені академіки НАН України: С.П. Тимошенко (1918-1920), Д.О. Граве (1921), К.К. Симінський (1921-1932), С.В. Серенсен (1932–1940), М.В. Корноухов (1940–1944), Ф.П. Белянкін (1944–1958), Г.М. Савін (1958–1959), А.Д. Коваленко (1959–1965), В.О. Кононенко (1965–1975). З 1976 р. інститут очолює академік НАН України О.М. Гузь.


С.П. Тимошенко


Д.О. Граве


К.К. Симінський


С.В. Серенсен


М.В. Корноухов


Ф.П. Бєлянкін


Г.М. Савін


А.Д. Коваленко


В.О. Кононенко


О.М. Гузь

На сьогодні Україна має високий світовий рівень розвитку механіки і суміжних наук.

Рівень науки визначається, наприклад, існуванням в Національній академії наук України Відділення механіки і ряду відомих у світовій науці наукових установ: Інституту механіки ім.С.П. Тимошенка, Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка, Інституту гідромеханіки, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Фізико-механічного інституту ім. В.Г. Карпенка, Інституту прикладної математики і механіки, Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова, Інституту технічної механіки та ряду близьких до механіки установ: Інституту надтвердих ма-теріалів ім. В.М. Бакуля, Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона, Інституту проблем машино будування ім. А.М. Підгорного та інших. Слід теж зазначити, що у Києві, Львові, Одесі, Дніпрі, Харкові функціонують відомі у світі наукові школи з механіки і видаються 4 наукові журнали з механіки, які перекладаються англійською мовою найбільшим у світі науковим видав-ництвом Springer Group. Значні дослідження проведені на кафедрах і в науково-дослідних інститутах провідних вишів, в галузевих науково-дослідних інститутах та інших установах.

Національний комітет України з теоретичної та прикладної механіки (НКУ) утворений згідно з Постановою Президії Академії наук України №191 від

03.07.1992 року. Цією ж Постановою на Інститут механіки Академії наук України (ІМ) покладені функції базової установи НКУ.

Установчі збори комітету, на яких були присутні 202 провідні вчені України, що працювали в області механіки та суміжних наук і представляли різні наукові центри України, відбулися 07.06.1993 р.

Основними задачами НКУ є: підготовка і проведення наукових форумів з теоретичної та при-кладної механіки, суміжних наук; сприяння координації наукових досліджень з окремих питань механіки, що проводяться вченими у різних установах, відомствах та галузей; зміцнення зв’язків механіків України з закордонними вченими, а також організаціями і міжнародними товариствами з метою розвитку механіки; розповсюдження науково-технічної інформації з механіки; предс-тавництво механіків України у Міжнародному союзі з теоретичної та прикладної механіки (International Union of Theoretical and Applied Mechanics - IUTAM) та інших міжнародних організаціях з механіки та суміжних наук.

IUTAM був організований 22 вересня 1946 р. на установчих зборах провідних механіків світу в університеті «Сорбонна» в Парижі і на даний момент є найбільш престижним науковим союзом в області механіки. Доречно вказати, що світова фізика об‘єднана в International Union of Pure and Applied Physics – IUPAP.

Другим після IUTAM за значимістю є Європейське Товариство Механіки (European Mechanics Society), це товариство передбачає лише особисте членство вчених. Третім - Товариство з прикладної математики і механіки (GAMM – Gesellschaft fur angewandte Mathematik und Mechanik), де українські вчені мають своє представництво поряд з іншими вченими Східної Європи.

Останній склад Президії НКУ обрано на Загальних звітно-перевиборних зборах 10 лютого 2014 р. у складі 5 чоловік: голова – Гузь О.М., заступники голови – Баженов В.А., Матвєєв В.В., Мартинюк А.А., Шевченко В.П., вчений секретар – Рущицький Я.Я. Голова комітету О.М. Гузь академік НАН України Member of European Academy of Sciences (Brussels) Member of Academia Europaea (London), Fellow of the World Innovation Foundation (London).

НКУ є афілійованим членом IUTAM (всього афілійованими членами є 55 країн, у яких механіка досягла певного рівня розвитку). На сесії Генеральної Асамблеї IUTAM у м. Чікаго (США) в 2000 р. відбулося позитивне голосування про прийом України до IUTAM. Представником України в Генеральній Асамблеї обраний Гузь О.М.

НКУ сприяє розвитку всіх важливих і актуальних напрямків фундаментальних досліджень в галузі механіки і суміжних наук, використовуючи різні механізми (підтримка публікацій у міжнародному науковому журналі «Прикладная механика-International Applied Mechanics», обговорення на наукових семінарах та наукових конференціях тощо).

Всього на даний час до складу НКУ входять 282 члени – доктори наук з механіки і суміжних галузей науки, які представляють приблизно порівну академічну та університетську науку.

НКУ є єдиною всеукраїнською громадською організацією, яка об'єднує учених всіх областей України, що працюють в області механіки та суміжних наук, і яка створює платформу для обговорення всіх важливих проблем розвитку механіки та суміжних наук. Вплив членів НКУ на наукові дослідження в області механіки є домінуючим і визначаючим.

Діяльність НКУ націлена як на збереження світового рівня розвитку механіки, досягнутого попередніми і сучасним поколіннями вчених України, так і на розвиток нових напрямків механіки (наприклад, наномеханіки, біомеханіки, трибомеханіки тощо).

Феномен С.П. Тимошенка

Слід окремо відзначити феномен С.П. Тимошенка, основні характеристики якого викладені в книгах академіка НАН України Г.С. Писаренка [Писаренко, 1991] і А.П. Філіна [Филин, 1993]. У 1992 р. Київською кіностудією знятий фільм, присвячений С.П. Тимошенко (режисер-сценарист Ю.Г. Іванов).

Анатолій Петрович Філін

Книга завершується розділом «Феномен С.П. Тимошенка». Автор зазначає чинники, що зумовили можливість виникнення такої яскравої, абсолютно оригінальної особистості вченого. До них він відносить: хороші генетичні дані; благотворний вплив сім'ї; сільськогосподарська праця з раннього дитинства, що виховала виняткові, феноменальні працьовитість і працездатність; гарне фізичне здоров'я; хорошу підготовку з математики, отриману в Роменському реальному училищі; прищеплене хлопчикові прагнення до використання результатів досліджень при вирішенні практичних задач. Все це виховало у Тимошенка допитливість, що проявлялась до всього нового, прагнення домагатися строгості, ясності, логічності викладу у всіх публікованих працях. При всій любові до математики С.П. Тимошенко відводив їй допоміжну роль. Систематично ведучи наукові дослідження, він не залишав викладацьку роботу і приділяв увагу просвітницькій діяльності. Для С.П. Тимошенко були характерні м'якість, людяність, гуманність, доброзичливість, що забезпечують внутрішню комфортність психологічного морально-етичного стану, яка сприяє творчості. Сукупність усіх цих факторів, на думку Г.С. Писаренка, і створила феномен С.П. Тимошенка.

«Мені видається, - пише А.П. Філін, - що широка, закономірна популярність С.П. Тимошенко і органічний зв'язок його з багатьма інженерними науковими організаціями багато в чому визначалася наступними шістьма факторами:

1. Галуззю його діяльності - проблемою міцності, що лежить в перетині інтересів багатьох галузей техніки: мостобудування, кораблебудування, літакобудування, машинобудування, гідротехніки, промислового і цивільного будівництва тощо.

2. Широтою охоплення проблеми міцності, практично енциклопедичної. Досить згадати назви розділів механіки твердого деформівного тіла, які були полем його діяльності.

3. Правильним вибором рівня проникнення в природу явища. Маю на увазі інженерний рівень, достатній для вирішення проблем з доведенням їх для практичного застосування при мінімальному використанні математичного апарату. Це визначалося характером проблем, що вставали в той час перед технікою.

4. Правильним вибором співвідношення типів праць - підручників, органічно пов'язаних з педагогічною діяльністю, і нових наукових результатів, оформлених у вигляді статей або монографій вузького профілю.

5. Необмеженою можливістю всіх видів зв'язку із закордонним світом, починаючи з молодих років, за наявності мінімально необхідної для таких зв'язків початкової матеріальної забезпеченості.

6. Наявністю такої дуже важливої точки докладання зусиль вченого, яка знаходилася на недостатньо високому рівні, як інженерна проблема міцності в США і на виробництві, і у вищих навчальних закладах. Діяльність вченого в цій галузі звернула на себе серйозну увагу величезного числа зацікавлених організацій.

Мабуть, виключення навіть одного якогось з перелічених факторів досить для того, щоб феномен Тимошенко міг не відбутися в повному своєму різноманітті, на високому рівні і у вражаючому обсязі».

До 35 років С.П. Тимошенко, будучи ще зовсім молодим ученим із дванадцятирічним стажем після закінчення інституту, мав можливість відвідати Англію, Німеччину, Італію, Фінляндію, Францію і Швейцарію, де він мав тісні контакти з видатними ученими: Ф. Клейном, Т. Леві-Чивіта, Г. Лембом, А. Лявом, Л. Прандтлем, Дж. Релеєм, А. Фьопплем, В. Фохтом. При цьому перебування за кордоном було не екскурсійним, а тривалим. С.П. Тимошенко слухав лекції, працював у лабораторіях, виконував дисертаційну роботу, брав участь у діяльності семінарів і конгресів. В цьому ж віці С.П. Тимошенко вже був автором 35 наукових праць, серед яких курси з теорії пружності, опору матеріалів і відома робота зі стійкості пружних систем.

Переїхавши до США, він, як і раніше, не був відірваний від навколишнього світу. Слід зазначити, що в 1957 р. на честь С.П. Тимошенка була заснована медаль, як наукова нагорода Американського товариства інженерів-механіків за видатні досягнення в галузі прикладної механіки. Сам

Тулліо Леві-Чивіта,
Tullio Levi Civita,
(1873 - 1941)

Сер Горацій Лемб,
Sir Horace Lamb
(1849 – 1934)

Август Едуард Ляв,
Augustus Edward Hough Love
(1863 – 1940)

С.П. Тимошенко став першим її лауреатом.

Отже, одним з факторів виникнення феномена С.П. Тимошенка є те, що він усе своє життя знаходився в умовах повної доступності для нього закордонного наукового світу.

Конче необхідно відзначити ще один фактор, який забезпечив виникнення феномена С.П. Тимошенка. Мається на увазі рівень матеріальної забезпеченості ученого, що дозволяв йому, при наявності повної свободи пересування по земній кулі, скористатися цією свободою. С.П. Тимошенку пощастило й у цьому відношенні - він був досить забезпеченою людиною, щоб уже на зорі своєї кар'єри вченого мати можливість здійснювати тривалі закордонні поїздки.

Активна діяльність С.П. Тимошенка проходила в ту пору розвитку механіки, коли існувало багато ще не вирішених, важливих для техніки проблем, які при наявності високої інтуїції, великої наукової ерудиції могли бути вирішені інженерними засобами з використанням, зрозуміло, адекватного математичного апарата, який, як правило, не набагато перевищує математичні курси, що викладаються в вищих технічних навчальних закладах. Степан Прокопович з успіхом вирішив ряд таких проблем по-інженерному, але на рівні, що вимагав наявності великого таланту. Життєві умови наштовхнули його на думку про написання підручників і монографій. З-під його пера вийшли книги з опору матеріалів, теорії пружності, теорії пластин і оболонок, статики споруд, із задач динаміки в інженерній справі та ін. Були механіки – сучасники С.П. Тимошенка, які зробили великий внесок у механіку, але не було таких, котрі одночасно були б такими блискучими педагогами й авторами чудових книг. Ніщо не заважало С.П. Тимошенку поєднати педагогічну роботу з науковою і виробничою інженерною діяльністю. В результаті й вийшов той рідкий сплав, що являє собою феномен С.П. Тимошенка.

Також, можна в зв'язку з життям і діяльністю С.П. Тимошенка привести висловлення Д.І. Писарєва: «Хто цінує життя, той добре знає, що справжньою освітою є тільки самоосвіта і що вона починається тільки з тієї хвилини, коли людина, розпрощавшись з усіма школами, стає повним господарем свого часу і своєї діяльності».

У 1920 р. С.П. Тимошенко прийняв рішення залишити Батьківщину. Після цього він працював у Загребському політехнічному інституті в Югославії. У 1922 р. перебрався до США, де працював у приватній компанії, що займалася збалансуванням машин й усуненням вібрацій, у фірмі «Вестінґауз» (1923), викладав у Мічиганському університеті (1927), в Стенфордському університеті в Каліфорнії (1936), у 1964 р., відійшовши від активної діяльності, він переїжджає до дочки, яка мешкала в місті Вупперталь у Німеччині.

Життєвий шлях С.П. Тимошенка був описаний ним самим у його спогадах, що вперше російською мовою були опубліковані у Парижі в 1963 р. На його батьківщині, в Україні, ці спогади були опубліковані завдяки зусиллям академіка НАН України Г.С. Писаренка в 1993 р. [Тимошенко, 1993], якому належить велика заслуга в увіковічуванні пам'яті С.П. Тимошенка.

У 2014 р. «Воспоминания» були видані у Москві [Тимошенко, 2014], а у 2016 р. перевидані [Тимошенко, 2016].

С.П. Тимошенко зробив фундаментальний внесок у механіку твердого деформівного тіла. Широко відомі його роботи з опору матеріалів, теорії пружності, теорії коливань, стійкості пружних систем, теорії споруд, теорії пластин і оболонок, прикладної динаміки, історії опору матеріалів та ін.

Важко назвати ще одного такого механіка ХХ ст., роботи якого так би широко використовувалися в інженерній практиці, як роботи С.П. Тимошенка.

Ставлення до С.П. Тимошенка в колишньому СРСР було неоднозначне. З одного боку, він був з 1928 р. членом-кореспондентом, а з 1964 р. іноземним членом Академії наук СРСР, його книги досить широко видавалися. З іншого боку, популяризація його робіт і його імені в СРСР не відповідали дійсним заслугам цього вченого.

В даний час ім’я С.П. Тимошенка добре знане в Україні. Вийшли друком його спогади, Інститут механіки НАН України, у джерел створення якого стояв С.П. Тимошенко, носить його ім’я, у Київському політехнічному інституті, де він працював, видатному механікові установлений пам’ятник, установлені меморіальні дошки на будинку, у якому він жив у Києві, і на стінах реального училища в м. Ромни, у якому він учився, заснована премія Національної академії наук України його імені.

У 1958 р. С.П. Тимошенко приїхав до Києва, відвідав також Москву, Ленінград і Харків. Метою його поїздки було ознайомлення зі станом вищої інженерної освіти в Радянському Союзі, що значною мірою було обумовлено бажанням американців більше знати про підготовку фахівців у СРСР у зв’язку з успіхами СРСР у космічній техніці. Результатом поїздки було видання книги «Інженерна освіта в Росії» [Тимошенко, 1997], у якій С.П. Тимошенко високо оцінив систему інженерної підготовки в СРСР. Зокрема, у цій книзі він писав:

«Моє враження полягає в тому, що в принципі Росія майже цілком повернулася до освітньої системи, що існувала перед комуністичною революцією. Традиції старої школи виявилися дуже сильними, і за допомогою залишків старих викладацьких кадрів стало можливим упорядкувати інженерну освіту, зруйновану під час революції. В даний час Росія має велику кількість інженерних навчальних закладів з компетентними викладацькими кадрами і достатнім устаткуванням, що дає можливість майбутнім інженерам у процесі навчання одержати необхідні знання.

Підвищені вимоги з математики і природничих наук, великі конкурси на вступних іспитах дозволяють викладати фундаментальні науки - такі, як математика, механіка, фізика і хімія на більш високому рівні, ніж у нас.

З нашою слабкою підготовкою у середній школі ми не зможемо, очевидно, досягти того, що мають сьогодні вищі навчальні заклади в Росії».

Під час перебування у Києві С.П. Тимошенко прочитав лекцію у великій фізичній аудиторії Київського політехнічного інституту про стан вищої освіти в

США, порівнюючи його зі станом вищої освіти в Росії, у тому вигляді, у якому він його пам'ятав за часів своєї роботи у тодішніх вищих навчальних закладах.

У своїй лекції він високо оцінив рівень підготовки студентів у вищих інженерних навчальних закладах Росії, особливо в галузі фундаментальних наук, підкреслюючи, що в США цей рівень набагато нижчий.

Велике враження на аудиторію справило те, що С.П. Тимошенко, порівнюючи системи підготовки інженерів у двох країнах, говорив «у них», маючи на увазі США, і «у нас», маючи на увазі стару Росію.

Коли С.П. Тимошенка запитали, які зі своїх наукових результатів він вважає найбільш важливими, він відповів, що це роботи зі стійкості пружних систем.

Дуже тепло С.П. Тимошенко відзивався про свого колегу, професора КПІ Є.О. Патона. Він розповідав, що перед від'їздом зайшов попрощатися з ним і коли той вийшов його проводити, на руках у нього була дитина. С.П. Тимошенко сказав: «Це був нинішній президент вашої академії наук».

Можна навести наступні його слова: «Тепер, через сорок років, обмірковуючи причину наших (моїх власних та інших вихідців з Росії) досягнень в Америці, я приходжу до висновку, що чималу роль в цьому зіграла освіта, яку нам дали російські вищі інженерні школи». Він також говорив: «Залишившись в Америці, я, звичайно, розширив свій досвід у справі застосування наукового аналізу до вирішення технічних задач, я написав ряд курсів, що знайшли поширення. Але нового в Америці зробив мало». Про глибину знань, отриманих С.П. Тимошенком в Росії, свідчать, наприклад, його висловлювання про те, що широку популярність в інженерних колах США він одержав після того, як розв'язав одну з важливих інженерних задач, використавши метод фотопружності, який він вивчив завдяки лекціям В.Л. Кирпичова. Цей метод у той час був невідомий у США.

Історія науки і техніки (якщо не брати до уваги його спогади) стала, завершальним етапом творчої діяльності С.П. Тимошенка. Але важко чітко виділити ці етапи, не можна окреслити їх хронологічними рамками. Зокрема, історією він цікавився мабуть ще з років навчання в Петербурзькому інституті інженерів шляхів сполучення.

Слід зауважити, що інтерес до історії техніки був обумовлений і методом викладання. Ще перший директор Київського політехнічного інституту В.Л. Кирпичов для ілюстрації теорії застосував у лекціях поступовий перехід від простих прикладів до загальних і складних проблем. Такий метод вимагав глибокого знання історії розвитку предмету кожної теми.

С.П. Тимошенко при викладанні курсу опору матеріалів обов'язково називав імена вчених, які розв'язували проблему або задачу, про яку говорилось в той момент. І якщо дозволяв час, він зразу, а іноді і в позалекційний час, розповідав про їх життя і діяльність.

Він досліджував праці знаменитого Галілея в зв'язку з його роботами з механіки твердого тіла. Він опрацював роботи Ш.О. Кулона, досліджуючи його формули, застосовані для розрахунку опору «кручення круглих стержнів та при вивченні тиску сипучих матеріалів на підпірні стіни». Вивчення робіт Даніеля і

Якоба Бернуллі, Л. Ейлера і Ж.-Л. Лаґранжа дали можливість розібратися в теорії згину призматичних стержнів. Досліджуючи формулу Ейлера, Тимошенко дійшов висновку, що вона має межі свого застосування.


Бернуллі, Якоб I
Bernoulli, Jakob I
(1654 - 1705)


Бернуллі, Даніель I
Bernoulli, Daniel I
(1700 - 1782)


Ейлер, Леонард
Euler, Leonhard
(1707 - 1783)


Лагранж, Жозеф Луї
Lagrange, Joseph
Louis
(1736 – 1813)

С.П. Тимошенко відомий як засновник найбільшої школи механіки в США. Сталося так, що значну частину свого творчого життя він був за кордоном. Але говорячи про свою наукову роботу, він підкреслював: «Мої головні наукові праці, звичайно, вийшли в Росії. Підручники також давно тут використовуються» [Тимошенко, 1963].

Досвід викладання показує, що розповіді про життя і діяльність вчених, винахідників, боротьбу ідей та історію відкриттів і винаходів пожвавлюють лекції, сприймаються аудиторією з зацікавленням, підвищують загальний культурний рівень студентів.

Популяризацією знань про інженерні науки С.П. Тимошенко починає займатись ще в 1907 р. в Києві, читає лекції у Товаристві розповсюдження просвіти в народі. В 1908 р. його обирають головою товариства.

Працюючи у фірмі «Вестінґауз», С.П. Тимошенко вирішував не тільки проблеми міцності, але й займався підвищенням рівня освіти інженерів фірми. Його викладацький талант не залишився непоміченим, і його запросили в Мічиганський університет в Анн-Арборі завідувати кафедрою механіки.

С.П. Тимошенко значним чином вплинув на становлення технічної освіти США. Він мав здібність розповідати про найскладніші питання фізики і математики просто і дохідливо. С.П. Тимошенко виділявся як організатор, запропонував проводити тижневі семінари, в яких могли брати участь усі заціцікавлені проблемами механіки, літні курси для викладачів вищих навчальних закладів країни, де лекції читали провідні вчені США та європейських країн. Авторитет С.П. Тимошенка та коло його знайомств були надзвичайно широкі.

Протягом десятиліть С.П. Тимошенко збирав інформацію про минуле будівельної механіки і суміжних до неї наук. Обов’язково відвідував букіністичні ринки і меморіальні і наукові музеї усіх міст Америки і Європи, де йому доводилось бувати. Так, в 1948 р. він побував в Італії у Римському і Флорентійському університетах. В останньому є музей Галілея, де зберігалися прилади, якими вчений користувався у своїх наукових дослідженнях. Ознайомившись з ними, С.П. Тимошенко дійшов висновку, що великий вчений, більш відомий як астроном і фізик, цікавився властивостями матеріалів і багато зробив у галузі міцності споруд.

До праць історичного характеру можна віднести і звіти С.П. Тимошенка про участь у з'їздах та інспектуваннях. Особливо цікавим є звіт керівництву компанії «Вестінґауз» про стан теоретичної і прикладної механіки в Європі, що його дослідив С.П. Тимошенко у 1926 р. За два місяці він взяв участь у роботі з'їзду Британської асоціації розвитку науки в Оксфорді, Міжнародному з'їзді механіків в Цюріху, ознайомився з роботами лабораторій у Кембріджі, Триніті-коледжі, компанії «Метрополітен Віккерс», заводів у містах Ессен, Геттінген, Берлін, Дрезден (Німеччина), Шафгаузен (Швейцарія). Цей звіт був розмножений і розданий фахівцям.

Свої погляди на важливість об'єднання науки і техніки С.П. Тимошенко втілив у життя при створенні Української академії наук. Як уже зазначалось, уперше у світі за його пропозицією технічні науки були включені до рангу академічних наук і в складі академії був організований підрозділ «прикладного природознавства». Це було в 1918 р., а в 1953 р., як би підсумовуючи свою діяльність, в своїй ґрунтовній праці з історії опору матеріалів він червоною стрічкою проводить думку про необхідність використання досягнень науки на практиці. Вчений доводить, що механіка - це наука, яка створена для обслуговування проблем техніки, а техніка, у свою чергу, ставила перед наукою нові завдання і підказувала нові напрямки розвитку.

Офіційно історію науки про опір матеріалів С.П. Тимошенко почав викладати в 1947 р. в Стенфордському університеті США. В 1949 р. він прочитав лекції з історії в Літній школі механіків Мічиганського університету, а в 1952 р. закінчив рукопис і здав його для друку [Timoshenko, 1953].

Досить цікавою є методика викладання матеріалу у цій праці. Спочатку вчений дає оцінку проблеми, обумовленість її виникнення. Потім наводить біографічні відомості про вчених і обставини, за яких вони зайнялися дослідами. І наприкінці надає опис результатів наукової роботи, її суть, висновки, схеми, подальший розвиток і боротьбу ідей. Питання зв'язку між досягненнями науки і вимогами практики він зачіпає тільки мимохідь. Це, на нашу думку, можна пояснити тим, що, як пише сам автор у передмові: «Ця книга виникла на основі лекцій з історії опору матеріалів, які я читав протягом останніх 25 років для студентів, які спеціалізувалися в технічній механіці і вже прослухали курси опору матеріалів і теорії споруд ... Працюючи над книгою, я мав на увазі головним чином тих студентів, які, вивчивши обов'язковий курс опору матеріалів, виявляють бажання заглибитися в цю науку і познайомитися з історією її розвитку» [Тимошенко, 1957, с. 7].

Відомо, що про прикладне значення кожної теорії і формули Тимошенко розповідав в основних лекціях, а знання про діяльність вчених він вважав необхідними для поглиблення кваліфікації. Але навіть і через біографії йому вдається: «дати широкому колу читачів історичний огляд основних етапів у розвитку нашої науки, не входячи в зайві подробиці» [Тимошенко, 1957, с. 7)].

Ще одна порада історикам техніки: «Не можна задовільно викласти історію науки про опір матеріалів уникаючи історію розвитку суміжних наук - теорії пружності і теорії споруд. У своєму розвитку всі ці науки тісно пов'язані між собою, і тому в цю книгу довелося внести дещо з історії цих двох наук» [Тимошенко, 1957, с. 8)].

Як це часто буває при вивченні історії техніки, яка охоплює величезний час розвитку, Тимошенко викладає матеріал в хронологічній послідовності і поділяє історію опору матеріалів і суміжних наук на декілька періодів.

Оцінюючи загальний обсяг розробленого С.П. Тимошенком матеріалу, необхідно відзначити, що в книзі згадуються понад 800 діячів науки і техніки. Матеріал викладений в 14 розділах, на 452 сторінках оригінального видання [Timoshenko, 1953], і 536 сторінках в перекладі російською мовою [Тимошенко, 1957]. Окрім того, в тому ж таки 1953 р. Тимошенко опублікував окрему статтю, присвячену історії розвитку опору матеріалів в Росії.

Серед багаточисленних медалей і премій Степана Прокоповича є медаль ім. Ламе (1939) за заслуги в інженерній освіті Американського товариства інженерної освіти, медаль ім. Густава Трангестера (1948) Спілки інженерів Вищої школи в Льєжі «за імпульс, наданий прикладній механіці і за заслуги з наукового обґрунтування інженерної практики». Можна вважати, що цими нагородами відмічена його ідея - розповідати при викладанні складного наукового матеріалу про його авторів та історію їх досліджень.

У 1970 р. С.П. Тимошенко опублікував свою останню наукову статтю, вона розміщувалась у ювілейній збірці його учня патріарха хорватської механіки Хлитчнєва.

Звертає на себе увагу довголіття С.П. Тимошенка, він прожив 94 роки. Тим більше, що в молодості він серйозно хворів. Поясненням може слугувати спосіб життя і творчості вченого. У похилому віці він не намагався не відставати від молодих і не кидався безрозсудно в найновіші наукові галузі, а обрав спокійний шлях історика науки.

Помер С.П. Тимошенко 29 травня 1972 р. в м. Вупперталь (ФРН), де жив в останні роки з овдовілою дочкою. Помер не від хвороби, а від того, що впав під час купання у ванній і у нього відірвалася нирка. Він прожив довге і славетне життя, закінчивши своєчасно усі земні справи.

З нагоди 125-річчя від дня народження С.П. Тимошенка у Національному технічному університеті «Київський політехнічний інститут» були проведені наукові читання «С.П. Тимошенко – механік XX століття» (2004), в матеріалах яких наведено багато цікавих фактів з життя і діяльності С.П. Тимошенка.

Коли відзначався 100-річний ювілей КПІ, Вчена рада інституту вирішила встановити два пам’ятники: перший - ректору Кирпичову Віктору Львовичу, ліворуч від центрального входу в Головний корпус, а праворуч, навпроти вікон деканату механіко-машинобудівного факультету - Тимошенку Степану

Прокоповичу. У тому, що ці два пам’ятники стоять майже поруч, є певний символізим. С.П. Тимошенко починав працювати тут, і його роль в цьому учбовому закладі дуже велика.

Література

1. V Всеукраїнські педагогічні читання імені М.В. Остроградського "Педагогіка математики і природознавства" // ПостМетодика. – 2001. – № 3. – С. 41.
2. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці : зб. нарисів / упоряд. О. К. Романчук. – Л. : Каменяр, 1991. – 246 с.
3. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці : зб. нарисів / упоряд. О. К. Романчук. – Л. : Меморіал, 1992. – 544 с.
4. *Александров Е.Е., Назаренко С.А., Хавин В.Л.* Деятельность основателя отечественной научной школы механики и машиностроения профессора В.Л. Кирпичева. - Механіка та машинобудування. – 2012. - № 2. – С. 230-249.
5. *Баженов В.А., Кобієв В.Г.* Микола Васильович Корноухов. – Київ: КНУБА, 2002.
6. *Барабаш О.* До Парижа - на перекладних / О. Барабаш // Полтавський вісник. – 2001. – № 36. – С. 5.
7. *Барабаш О.* Дружба двох геніїв України / О. Барабаш // Зоря Полтавщини. – 2001. – № 14 верес. – С. 3.
8. *Барабаш О.* З останніх досліджень про славетного вченого-земляка / О. Барабаш // Імідж сучасного педагога. – 2002. – № 6–7. – С. 23–25.
9. *Барабаш О.* Інженер, учений, педагог / О. Барабаш // Зоря Полтавщини. – 1980. – № 12 жовт. – С. 2.
10. *Барабаш О.* Математик з світовим ім'ям] / О. Барабаш // Комсомолець Полтавщини. – 1991. – № 24 верес. – С. 3.
11. *Барабаш О.* Патріарх вітчизняних математиків / О. Барабаш // Зоря Полтавщини. – 1996. – № 16 лист. – С. 3.
12. *Барабаш О.* Патріарх вітчизняних математиків М.В. Остроградський/ О. Барабаш // Освіта. – 1991. – № 24 верес. – С. 3.
13. *Барабаш О.* Славне ім'я земляка / О. Барабаш // Комсомолець Полтавщини. – 1987. – № 24 січ. – С. 3.
14. *Барабаш О.* Служінню людям присвятили своє життя нащадки нашого земляка М. В. Остроградського / О. Барабаш // Комсомолець Полтавщини. – 1983. – № 22 лют. – С. 3.
15. *Бахмутская Э.Я., Страдынь Я.П.* Отчет В.Л. Кирпичева о реорганизации Рижского политехнического института. - В кн.: Из истории естествознания и техники Прибалтики. Рига, 1968.
16. *Бевз В.* М.В. Остроградський - математик, механік, педагог / В. Бевз // Математика в школі. – 2001. – № 4. – С. 66–69.
17. *Бевз В.Г.* М.В. Остроградський - популяризатор математичної науки / В. Г. Бевз // Математична газета : додаток до журн. "Мат. в школі". – 2006. – № 8. – С. 30–32.
18. *Бєляков Г.Ф.* Київський політехнічний інститут. Нарис історії / Г.Ф. Бєляков, Є.С. Василенко, М. Ф. Волков. - К.: Наук. думка, 1995. - 320 с.
19. *Бєсов Л.М.* Історія науки і техніки / Л.М. Бєсов. - Харків: НТУ «ХПІ», 2005. - 383 с.
20. *Бєсов Л.М., Звонкова Г.Л.* Видатний організатор інженерної освіти в Україні Віктор Львович Кирпичов. - Наука та наукознавство. - 2010. - № 1. - С. 87-97.

21. *Бобарыков И.И.* В.Л. Кирпичев: (Некролог). - Журн. О-ва сиб. инж., Томск, 1913, № 10, с. 365.
22. *Бобир М.І.* Наукова школа механіків КПІ. - http://kpi.ua/912-8
23. *Боголюбов О.М.* М.В. Остроградський і Д.О. Граве: до інваріантів розвитку математики / О.М. Боголюбов, М.О. Пустовойтов // ПостМетодика. – 1996. – № 4. – С. 57.
24. *Богомолов Н.* Жизнь и деятельность М.В. Остроградского / Н. Богомолов // Математика : прилож. к газ."Первое сент.". – 2005. – № 13. – С. 2–4.
25. *Бойко А.М.* Елективний курс "Педагогічна спадщина М. В.Остроградського" / А. М. Бойко, Л. А. Семеновська // Дидаскал. – 2004. – № 2. – С. 204–217.
26. *Брылевская Л.И.* Реформа математического образования в николаевское время // Философский век. Россия в николаевское время: наука, политика, просвещение. СПб., 1998. Вып.6.;
27. *Быков А.Н.* Памяти В.Л. Кирпичева. - Рус. мысль, 1913, № 11, с. 130.
28. *Василенко О.* Україна - світовій математиці. До 200-річчя від дня народження Михайла Остроградського / О. Василенко // Освіта. – 2001. – № 42. – С. 1–8.
29. Воспоминания Валериана Александровича Панаева // Русская старина. СПб., октябрь-ноябрь 1893. Т.80.
30. Воспоминания Н.П. Петрова об Остроградском // Вестник Военно-инженерной академии имени В.В.Куйбышева М., 1945. Вып.43.
31. Вшанували земляка - видатного математика // Полтавський вісник. – 2001. – № 28 верес. – С. 1.
32. Высшее техническое образование в России к концу XIX века и роль С.Ю. Витте в истории его развития // Известия Киевского Политехнического института Императора Александра II.: Отдел инженерно-механический. – Кн. 4. – 1913. – С. 402-405.
33. *Гайтан О.* М.В. Остроградський як педагог / О. Гайтан // Імідж сучасного педагога. – 2001. – № 5. – С.28–29.
34. *Галай Г.І.* Михайло Васильович Остроградський (1801-1862 рр.) / Г.І. Галай, Г.Д. Гриневич // Учням про видатних математиків / І.Я. Галай, Г.Д. Гриневич; за ред. М.І. Кованцова. – К., 1976. – С. 105–108.
35. *Галеркин Б.Г.* Развитие строительной механики в СССР / Б.Г. Галеркин / Математика и естествознание в СССР. - М.; Л.: изд-во АН СССР, 1938.
36. *Ганицкий И.М.* Виктор Львович Кирпичев. - Изв. КПИ, 1914. - С. 386 - 387.
37. *Ганицкий П.М.* Виктор Львович Кирпичев: (Жизнеописание). - Изв. КПИ, 1913, кн. 4. - С. 383.
38. *Гарківець В.В.* М.В. Остроградський - видатний український математик / В.В. Гарківець // Математика : додат. до газ. "Шкільний світ". – 2001. – № 31-32. – С. 4–5.
39. Геній повертається додому // Голос України. – 2001. – № 14 верес. – С. 3.
40. *Геронимус Я.Л.* Очерки о работах корифеев русской механики, Гостехиздат, 1952 г.
41. *Гнеденко Б.В.* Выдающийся русский ученый М.В. Остроградский / Б.В. Гнеденко. – М.: Знание, 1952. – 24 с.

42. *Гнеденко Б.В.* М.В. Остроградский. Очерк жизни, научного творчества, педагогической деятельности, ГТТИ, 1952.

43. *Гнеденко Б.В.* Михаил Васильевич Остроградский (1801-1862). Жизнь и работа. Научное и педагогическое наследие / Б. В. Гнеденко, И. Б. Погребысский. – М. : Академиздат, 1963. – 269 с.

44. *Гнеденко Б.В.* Михаил Васильевич Остроградский. М., 1984.

45. *Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б.* Михаил Васильевич Остроградский. - М., Изд-во Академии наук СССР, 1963.

46. *Головко М.* Досягнення вітчизняної науки в галузі термодинаміки та їх вплив на розвиток учення про теплоту в XIX ст. - Фізика та астрономія в школі. – 2007. – № 2. – С. 46–48.

47. *Горбачук М.* Славетний математик з козацького роду / М. Горбачук, Г. Сита // Кур'єр ЮНЕСКО. – 2001. – № 7–8. – С. 31.

48. *Грабовський Я.І.* Справжнє призначення у житті / Я. І. Грабовський // Все для вчителя. – 2007. – № 4. – С. 95–98.

49. *Гречишко Н.* Пам'яті М.В. Остроградського присвячується. Математично-музичний вечір // Математика: Додат. до газ."Шкільний світ". – 2006. – № 44. – С.1–5.

50. *Григорьян А.Т.* Михаил Васильевич Остроградский. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 91 с. – (Научно-популярная серия).

51. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Перший директор інституту механіки ім. С.П. Тимошенка Національної Академії наук України///Прикладна механіка. — 1998, 34, №10.

52. *Даниленко Д.* Відкрито меморіальну дошку // Комсомолець Полтавщини. – 1985. – № 25 жовт. – С. 3.

53. *Добровольський В.* Михайло Васильович Остроградський. – К. : Ін-т математики НАН України, 2001. – 88 с.

54. *Єфанов М.В.* Земний шлях Михайла Васильовича Остроградського. Край. – 2011. – № 6. – С. 19–20.

55. Життєвість науково-педагогічних поглядів академіка М.В. Остроградського: метод. розробка для студ. та вчителів / ред. О.П. Руденко; Полт. держ. пед. ін-т ім. В.Г.Короленка; Творча спілка математиків Полтавщини. – Полтава, 1991. – 40 с.

56. Життя та наукова спадщина Михайла Остроградського // Бюлетень українського математичного товариства. – 2002. – № 11–12. – С. 1–8.

57. *Жук В.Н.* Кімната-музей М.В. Остроградського / В. Н. Жук, Е. Б. Яворський // Полтавський державний педагогічний університет ім. В. Г. Короленка мовою музейних експонатів. (Нариси про музеї, музейні кімнати, музейні аудиторії) / ред. В. Н. Жук, Н. В. Жигилій. – Полтава, 2000. – С. 57–62.

58. *Загайко П.* Поет і математик // Зоря Полтавщини. – 1987. – № 23 серп. – С. 3.

59. *Задорожня Т.* Теорія ймовірностей у спадщині Михайла Остроградського / Т. Задорожня // Математика в школі. – 2002. – № 3. – С. 29, 44.

60. *Звонкова Г.Л.* Розвиток природничих і технічних наук у Харкові в другій половині XIX — на початку XX століття: Історичний, освітянський і культурний контексти: дис… канд. іст. наук: 07.00.07 / Г.Л. Звонкова. - К., 2005. - 236 с.

61. *Звонкова Г.Л.* Штрихи до портрету В.Л. Кирпичова та його внеску у формування, організацію, розвиток і зміст вітчизняної інженерної освіти / Г.Л. Звонкова // Українська еліта та її роль в державотворенні: [зб. наук. праць №1'2]. - К. : Міністерство оборони України; Військовий гуманітарний інститут Національної академії оборони України, 2000. - С. 12-17.
62. *Згуровський М.З.* Столітня формула Київської політехніки /М.З. Згуровський// Київський політехнік. – 2003. – № 22. – С. 1–3.
63. *Зернов Д.С.* Прикладная механика: в 2 ч. / Д.С. Зернов и [др.]; под ред. Х.Ф. Кетова. - Л., М.: ОНТИ. Гл. ред. лит. По машиностроению и металлообработке, 1937.
64. История отечественной математики в 4-х томах / Отв. ред. *И.З.Штокало.* Киев, 1966-1970.
65. *Іваненко О.А.* Франція в житті та творчості М.В. Остроградського / О. А. Іваненко // Вісник Київського національного університету. – 2003. – Вип. 65-66. – С. 7–9. – (Сер. Історія).
66. Історія Академії наук України, 1918-1933. — Київ: Наукова думка, 1994.
67. Історія Полтавського краю: Сер. 3.: М.В. Остроградський - перший український математик світового масштабу : метод. посіб. для вчителів історії, мови і л-ри, математики та фізики, учнів / Середня шк.-інтернат №1 м. Полтави, Наук.-дослід. лаб. каф. фізики Полт. держ. пед. ун-т ім. В. Г. Короленка. – Полтава : АСМІ, 2002. – 68 с. : іл. – (Б-чка вчителя, учня, викладача).
68. *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. ГИТТЛ, М, Л., 1951, 360 с.
69. *Кирпичёв В.Л.* Задачи высшего технического образования / В.Л. Кирпичёв. - Харьков, 1890. - 70 с.
70. *Кирпичев В.Л.* Значение фантазии для инженеров. – 1903а. http://kpi.ua/kyrpychov-fancy
71. *Кирпичев В.Л.* Иван Алексеевич Вышнеградский, как профессор и учёный. — Вестн. О-ва технологов, 1895, № 6, с. 95 — 96.
72. *Кирпичёв В.Л.* Отчёт о командировке в Северную Америку Директора Харьковского Технологического Института / В.Л. Кирпичёв. — С.-Пб.: Типография кн. В.П. Мищерского, 1895. — 80 с.
73. *Кирпичев В.Л.* Приложение теоремы лорда Рэлея к вопросам строительной механики. — Изв. С.-Петербург. практ. технол. ин-та, 1883 и 1884 гг.
74. *Кирпичев В.Л.* Собр. соч.: В 2-х т. Пг., 1917, т. 1, с. XXXVIII — XXXIX.
75. *Кирпичев Л.Л.* Начала баллистики. С.-Пб., 1889, с. 128.
76. *Кирпичев М.В., Лавров Г.П.* Виктор Львович Кирпичев. — Тр. ЛПИ, 1948, № 1. Материалы по истории института, с. 149.
77. *Кирпичев В.Л.* Десятилетие Харьковского практического технологического института: Отчет, прочитанный на годичном акте 15 сентября 1895 г. Харьков, 1895, с. 9.
78. *Кирпичев В.Л.* Лишние неизвестные в строительной механике. Расчет статически неопределимых систем. К.: Изд-во Кульженка, 1903б.
79. *Кирпичев В.Л.* Лишние неизвестные в строительной механике: расчет статически-неопределимых систем. – Москва, 1934.

80. *Клепко О.* Велич і дві помилки Остроградського / О. Клепко // Математика: додат. до газ."Шкільний світ". – 2001. – № 15. – С. 13.

81. *Клепко С.Ф.* Конспекти з філософії освіти / Сергій Федорович Клепко ; АПН України; Полт. обл. ін-т післядипломної пед. освіти ім. М. В. Остроградського. – Полтава, 2007. – 420 с.

82. *Козьмин П.А.* В.Л. Кирпичев: (Некролог). — Журн. О-ва сиб. инж., Томск. 1913, № 10, с. 364 - 365.

83. *Конфорович А.* "Ми не повинні вірити в бога..." / А. Конфорович, М. Сорока // Людина і світ. – 1981. – № 9. – С. 50–53.

84. *Конфорович А.* Остроградський М.В. / А. Конфорович, М. Сорока // Наука і суспільство. – 1980. – № 8. – С. 34–41 ; № 9. – С. 26–31.

85. *Конфорович А.* Остроградський. Біографічний роман / А. Конфорович, М. Сорока. – К. : Молодь, 1980. – 216 с. – (Уславлені імена).

86. *Конфорович А.* Шляхи Остроградського. До 175-річчя з дня народження / А. Конфорович, М. Сорока // Дніпро. – 1976. – № 9. – С .123–127.

87. *Костенко Ю.Т.* Харківський політехнічний: вчені та педагоги / Ю.Т. Костенко, В.В. Морозов, В.І. Ніколаєнко, Ю.Д. Сакара, Л.Л. Товажнянський. – Х.: Прапор, 1999. – С. 5-7.

88. *Кравченко О.* Пошанували видатного земляка / О. Кравченко // Зоря Полтавщини. – 1996. – № 13 лист. – С. 3.

89. *Кропотов А.И.* Михаил Васильевич Остроградский и его педагогическое наследие : пособие для учителей / А. И. Кропотов, И. А. Марон. – М. : Учпедгиз, 1961. – 203 с.

90. *Крылов А.Н.* Жозеф Луи Лагранж. - В сб.: Ж.Л. Лагранж (1736-1936). Сб. статей к 200-летию со дня рождения. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1937.

91. *Кучевський М.І.* Виведення формули коренів квадратного рівняння різними методами. Урок-конференція / М. І. Кучевський // Математика в школах України. – 2007. – № 4. – С. 34–38.

92. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика, том 1. - М.-Л., ГИТТЛ, 1950. - 594 с.

93. *Ліпінська А.* Історія розвитку стохастики / А. Ліпінська // Математика в школі. – 2007. – № 4. – С. 49–53 ; № 5.– С. 51–55.

94. *Ляшенко Н.* Шана академіку з Пашенної. До 200-річчя з дня народження М. В. Остроградського / Н. Ляшенко, О. Барабаш // Завуч. – 2001. – № 11. – С. 1.

95. *Ляшенко Н.І.* Будемо гідними мрій М. В. Остроградського / Н. І. Ляшенко // ПостМетодика. – 1996. – № 4. – С. 56.

96. М.В. Остроградский и математическая физика // Развитие естествознания в России: (XVIII - начало XX в) / под. ред. С. Р. Микулинского, А. П. Юшкевича ; АН СССР, Ин-т истории естествознания и техники. – М., 1977. – С. 165–169.

97. М.В. Остроградський - видатний математик, механік і педагог: матеріали міжнар. конф. присвяченої 200-річчю з дня народження М. В. Остроградського, (26-27 верес. 2001 р.) / Ін-т мат. НАН України, Упр. освіти і науки Полтав. обл держ. адмін., Полтав. обл. ін-т післядипломн. освіти пед. працівн. ім. М. В. Остроградського; Полтав. держ. пед. ун-т ім. В. Г. Короленка. – Полтава, 2001. – 178 с.

98. *Миколаєнко В.* Вчений, педагог, організатор вищої технічної освіти / В. Миколаєнко // Київський політехнік. – 2005. – №31. – С. 14-27.

99. *Мирошниченко В.* Інформатизація навчально-виховного процесу в загальноосвітніх навчальних закладах області як втілення ідеї М.В. Остроградського [/ В. Мирошниченко // Імідж сучасного педагога. – 2006. – № 9–10. – С. 7–9.

100. *Мирошниченко В.І.* Ідеї Остроградського для розвитку освіти на Полтавщині / В. І. Мирошниченко // ПостМетодика. – 2001. – № 3. – С. 38–40.

101. Михаил Васильевич Остроградский (1801-1961 гг.) // Математика в школе. – 1980. – № 6. – С. 2.

102. Михаил Васильевич Остроградский // Математика: Прилож.к газ."Первое сент.". – 2006. – № 5. – С. 24.

103. Михаил Васильевич Остроградский. 1 января 1862 - 1 января 1962: Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности / под ред. И.Б. Погребыского и А.П.Юшкевича. – М. : Изд.-во физико-матем. л-ры, 1961. – 399 с. – (Инт математики Акад. наук УССР).

104. Михаил Васильевич Остроградский. Празднование столетия дня его рождения Полтавским кружком любителей физико-математических наук / Ред. и сост. П.И.Трипольский. Полтава.

105. *Михайлець С.* М.В. Остроградський про викладання геометрії / С. Михайлець // Імідж сучасного педагога. – 2001. – № 5. – С. 10–16.

106. Михайло Васильович Остроградський / Підготувала Н. Черенко // Шкільний світ. – 2007. – № 40. – С. 21.

107. *Міхєєва Т.* Видатний математик Остроградський Михайло Васильович / Т. Міхєєва // Освіта. Технікуми, коледжі. – 2002. – № 1. – С. 62–63.

108. *Мосіенко Т.М.* Михайло Остроградський - патріарх вітчизняної математики, вчений і педагог / Т. М. Мосіенко // Математика : додат. до газ."Шкільний світ". – 2001. – № 31–32. – С. 2–4.

109. *Назаренко С.А., Хавин В.Л., Непран Н.В., Семененко Л.П.* Основные работы профессора Д.С. Зернова. – Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наук. праць. Тематичний випуск «Машинознавство та САПР». – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. – № 51. – С. 16–23.

110. *Наливайко І.* Німецька колонія в Полтаві / Наливайко І. // Полтавський вісник. – 2007. – № 1. – С. 16.

111. *Наливайко І.* Українець, якого знає світ / І. Наливайко // Зоря Полтавщини. – 2001. – № 26 черв. – С. 3.

112. Національна. Академія наук України. – К.: "Фенікс", 1998.

113. *Никитенко А.В.* Дневник в 3-х томах. Л., 1955-1956.

114. Описание празднества, данного в честь академика, действительного статского советника Алексея Николаевича Савича 23 января 1866 г. - Кронштадт, 1866.

115. *Остроградский М.В.* Полное собрание трудов, т. 1—3, Киев, Изд-во АН УССР, 1959—1961.

116. Остроградський М.В. (до 200-річчя з дня народження) / ред.: А. Самойленко, Г. Сита. – К. : НАН України; Ін-т математики, 2001. – 128 с.

117. *Остроградський М.В.* Роздуми про викладання / М.В. Остроградський, А.І. Блум // Математика : додат. до газ."Шкільний світ". – 1999. – № 23–24. – С. 8–12.

118. *Отрадных Ф.П.* Михаил Васильевич Остроградский, Л., 1953.

119. Отчет о сотоянии ХТИ за 1885 год // Известия Харьковского Технологического Института імператора Александра III. Т.1. – Х.: Типография и Литография М. Зильберберга и С-вья, 1905. – 490 с.

120. *Охріменко І.М.* Остроградський і національна освіта на Полтавщині / І. Охріменко // Освіта і управління. – 1998. – № 4. – С. 11–15.

121. Очерки по истории Академии наук СССР (к 220-летию); физико-матем. науки. Изд. АН СССР, 1945.

122. *Пасько С.Е.* М.В. Остроградський. Шлях до науки / С. Е. Пасько // Антологія краєзнавства Полтавщини : наук.-метод. посіб. / Полт. обл. ін-т післядипломної пед. освіти ім. М.В. Остроградського; за ред. П.І. Матвієнка. – Полтава, 2002. – С. 181–186.

123. Педагогіка математики і природознавства : IV Всеукраїнські читання, присвячені пам'яті М. В. Остроградського, (4-5 жовт. 2000 р.) : зб. ст / АПНУ ; ПОІПОПП. – Полтава, 2000. – 156 с.

124. Педагогіка математики і природознавства : V Всеукраїнські читання, присвячені пам'яті М. В. Остроградського. 24-25 верес. 2001 р.: зб. ст. / АПНУ, Упр. освіти і науки Полт. обл. держ. адмін., ПДПУ ім. В.Г. Короленка, Полт. обл. ін-т післядипломної пед. освіти ім. М.В. Остроградського. – Полтава, 2001. – 72 с.

125. *Писаренко Г.С.* Степан Прокопович Тимошенко. - М.: Наука, 1991. - 239 с.

126. *Питель И.Н.* М.В. Остроградский - психолог и педагог, его влияние на современного преподавателя и студента / И. Н. Питель // Спадщина видатних педагогів Полтавщини в міжнародному освітньому просторі : матеріали міжнар. наук.-практ. конф. «Досвід видатних педагогів Полтавщини в управлінській діяльності» : Всеукр. наук.-практ. семінар, (Полтава, 12-13 берез. 2009 р.) / за заг. ред. М. В. Гриньової ; Ін-т педагогіки АПН України, Полт. обл. рада, Полт. міська рада, Полт. держ. пед. ун-т імені В.Г. Короленка. – Полтава, 2009. – С. 63–65.

127. *Пікуль В.* Быть тебе Остроградским! / В. Пікуль // Пані вчителька. – 2007. – № 1. – С. 76–80.

128. *Платов А., Кирпичев Л.* Исторический очерк образования и развития Артиллерийского училища (1820-1870). СПб., 1870.

129. Прикладная механика: курс лекций / Д.С. Зернов; Харьк. технол. ин-т. – Х.: Электр. Типо-Лит. С.А. Шмерковича, 1902. - 334 с.

130. Проблеми педагогіки, математики і природознавства // Математика: додат. до газ."Шкільний світ". – 2000. – № 19. – С. 1.

131. Промова першого директора КПІ В.Л. Кирпичова на урочистому відкритті КПІ 31 серпня 1898. - http://kpi.ua/823-2

132. Профессор В.Л. Кирпичев: «Фантазия нужна для инженеров» // [Політехнік: газета Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»]. - 2005. - № 24-25; 26-27; 28.

133. *Радциг А.А.* В.Л. Кирпичев. - В кн.: Кирпичев В.Л. Собр. соч. в 2-х т. - Пт.: 1917, т. 1. - С. V.

134. *Радциг А.А.* В.Л. Кирпичев. - В кн.: Кирпичев В.Л. Собр. соч.: В 2-х т., т. 1, с. XVII.
135. *Ремез Е.Я.* О математических рукописях академика М.В. Остроградского, в кн.: Историко-математические исследования, вып. 4, М.—Л., 1951.
136. *Ремез Е.Я.* Об исследованиях М.В. Остроградского в области анализа // Полное собрание сочинений : в 3 т. / М. В. Остроградский. – М., 1961. – Т. 3. – С. 375–394.
137. *Руденко О.П.* Світ шукає, а нам - сам Бог велів // Полтавський вісник. – 2001. – № 36. – С. 5.
138. *Рябуха А.Ю.* Використання педагогічної спадщини М.В. Остроградського у підготовці майбутніх учителів фізики / А. Ю. Рябуха, І. В. Кривошапка // Витоки педагогічної майстерності : зб. наукових праць / Полт. держ. пед. ун-т імені В.Г. Короленка. – Полтава, 2009. – Вип. 6. – С. 83–86.
139. *Рябуха А.Ю.* Провідні напрями діяльності М.В. Остроградського в сфері добору та підвищення професійного рівня педагогічних кадрів / А.Ю. Рябуха, С.А. Новописьменний // Спадщина видатних педагогів Полтавщини в міжнародному освітньому просторі: матеріали міжнар. наук.-практ. конф. «Досвід видатних педагогів Полтавщини в управлінській діяльності» : Всеукр. наук.-практ. семінар, (Полтава, 12-13 берез. 2009 р.) / за заг. ред. М.В. Гриньової ; Ін-т педагогіки АПН України, Полт. обл. рада, Полт. міська рада, Полт. держ. пед. ун-т імені В.Г. Короленка. – Полтава, 2009. – С. 70–71.
140. С.П. Тимошенко – механік XX століття. Матеріали наукових читань з циклу: «Видатні конструктори України». – К.: ЕКМО, 2004. – 86 с.
141. *Сакун В.* Від ліжка тяжкохворого Шевченка годинами не відходив Остроградський // Полтавська думка. – 2003. – № 10. – С. 1, 11.
142. Святкування 200-річчя М.В. Остроградського: нотатки з ювілейних заходів // ПостМетодика. – 2001. – № 3. – С. 41.
143. *Семеновская Л.А.* Антон Макаренко та Михайло Остроградський про вирішальну роль праці у вихованні підростаючого покоління // А.С. Макаренко и мировая педагогика : матер. междунар. семинара, Полтава, 8-10 апреля 2002 года / Полт. гос. пед. ун-т им. В.Г. Короленка, Полт. обл. ин-т последиплом. пед. образования им. М. В. Остроградского, Межд. ассоц. Макаренко, Укр. ассоц. А. С. Макаренко. – М., 2002. – С. 128–130.
144. *Семеновська Л.* М.В. Остроградський про зміст освіти // Дидаскал. – 2005. – № 3. – С. 127–132.
145. *Семеновська Л.* Ідея трудового виховання у педагогічній спадщині М.В.Остроградського // Сучасні освітні технології та напрямки підготовки майбутнього вчителя трудового навчання : матеріали міжнар. наук.-практ. конф., присвяченої 25-річчю пед.-індустріального ф-ту, 8-9 жовтня 2003 року / Полт. обл. держ. адмін., Полт. держ. пед. ун-т імені В.Г. Короленка, Полт. обл. ін-т післядипломної пед. освіти імені М. В. Остроградського. – Полтава, 2003. – С. 105–107.
146. *Семеновська Л.* Наукова школа М.В. Остроградського // Дидаскал. – 2004. – № 2. – С. 141–146.
147. *Семеновська Л.* Особистісно-соціальна спрямованість педагогічної концепції М.В.Остроградського / Л. Семеновська // Імідж сучасного педагога. – 2003. – № 2. – С.6–8.

148. *Семеновська Л.* Полікультурна особистість М.В. Остроградського / Л. Семеновська // Слов'янський збірник. – Полтава, 2005. – Вип. IV. – С. 227–237.

149. *Семеновська Л.* Полтавські джерела формування педагогічної позиції М. В. Остроградського / Л. Семеновська // Збірник наукових праць Полтавського державного педагогічного університету імені В.Г. Короленка. – Полтава, 2003. – Вип. 5 (32). – С. 124–131. – (Педагогічні науки).

150. *Семеновська Л.* Принципи навчання у педагогічній спадщині М. В. Остроградського / Л. Семеновська // Збірник наукових праць Полтавського державного педагогічного університету імені В. Г.Короленка. – Полтава, 2002. – Вип. 5/6 (26–27). – С. 90–94. – (Педагогічні науки).

151. *Семеновська Л.А.* Принципи навчання у педагогічній спадщині М.В. Остроградського / Л. А. Семеновська // Збірник наукових праць Полтавського державного педагогічного університету імені В.Г. Короленка. – Полтава, 2002. – Вип. 5-6 (26–27). – С. 90–94. – (Педагогічні науки).

152. *Семеняк В.В.* Українські генії математики. Усний математичний журнал / В. В. Семеняк, З. М. Семеняк // Математика в школах України. Позакласна робота. – 2011. – № 4. – С. 27–33.

153. *Сита Г.* "... Краса виявляється в чітких, яскраво окреслених ідеях..." / Г. Сита // Вісник НАН України. – 2001. – № 9. – С. 44–49.

154. *Сита Г.* Корінь великого роду / Г. Сита // Україна. – 1986. – № 47. – С. 7.

155. *Сита Г.* Остроградські / Г. Сита // Наука і суспільство. – 1985. – № 2. – С. 36–38.

156. *Сита Г.* Сторінки генеалогії роду М. В. Остроградського / Г. Сита // Київська старовина. – 1994. – № 4. – С. 87–91.

157. *Сита Г.М.* Михайло Васильович Остроградський / Г. М. Сита // У світі математики : зб. наук.-попул. ст. (для учнів старших кл. ред. та громад. засадах / ред. М. Й. Ядренко. – К., 1985. – Вип.16. – С. 142–151.

158. *Сита Г.М.* Михайло Остроградський / Г. М. Сита // У світі математики. – 2001. – Т. 7, вип. 3. – С. 89–93.

159. *Сита Г.М.* Славетний син України математик Михайло Остроградський / Г. М. Сита // Наукові записки. Фізико-математичні науки. – К., 2002. – Т. 20. – С.3–5.

160. *Сколотяний П.М.* Внесок українських вчених-фізиків у світову науку / П. М. Сколотяний // Фізика в школах України: наук.о-метод. журнал. – 2007. – № 17. – С. 16–28.

161. *Скоропадський П.* Спогади. Кінець 1917 – грудень 1918. — Київ — Філадельфія, 1995.

162. Славетний математик козацького роду. До 210-річчя від дня народження М. В. Остроградського // Календар знаменних і пам'ятних дат. – 2011. – № 3. – С. 110–120.

163. Служение Отечеству и долгу: очерки о жизни и деятельности ректоров харьковских вузов (1805-2004 гг.) / Народ. укр. акад.; под общ. ред. В.И. Астаховой, Е.В. Астаховой. - Харьков: Изд-во НУА, 2004.

164. *Смышляев В.К.* Великий Остроградский / В. К. Смышляев // О математике и математиках : Очерки и рассказы / В. К. Смышляев. – С. 131–133.

165. *Сомов О.И.* Очерк жизни и ученой деятельности М.В.Остроградского // Записки Императорской академии наук. СПб., 1863. Т.III. Кн.1. С.1-26.

166. Сопротивление материалов: лекции, читан. проф. Д.С. Зерновым / Д.С. Зернов. - Харьков: Тип. и лит. М. Зильберберг и С-вья, 1902. - 479 с.

167. *Сорока М.* Голодранець із Парижа (уривок з біографічного роману про М.В. Остроградського) / М. Сорока // Дивосвіт. – 2005. – № 1. – С. 30–35.

168. *Сорока М.* Перша сходинка в науку / М. Сорока // Історичний календар : наук. - попул. та літературний альманах : навч. посіб. студ. гуманіт. ф-тів вузів, викладачам іст. і народознав., учням середніх та спец. середніх закл. України / упоряд.: А. Денисенко, В. Туркевич. – К., 2001. – Вип.7 : 2001. – С. 343–348.

169. *Сорочинська О.Л.* Засновник інженерної освіти в україні В.Л. Кирпичов. - Історія науки і техніки. - 2013. - Вип. 4. - С. 112-119.

170. Спадщина видатних педагогів Полтавщини в міжнародному освітньому просторі : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. «Досвід видатних педагогів Полтавщини в управлінській діяльності» : Всеукр. наук.-практ. семінар, (Полтава, 12-13 берез. 2009 р.) / за заг. ред. М. В. Гриньової ; Ін-т педагогіки АПН України, Полт. обл. рада, Полт. міська рада, Полт. держ. пед. ун-т імені В.Г. Короленка. – Полтава, 2009. – 175 с.

171. *Сусь Б.* 200 років від дня народження видатного українського математика Михайла Остроградського / Б. Сусь // Фізика та астрономія в школі. – 2001. – № 4. – С. 50–52.

172. *Сусь Б.* Генієм його визнали ще за життя. До 200-річчя М. Остроградського / Б. Сусь // Освіта України. – 2001. – № 24 січн. – С. 7, 9.

173. *Сусь Б.* Глибинні джерела нашого буття / Б. Сусь // Слово Просвіти. – 2001. – № 17 верес. – С. 6.

174. *Сявавко Є.І.* Народознавча культура як складова педагогічної культури М. Остроградського та його послідовників / Є. І. Сявавко, Т. М. Файник // Витоки педагогічної майстерності : зб. наук. праць / Полт. держ. пед. ун-т імені В. Г. Короленка. – Полтава, 2009. – Вип. 6. – С. 91–96.

175. Термодинамика: лекции, читан. проф. Д.С. Зерновым в 1901 г. / Д.С. Зернов. - Харьков : Пар. тип. и лит. М. Зильберберг и С-вья, 1901. - 295 с.

176. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. – К.: Наукова думка, 1993. – 424 с.

177. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. - Москва: Вузовская книга, 2014. – 444 с.

178. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. - Москва: Вузовская книга, 2016. – 442 с.

179. *Тимошенко С.П.* Воспоминания. Издание объединения С.-Петербургских политехников. E.A. Vetehorine 15, Boulevard Anatole — Paris, France, 1963.

180. *Тимошенко С.П.* Инженерное образование в России. - Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ. Люберцы, 1997. - 84 с.

181. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. - М.: Гостеориздат, 1957. - 536 с.

182. *Тимошенко С.П.* Курс статики сооружений. – Л.: ГНТИ, 1931. – 391 с.

183. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости, ч. II. – 1916.

184. *Тимошенко С.П.* О динамических напряжениях в рельсах // Вестник инженеров, т. 1, № 4, 15 февраля, 1915.- С. 143-152.
185. *Тимошенко С.П.* Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // С.П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 9 — 105.
186. *Тимошенко С.П.* Об устойчивости упругих систем // С.П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 208 — 383.
187. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1948.
188. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций. — М.: Наука, 1975. — 704 с.
189. *Тимошенко С.П.* Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: ГНТИ, 1931. — 224 с.
190. *Тимошенко С.П.* Сборник задач по сопротивлению материалов.– М.-Л., 1928.
191. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов, т. II. - М.: Гостехиздат, 1946.
192. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Т. I. Элементарная теория и задачи. - М.: Физматгиз, I960. — 379 с. Т. П. Более сложные вопросы теории и задачи. - М.: Наука, 1965. — 480 с.
193. *Тимошенко С.П.* Статика сооружений. — М.: ГНТИ, 1934. - 364 с.
194. *Тимошенко С.П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. – К.: Наукова думка, 1975. – 561 с.
195. *Тимошенко С.П.* Теория висячих мостов. // С.П. Тимошенко. Статические и динамические проблемы теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1975. - С. 418-447.
196. *Тимошенко С.П.* Теория изгиба, кручение и устойчивость тонкостенных стержней открытого поперечного сечения. // С. П. Тимошенко. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Наука, 1971. — С. 670 — 727.
197. *Тимошенко С.П.* Теория колебаний в инженерном деле (перевод с английского), – М.: Госс. Научно-техническое издательство, 1931. – 344 с.
198. *Тимошенко С.П.* Теория упругости (перевод с английского). – М.: ОНТИ, 1937. – 452 с.
199. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы под редакцией Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
200. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем (перевод с английского). – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 532 с.
201. *Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М, Наука, 1966. – 636 с.
202. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. – 560 с.
203. *Тимошенко С.П., Дж. Гере.* Механика материалов. — М.: Мир, 1976. — 669 с.
204. *Тимошенко С.П.* Курс сопротивления материалов. — Киев: Изд-во кн. маг. Л. Идзиковского, 1912. — 519 с.

205. *Тимошенко С.П.* Прочність аеропланів // Праці Інституту технічної механіки. Українська Академія наук, 1919. - 6-7с.
206. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов, т. I (перевод с английского). – М.: Гостехиздат, 1945.
207. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. В 2 ч. Ч.2. Теория и задачи. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1932.
208. *Тимошенко С.П., Лессельe Д.М.* Прикладная теория упругости. - Л.: ГНТИ, 1930. – 392 с.
209. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. - М.: Машиностроение, 1985. - 472 с.
210. *Требіна Н.* Найперший вчений у краю козацькім, властитель теорем і аксіом / Н. Требіна // Полтавська думка. – 2001. – № 38. – С. 7.
211. *Трипольський П.* Михаил Васильевич Остроградский: празднование столетия со дня его рождения Полтавским Кружком любителей физико-математических наук / П. Трипольский. – Полтава, 1902. – 140 с.
212. *Трипольский П.И.* Михаил Васильевич Остроградский. Полтава, 1902.
213. У відблиску світової слави // Полтавський вісник. – 2001. – № 36. – С. 5.
214. Україна. Верховна Рада. Про вшанування пам'яті великого українського вченого-математика М. В. Остроградського: постанова від 7 лют. 2002 р. / Україна. Верховна Рада // Голос України. – 2002. – № 23 лют. – С. 2.
215. Український математичний конгрес - УМК 2001 // Математика: додат. до газ. "Шкільний світ". – 2001. – № 16. – С. 1.
216. *Фельдблюм Б.* Михаил Васильевич Остроградский / Б. Фельдблюм // О самом важном в математике / Б. А. Фельдблюм. – Л., 1969. – С. 108.
217. *Филин А.П.* Матрицы в статике стержневых систем. – Л.-М., 1966.– С. 107–116.
218. *Филин А.П.* Пять часов в обществе классика науки. - Санкт-Петербург, 1993.
219. *Чеканов А.А.* Виктор Львович Кирпичев (1845-1913). – М.: Наука, 1982. – 174 с.
220. Швиденко С. Учні М.В. Остроградського / С. Швиденко // Імідж сучасного педагога. – 2001. – № 5. – С. 27–28.
221. *Шевченко Т.Г.* Полное собрание сочинений. Киев, 1949. Т.2.
222. *Шендрик А.* До 210-річчя від дня народження М.В. Остроградського, 24.09.1801 р. / А. Шендрик // Край. – 2011. – № 9. – С. 21–22.
223. *Bertrand J.L.F.* L'Acadcmie dos sciences et lcs academiciens de 1666 a 1793, Paris, 1869.
224. *Betti E.* Teoria della elasticita // Nuovo Cimento. — 1872/73. — Ser. 2. — N 7-10.
225. *Delambre J.B.J.* Oeuvres de Lagrange, t. I. - Paris, 1867.
226. *Lagrange.* Mécanique analytique, 1re éd. – Paris. – 1788.
227. *Lyons Henry.* The Royal Society, 1660—1940, 1944.
228. *Ostrogradsky M.* Memoire sur les equations differentielles, relatives au probHme isoperimttres, Memoires de l'Academie des Sciences, т. 6, St. Petersb., 1850, стр. 385—517; «Сборник», стр. 315—387.

229. *Ostrogradsky M.* Sur les integrates des equations generates de la dynamique, Melanges de 1'Academie de St. Petersbourg, 6/18 oct. 1848; Избр. произв, изд. АН СССР, 1958.

230. *Rayleigh J.W.S.* Die Theorie des Schalles. Erster Band. Trans. from the English by F. Neesen. - Braunschweig: Vieweg, 1879.

231. *Rayleigh J.W.S.* Die Theorie des Schalles. Zweiter Band. Trans. from the English by F. Neesen. - Braunschweig: Vieweg, 1880.

232. *Rayleigh J.W.S.* The Theory of Sound, vol. I. - New York, 1877.

233. *Rayleigh J.W.S.* The Theory of Sound, vol. II. - New York, 1878.

234. *Straub H.* Die Geschichte der Bauingenieurkunst. 4th, rev. ed., ed. Peter Zimmermann. - Basel: Birkhäuser, 1992.

235. *Timoshenko S.* On the Distribution of Stresses in a Circular Ring Compressed by Two Forces along a Diameter.- Phil. Mag., Vol. 44, 1922.

236. *Timoshenko S.P.* Engineering education in Russia. New Yontr McGraw - Hill book Co. Inc. 1959. – 47 p. [Перевод на русский язык: С.П. Тимошенко. Инженерное образование в России. ВИНИТИ. Люберцы. 1996. - 82 с.]

237. *Timoshenko S.P.* Erinnerungen Stepan P. Timoshenko: Eine Autobiographie. Trans. From the Russian by Albert Duda. Berlin: Ernst &Sohn, 2006.

238. *Timoshenko S.P.* History of strength of materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. - New York: McGraw-Hill, 1953. – 452 p.

239. *Timoshenko S.P.* History of the development of strength of materials in Russia // Problemi attuali di scienz e di culdura. Rome, 1953, Quaderno, № 29, - 8 p.

240. *Timoshenko S.P., Baud R.V.* Strength of gear teeth in greatly affected by fillet radius // Automotive industries, 1926, vol. 55, №4, July 22. - P. 138-142.

241. *Todhunter.* A history of the calculus of variations during the nineteenth century. Cambridge, 1861.